

符号一览表

$\delta(t)$	单位冲激信号
$\delta(n)$	单位样值(脉冲)信号
$u(t), u(n)$	连续 / 离散单位阶跃信号
$x(t)$	连续时间信号
$x(n)$	离散时间信号
T, ω_0	连续时间信号的基本周期, 基频
N, Ω_0	离散时间信号的基本周期, 基频
N	某些场合表示信号长度
$X(j\omega)$	$x(t)$ 的傅里叶变换
X_k	$x(t)$ 的傅里叶级数系数
$X(\Omega)/(e^{j\Omega})$	$x(n)$ 的离散时间傅里叶变换
$X(s)$	$x(t)$ 的拉普拉斯变换
$X(z)$	$x(n)$ 的 z 变换
$X(k)$	$x(n)$ 的离散傅里叶变换
$x(t), x(n)$	系统输入
$y(t), y(n)$	系统输出
$h(t)$	单位冲激响应
$h(n)$	单位样值(脉冲)响应
$y_{zi}(t), y_{zi}(n)$	零输入响应
$y_{zs}(t), y_{zs}(n)$	零状态响应
$y_n(t), y_n(n)$	固有响应
$y_f(t), y_f(n)$	强迫响应
$H(j\omega)$	连续时间系统的频率响应
$ H(j\omega) $	连续时间系统的幅频响应(幅频特性)
$\angle H(j\omega)$	连续时间系统的相频响应(相频特性)
$H(\Omega)/H(e^{j\Omega})$	离散时间系统的频率响应
$ H(\Omega) $ 或 $ H(e^{j\Omega}) $	离散时间系统的幅频响应(幅频特性)
$\angle H(\Omega)/\angle H(e^{j\Omega})$	离散时间系统的相频响应(相频特性)
CTFS	连续时间傅里叶级数
CTFT	连续时间傅里叶变换
DTFT	离散时间傅里叶变换
DTFS	离散时间傅里叶级数
DFT	离散傅里叶变换
FFT	快速傅里叶变换
LTI	线性时不变系统

绪 论

信号是信息学科研究的基本内容,信号与系统是两个用得极为广泛的基本概念,与这些概念有关的方法在很多科学和技术领域起着重要的作用。无论在自然科学还是在社会科学中,大至天体宇宙、人类社会,小至生物细胞、原子结构,都存在有信号与系统的应用研究问题。在这些不同的领域中,虽然信号与系统的物理属性和表现形式各不相同,但全都具有两个基本的共同点,即信号总是一个或几个独立变量的函数,该函数一般都包含了关于某些现象性质的信息;而系统总是对给定的信号作出响应而产生出另外的信号。

本书以信号分析为基础,系统分析为桥梁,处理技术为手段,系统综合为目的。在内容上,离散与连续并重;分析与综合并重;经典与现代并重。

0.1 信号与系统

信息是人类社会和自然界中需要传送、交换、存储和提取的抽象内容。由于信息是抽象的内容,为了传送和交换它,首先必须用语言、文字、图像和数据将它表达出来。人们称表示信息的语言、文字、图像和数据等为消息。运载信息的光、声、电等物理量被称为信号,所以信号就是信息的一种物理体现。

- (1) 物理上,信号是信息寄寓变化的形式;
- (2) 数学上,信号是一个或多个变量的函数;
- (3) 形态上,信号表现为一种波形;
- (4) 自变量:时间,位移,周期,频率,幅值,相位等。

概括地讲,信息是抽象的;消息是具体的,但不是物理的;而信号则既是具体的,又是物理的。这个世界到处都充满了信号,无论是来自自然的还是人们发出的。例如,在我们说话时气压的变化、一天中气温的高低,以及心脏产生的周期性心电信号。从基本含义上讲,信号是用来传递某种消息或信息的物理形式。虽然信号的形式各不相同,但它们都是传递信息或消息的载体。对于不同的学科领域,信息的载体具有不同的物理形式,常见的形式如声、光、电、力等。

在任何情况下,信号值都与它的幅度相对应。假设 t 为连续时间变量, nt_s 为离散时间变量,其中 t_s 是抽样间隔, n 是一个整数。同时也假设幅度为一个连续变量,或被量化为有限数目的极值间的离散电平。这会产生以下四种可能的信号,如图 0.1 所示。

信息的交换、传送、存储和提取是借助于信号来完成的。而信号是物理量,它的传输、存储和处理必须借助于物理设备才能实现。这些传输、存储和处理信号的设备称为系统。广义上讲,系统是由各不相同但彼此影响的单元有机地集合起来实现某个总目标的一种组合。系统强调的是事物间的相互制约、运动和变化,强调的是“森林”,是全局。广义而言,系统是对输入信号作出响应的物理结构。其本质是对输入信号进行相应的处理,并将处理后的信号作为系统的输出,这种输出也称为系统的响应。例如,人体的味觉神经系统可以感觉到食物的酸甜苦辣;计算

机的显示系统可以在屏幕上显示键盘输入的每一个字符;通信网络系统可以根据输入的信号将天各一方的亲朋好友互联在一起。虽然系统一词包罗万象,种类繁多,大小不一,但在对输入信号作出响应这一点上是相通的。

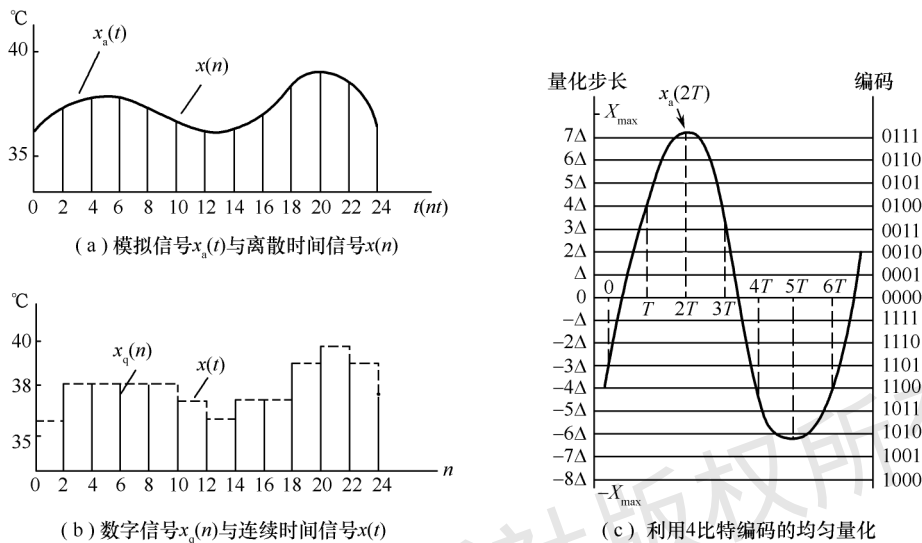


图 0.1 模拟、抽样、量化及数字信号

按照系统的形成来划分,系统大致可分为两类:一类是自然形成的系统,如天体地球等;另一类是人为设计的系统,如电子系统、通信系统等。人为设计的系统一般是根据设计人员的需要来实现某种特定的功能。这种系统通常由若干相互关联的元器件或子系统进行连接而形成整体。例如,一个最简单的积分电路系统可以由一个电阻和一个电容元件组成,其基本功能是对输入信号进行积分后输出。本书仅讨论人为设计的系统。

按所处理的信号种类的不同可将系统分为 4 类:

- (1) 模拟系统:处理模拟信号,系统输入、输出均为连续时间连续幅度的模拟信号。
- (2) 连续时间系统:处理连续时间信号,系统输入、输出均为连续时间信号。
- (3) 离散时间系统:处理离散时间信号(序列),系统输入、输出均为离散时间信号。
- (4) 数字系统:处理数字信号,系统输入、输出均为数字信号。

系统可以是线性的或非线性的、时不变的或时(移)变的。

分析一个系统,一般按照下面的三个步骤:① 建立数学模型;② 求数学解;③ 对所求得的了解赋予物理解释。其步骤如图 0.2 所示。

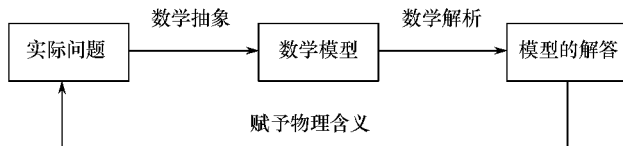


图 0.2 系统分析三步骤

0.2 信号处理

信号处理是研究用系统对含有信息的信号进行处理(变换),以获得人们所希望的信号,从而达到提取信息、便于利用的一门学科。信号处理的内容包括滤波、变换、检测、谱分析、估计、压缩、识别等一系列的加工处理。

因为多数科学和工程中遇到的是模拟信号,所以以前都是研究模拟信号处理的理论和实现。但是模拟信号处理难以做到高精度,受环境影响较大,可靠性差,且不灵活等。随着大规模集成电路以及数字计算机的飞速发展,加之从 20 世纪 60 年代末以来数字信号处理理论和技术成熟与完善,用数字方法来处理信号,即数字信号处理,已逐渐取代模拟信号处理。

图 0.3 是信号处理的概念性图示。模拟信号的数字处理要求在处理之前使用模拟信号到数字信号的转换器(ADC)来抽样模拟信号,还要求利用数字信号到模拟信号的转换器(DAC)将处理过的数字信号再转换回模拟信号。

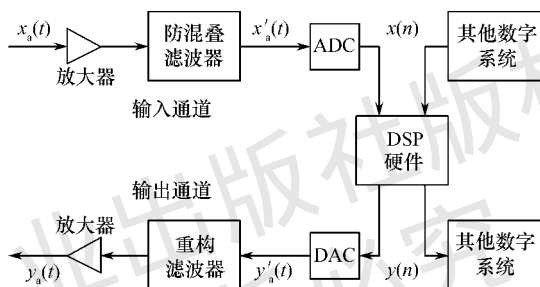


图 0.3 模拟信号与数字信号处理

其中,模拟输入信号经过放大和防混叠低通滤波后,送到模/数转换器,转换成数字信号,再将数字信号送到 DSP 中进行必要的算法处理,待处理完成后,可根据任务需要将处理结果转换成模拟信号,同时,数/模转换器的输出还须经过重构滤波和放大后,才能得到最终的所要求的模拟输出信号。

对于某些实时应用,输入数据已经是数字形式,而输出数据也可能不必再转换成模拟信号。例如,要处理的数字信号已经存放在计算机的存储器中以备后用,或者运算结果可以用图形显示出来。而在其他应用中,DSP 系统要求产生数字信号,如用于蜂窝电话的语音合成,CDMA 系统的随机数产生器等。

0.3 信号分析与处理的主要研究内容

上面提到的例子中,有些信号是随时间连续变化的,而另一些则仅仅在离散时间点上取值。由于对这两类信号的描述以及对这些信号作出响应或处理的系统的描述,都有着明显的不同,因此,自然导致两种并行的信号与系统分析范畴。其一就是以连续时间描述的现象和过程,而另一个则是以离散时间描述的现象和过程。有关连续时间信号与系统、离散时间信号与系统的概念和方法都有着悠久的历史,而且在概念上是息息相关的。然而在历史上由于两者在应用上各行其道,因此,它们大部分的研究和发展多少都是独自进行的。连续时间信号与系统在物

理学方面,以及近代电路理论和通信系统方面的应用有很深的渊源,而离散时间信号与系统却在数值分析、统计学,以及经济学和人口统计学等数据分析应用有关的时间序列分析中找到了它的根基。但是,在近几十年内,连续时间和离散时间信号与系统变得日益交织在一起,而在应用上也日益结合。造成这种变化的强大动力是在系统实现和信号产生技术上取得的惊人进展。特别是高速数字计算机、集成电路和尖端高密度器件制造技术等所取得的难以置信的飞速发展,已经使得考虑用等间隔样本来表示和处理连续时间信号(即转换为离散时间信号)具有越来越多的好处。

鉴于连续时间信号与系统和离散时间信号与系统之间的相互关系日益密切,以及各自有关的一些概念和方法之间的紧密联系,本书选择了以并行的方式来讨论这两种类型的信号与系统。由于两者在很多概念上是类似的(但不是完全一样),因此,并行地处理可以做到在概念和观点上两者互为分享,且可更好地把注意力放在它们之间的类同点和不同点上。此外,某些概念从一种系统引入要比从另一种系统来得容易接受;而一旦在一种系统中被理解之后,就可简而易之地把这些概念用到另一系统中去。

信号理论的研究主要有两个方面的内容,即信号分析与信号综合。信号分析主要研究信号的描述方法、信号数学模型的建立,以及信号的基本特性;信号综合则是根据具体的要求来设计、产生所需要的信号。

系统理论的研究方法也有分析与综合之分。系统分析包括建立系统的数学模型,以及借助系统模型研究系统的基本属性,如系统的响应特性、频率特性、稳定性等;系统综合则是在给定的条件下设计出所需要的系统。例如,要求所设计的系统对某种给定的输入信号产生某种给定的输出信号就属于系统综合的问题。

虽然建立系统模型需要一些相应的专业基础知识,而且不同的系统所需要的专业基础知识又各不相同,但是,当把系统抽象为数学模型以后,它们的分析方法是相通的。因此,本书的内容仅限于信号与系统的分析,主要讨论系统对不同输入信号的响应,而要确定系统的响应,有关信号与系统的特性及其描述方法当然是必不可少的研究内容。此外,本书所研究的系统只涉及线性时不变系统。之所以只讨论线性时不变系统,不仅由于大多数物理系统可以近似为线性时不变系统,更重要的是,长期以来对线性时不变系统的研究已经形成了一套完整、严密且能普遍适用的分析方法,而且,这些分析方法也能为研究非线性时不变系统所借鉴。

信号与系统是两个密切相关的概念。在许多实际应用中,尤其是在信号提取、信号恢复、信号增强、语音识别等数字信号处理的课题以及大规模集成电路的设计中,它们往往被有机地融合在一起。例如,为了实时地识别语音,一方面要分析研究语音信号的各种特性,建立语音信号的数学模型,确定语音信号的编码方法以及识别算法;另一方面则要仔细设计专用硬件,而硬件的设计又和语音信号的种种特性息息相关。信号与系统这种密切相关的特点也是本课程得以受到广泛重视的原因之一。

本书将从时域和变换域两方面对信号和线性时不变系统进行分析讨论,强调时域分析与频域分析以及它们之间的对应关系和内在关系,分析工具包括有微分方程、差分方程、傅里叶变换、拉普拉斯变换以及 z 变换等。分析主线如图0.4所示。

以信号施加于系统,然后求取系统响应为分析主线,按照先时域后频域,再复频域,先连续时间系统后离散时间系统的顺序进行。

长期的历史实践已经证明,这些经典的分析方法对解决具体的实际问题确实行之有效,它

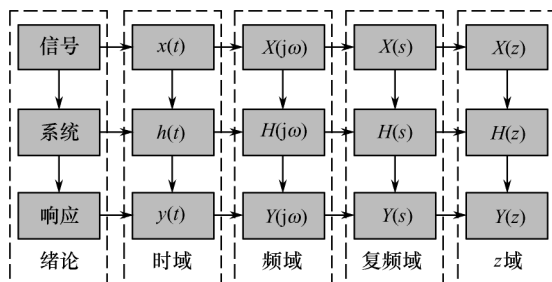


图 0.4 信号与系统分析之间的关系

们在不同的学科领域中都得到了广泛而重要的应用。毫无疑问,随着科技的发展与进步,这些方法已经得到并仍将得到进一步地发展,其应用领域也将得到进一步地拓宽和延伸。因此,扎实地掌握这些基本的分析方法,透彻地理解相应的物理概念,深入地吸收寄寓于这些方法和概念中的有关思想,是学好后续课程以及今后工作中具有发展潜力的可靠保证。

电子工业出版社版权所有
盗版必究

第 1 章 信号与系统的基本概念

信号与系统分析、处理的任务是研究信号与系统分析、处理的基本理论和方法。随着近代科学技术的发展,数字计算机的广泛应用,使得信号与系统日益复杂和综合,从而大大促进了其理论研究的发展。

这一章讨论有关信号和系统的一些基本概念和重要性质,还要讨论一些常用信号及信号的基本运算,它们在信号分析中占有十分重要的地位。本章学习的目的是为理解全书其他内容打下牢固的基础。

1.1 信号及其分类

所谓信号就是信息的载体,是信息的物理体现。例如,视频信号或音频信号,或一个公司每月的销售额,或某股票市场每天的收盘价,等等。在这些例子中,信号都是自变量为时间的函数。然而,情况也并非如此。比如说,当电荷分布在某一物体上时,信号就是电荷密度,它是空间的函数,而不是时间的函数。在本章中将讨论的信号几乎都是时间的函数。然而这些讨论也完全适用于其他的自变量。

信号的基本形式是取值随时间变化的量(时间 t 称为信号的自变量)。这种取值变化常常采用解析函数表达式,或者时间函数的图形(称为信号的波形图)来表示。除了解析函数表达式与波形图这两种直观的描述方法之外,还用频谱或其他正交变换的方式来描述信号,在后续章节中将介绍。

信号的形式是多种多样,根据其自身的特征,可对信号进行如下分类。

1.1.1 确定性信号和随机性信号

按照信号是否存在随机性可以将信号分为确定性信号和随机性信号。**随机性信号**在某一时刻的取值具有不可预知的不确定性,只能通过大量试验测出它在某一时刻取值的概率分布。这类信号是随机信号分析的研究对象。**确定性信号**可以表示为时间函数,且它的参量都确定,给定某一时刻的取值是完全确定的,其所包含的信息的不同就体现在取值随时间的不同变化规律上。本书只讨论确定性信号。

1.1.2 连续时间信号和离散时间信号

按照信号自变量取值的连续性,可以将信号分为连续时间信号和离散时间信号。在连续的时间范围内有定义的信号称为**连续时间信号**,简称**连续信号**。本书一般以 $x(t)$ 表示连续时间信号,如图 1.1(a) 所示。

在一些离散的瞬间才有定义的信号称为**离散时间信号**,简称**离散信号**。这里的“离散”是

指信号的定义域(时间)是离散的,它只取某些规定的值,离散时间信号定义在一些离散时刻 $t_n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 在其余的时间,信号没有定义,时刻 t_n 与 t_{n+1} 之间的间隔 $T_n = t_{n+1} - t_n$ 可以是常数,也可以随 n 变化。本书只讨论 T_n 是常数的情况。若令相继时刻 t_n 与 t_{n+1} 的间隔为 T , 则离散信号只在均匀离散时刻 $t = \dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots$ 时有定义。本书一般以 $x(nT)$ (其中 n 为整数) 表示离散时间信号,并把 $x(nT)$ 简记为 $x(n)$ 。因而离散时间信号又称为序列,如图 1.1(b) 所示。

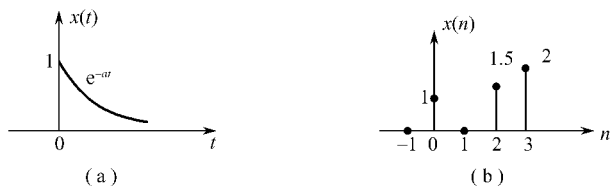


图 1.1 连续时间信号和离散时间信号

信号的自变量的取值可以是连续的,或是离散的,信号的取值也可以是连续的,或离散的。通常情况下我们把自变量和取值均为连续的信号称为**模拟信号**,而自变量和取值均为离散的信号称为**数字信号**。

1.1.3 周期信号和非周期信号

一个定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间的连续时间信号 $x(t)$, 如果存在一个最小的正值 T , 对全部 t , 下式成立:

$$x(t) = x(t + mT), m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.1)$$

则称 $x(t)$ 为**周期信号**, 其基波周期为 T , 否则称 $x(t)$ 为非周期信号。

一个定义在 $(-\infty, \infty)$ 区间的离散时间信号 $x(n)$, 如果存在一个最小的正整数值 N , 对全部 n , 下式成立:

$$x(n) = x(n + mN), m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.2)$$

则称 $x(n)$ 为**周期信号**, 其基波周期为 N , 否则称 $x(n)$ 为非周期信号。图 1.2 和图 1.3 分别给出了周期信号和非周期信号的实例。

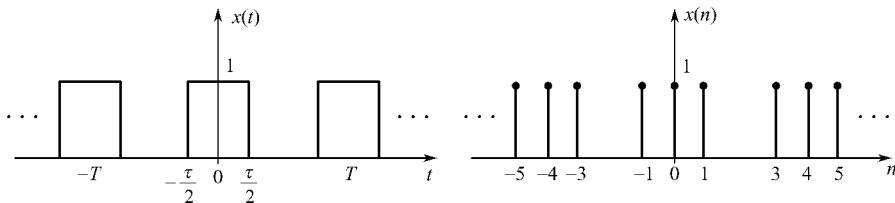


图 1.2 周期信号

由于周期信号具有重复性,我们可以得到周期信号的另一种表示方法。假设在 $t = 0$ 点附近的一个基波周期内的信号为 $x(t)$, 则周期信号 $x_T(t)$ 将是 $x(t)$ 在时间轴上按基波周期 T 进行延拓的结果,即

$$x_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + mT), m \text{ 为整数} \quad (1.3)$$

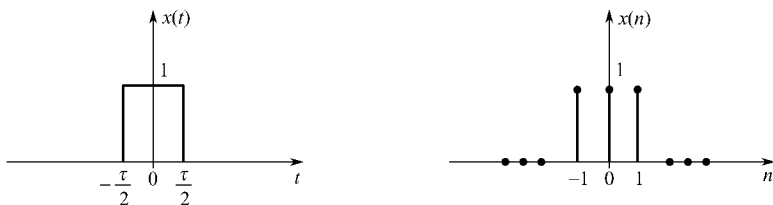


图 1.3 非周期信号

式(1.3)反映了 $x(t)$ 和 $x_T(t)$ 之间的关系,在后续章节的学习中将经常用到。对离散的周期信号有同样的结论:

$$x_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN), m \text{ 为整数} \quad (1.4)$$

而非周期信号不具备这种周期重复性,其波形在有限的时间范围内不会重复出现,因此也可把非周期信号看成周期为无穷大的周期信号。

1.1.4 功率信号和能量信号

信号 $x(t)$ 看作电压(或电流),则当 $x(t)$ 加在 1Ω 电阻两端时,将提供给该电阻大小为 $|x(t)|^2$ 的瞬时功率,在 $(-T/2, T/2)$ 区间提供的能量为 $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$, 平均功率为 $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$ 。

信号能量定义为在时间区间 $(-\infty, \infty)$ 信号 $x(t)$ 的能量,用字母 E 表示,即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (1.5)$$

信号功率定义为在时间区间 $(-\infty, \infty)$ 信号 $x(t)$ 的平均功率,用 P 表示,即

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

由于式(1.5)和式(1.6)中被积函数是 $x(t)$ 的模方,所以信号能量 E 和功率 P 都是非负实数,即使 $x(t)$ 是复信号亦是如此。

若信号 $x(t)$ 的能量 E 满足: $0 < E < \infty$ (且 $P = 0$), 则称 $x(t)$ 为**能量有限信号**(简称**能量信号**); 若信号 $x(t)$ 的功率满足: $0 < P < \infty$ (且 $E = \infty$), 则称 $x(t)$ 为**功率有限信号**(简称**功率信号**)。

一般而言,持续时间有限的非周期信号都是能量有限信号,而周期信号或其他一些持续时间无限长的信号都是功率有限信号。

对离散时间信号,序列 $x(n)$ 的能量 E 和平均功率 P 可分别定义为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.7)$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 \quad (1.8)$$

1.1.5 对称信号和非对称信号

在信号分析中还有一类信号为对称信号。典型的对称信号有奇对称信号、偶对称信号、奇谐对称信号和偶谐对称信号,分别简称为奇信号、偶信号、奇谐信号和偶谐信号。

偶信号 $x_e(t)$ 的波形关于坐标纵轴镜像对称,如图 1.4(a) 所示;**奇信号** $x_o(t)$ 的波形关于坐标原点对称,如图 1.4(b) 所示。奇、偶信号的定义分别为

$$x_e(t) = x_e(-t), x_o(t) = -x_o(-t) \quad (1.9)$$

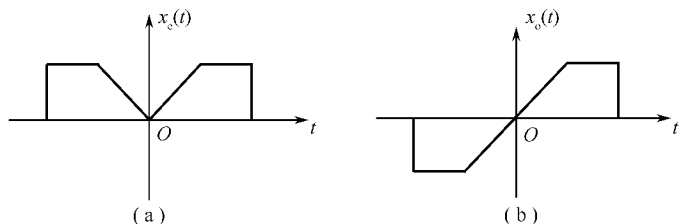


图 1.4 奇信号和偶信号

同样,对离散信号而言,奇偶信号的定义为

$$x_e(n) = x_e(-n), x_o(n) = -x_o(-n) \quad (1.10)$$

奇谐信号是指周期信号在时间轴上平移半个周期后与原信号关于时间轴镜像对称,如图 1.5(a) 所示,即

$$x(t) = -x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (1.11)$$

偶谐信号是指周期信号在时间轴上平移半个周期后与原信号重合,如图 1.5(b) 所示,即

$$x(t) = x\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (1.12)$$

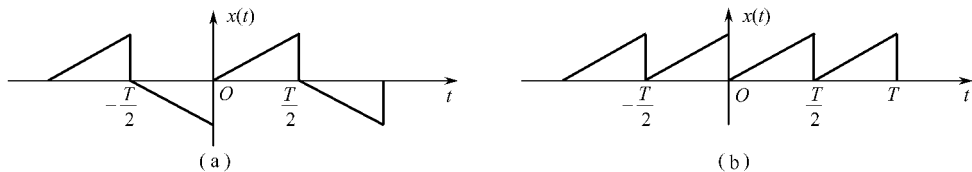


图 1.5 奇谐信号和偶谐信号

不具备上述对称特性的信号称为非对称信号。

1.2 常用信号及其基本特性

本节介绍几个常用的时间信号。由于这些信号经常遇到,而且是构成其他很多信号的基本单元,故把它们统称为基本信号。了解这类信号的时域描述及其特性是非常必要的。

1.2.1 连续时间复指数信号

在信号与系统分析中,一个重要信号是复指数信号,数学描述为

$$x(t) = e^{st} \quad -\infty < t < \infty \quad (1.13)$$

式中, s 为复数, $s = \sigma + j\omega$; σ, ω 为实数。

因此,式(1.13) 利用欧拉公式可写成

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos\omega t + j\sin\omega t) \quad -\infty < t < \infty \quad (1.14)$$

由于 $s^* = \sigma - j\omega$ (模的共轭),那么

$$e^{s^*t} = e^{(\sigma-j\omega)t} = e^{\sigma t} (\cos\omega t - j\sin\omega t) \quad -\infty < t < \infty \quad (1.15)$$

可得

$$e^{\sigma t} \cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{st} + e^{s^*t}) \quad -\infty < t < \infty \quad (1.16)$$

可见 e^{st} 是 $e^{j\omega t}$ 函数的推广,这里频率变量 $j\omega$ 被推广到复变量 $s = \sigma + j\omega$,为此将变量 s 称为复频率。当式(1.13) 中 s 取不同值时,可以派生出许多信号。下列这些信号都可以从 e^{st} 中得到:

- (1) 一个常数 $k = ke^{0t}$, ($s = 0$), k 为常数,常将此信号称为直流信号;
- (2) 实指数信号 $e^{\sigma t}$, ($\omega = 0, s = \sigma$);
- (3) 正弦信号 $\cos\omega t$, ($\sigma = 0, s = \pm j\omega$);
- (4) 指数变化的正弦 $e^{\sigma t} \cos\omega t$, ($s = \sigma \pm j\omega$)。

这些信号如图 1.6 所示。

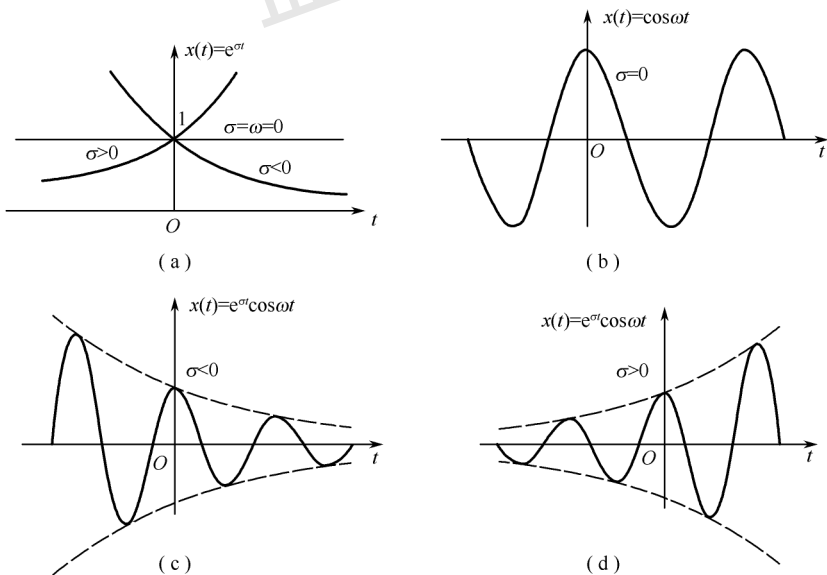


图 1.6 复指数信号

可以很方便地将复频率 s 表示在一个复平面(又称 s 平面)上。如图 1.7 所示,水平轴是实

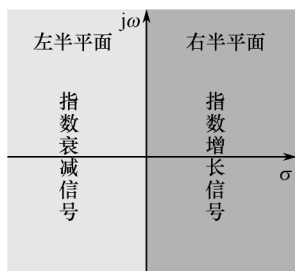


图 1.7 复平面(s 平面)

一个轴上。图 1.6(c) 的信号是指数衰减,因此 σ 为负, s 位于虚轴的左边。相反,图 1.6(d) 的信号是指数增长,因此 σ 为正, s 位于虚轴的右边。据此, s 平面(图 1.7)可划分为两部分:对应于指数衰减信号的左半平面(LHP)和对应于指数增长信号的右半平面(RHP)。虚轴将两个区域分开,并对应于等幅振荡的信号。

1.2.2 连续时间单位阶跃信号和单位冲激信号

1.2.2.1 单位阶跃信号

在我们的大多讨论中,信号都是在 $t = 0$ 开始的(因果信号)。这类信号能非常方便地利用图 1.8 中单位阶跃信号来描述,这个信号可定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

从式(1.17)可见,单位阶跃信号在 $t = 0$ 有一个不连续点,或称为跳变点,其跳变值为 1。正是由于这么一个跳变点,且跳变值为 1,才将该信号形象地称为单位阶跃信号。对于 $u(t)$ 在跳变点 $t = 0$ 的函数值,一般不定义,但也可定义为 $1/2$ 。从信号处理的角度看,两连续时间信号在有限个孤立时刻上的有限数值差别不会导致信号能量的差异,从而不会导致处理结果的不同。

利用单位阶跃信号的单边特性可以表示各种单边信号,或者组合成其他一些基本信号。例如,一般的单边信号可以表示为 $x(t)u(t)$,而单边指数信号则可表示为 $e^{-\alpha t}u(t)$ 。再如对于图 1.9(a) 的门信号(又称矩形脉冲),可用 $u(t)$ 表示为

$$G_{\tau}(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (1.18)$$

如图 1.9(b) 所示。

1.2.2.2 单位冲激信号 $\delta(t)$

在信号与系统研究中,单位冲激信号 $\delta(t)$ 又称单位冲激函数,是最重要的函数之一。这个函数首先被狄拉克(P. M. Dirac) 定义为:

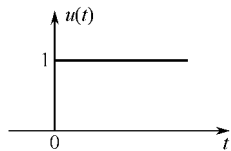


图 1.8 单位阶跃信号

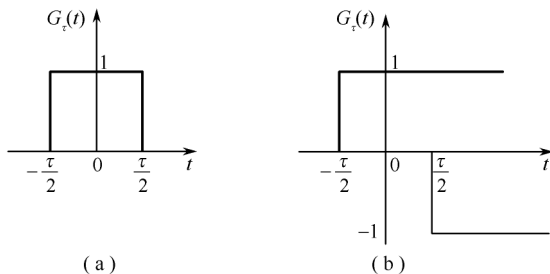


图 1.9 用单位阶跃信号表示一个门信号

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \delta(t) \rightarrow \infty & t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

我们可以用一个其波形如图 1.10(b) 所示的具有单位面积且又高又窄的矩形脉冲来近似描述冲激信号。这个矩形脉冲的宽度是一个非常小的值 $\tau \rightarrow 0$, 结果, 它的脉冲幅度就是一个非常大的值 $1/\tau \rightarrow \infty$ 。因此, 单位冲激信号可以看作是宽度变成无穷小, 幅度变成无穷大, 而面积一直保持为 1 的一个矩形脉冲。于是, 除 $t = 0$ 外, 处处 $\delta(t) = 0$, 而在 $t = 0$, 它无定义。为此, 一个单位冲激信号 $\delta(t)$ 如图 1.10(a) 所示。



图 1.10 单位冲激信号及其近似表示

在冲激信号的近似中, 也可以用其他的一些脉冲信号来描述, 如指数脉冲、三角脉冲、高斯型脉冲等。单位冲激信号的重要特点并不在它的形状, 而是在它的有效持续期(脉冲宽度)趋于零的同时, 它的面积保持为 1。例如如图 1.11(a) 所示的指数脉冲 $\alpha e^{-\alpha t}$, 随着 α 增加会变得越来越高, 越来越窄, 在极限 $\alpha \rightarrow \infty$ 下, 脉冲幅度 $\rightarrow \infty$, 而其宽度或持续期 $\rightarrow 0$ 。然而, 不管 α 值为多少, 这个脉冲下的面积是 1, 因为

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha t} dt = 1 \quad (1.20)$$

图 1.11(b) 和图 1.11(c) 中的脉冲也有类似的特性。显然, 在实际中真正的冲激信号是不能产生的, 它仅仅能够被趋近得到。

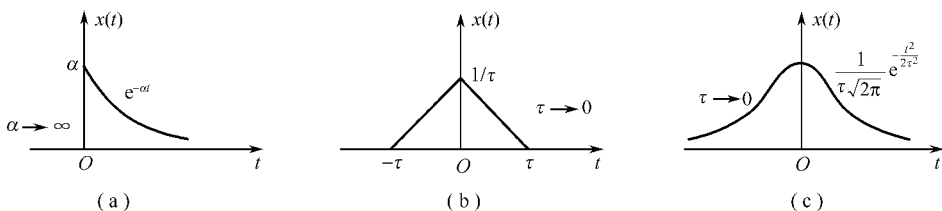


图 1.11 单位冲激信号的其他近似表示

从式(1.19)可得当 $t \neq 0$ 时, $A\delta(t) = 0$ (A 为实数), 而 $t = 0$ 时, 它的面积是 A 。因此, $A\delta(t)$ 是一个面积(又称强度)为 A 的冲激信号。

冲激信号具有如下性质。

1. 时移性质

冲激信号的作用可以出现在任意 t_0 时刻, 以符号 $\delta(t-t_0)$ 表示, 其波形如图 1.12 所示, 其表达式为

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \delta(t-t_0) \rightarrow \infty & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (1.21)$$

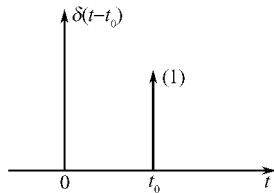


图 1.12 时移的单位冲激信号

2. 筛选特性

考虑当单位冲激函数 $\delta(t)$ 与一个在 $t = 0$ 已经是连续的函数 $x(t)$ 相乘会产生什么结果。因为该冲激函数仅在 $t = 0$ 有非零值, 而 $x(t)$ 在 $t = 0$ 的值是 $x(0)$, 所以可得

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad (1.22)$$

据此, 一个连续时间函数 $x(t)$ 与一个位于 $t = 0$ 的单位冲激函数相乘产生一个冲激, 该冲激产生在 $t = 0$, 面积为 $x(0)$ [即冲激出现处 $x(t)$ 的值]。利用完全相同的证明可将这一结果推广到: 只要 $x(t)$ 在 $t = t_0$ 连续, $x(t)$ 乘以 $\delta(t-t_0)$ (冲激出现在 $t = t_0$) 产生位于 $t = t_0$, 面积为 $x(t_0)$ [$x(t)$ 在冲激发生处的值] 的一个冲激, 即

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \quad (1.23)$$

3. 抽样特性

从式(1.22)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \quad (1.24)$$

只要 $x(t)$ 在 $t = 0$ 连续。这一结果意味着: 一个函数与冲激 $\delta(t)$ 乘积下的面积等于那个函数在单位冲激所在时刻的值。这个性质非常重要, 也很有用, 把它称为单位冲激信号的抽样特性。

从式(1.23)可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \quad (1.25)$$

式(1.25)是抽样特性的另一种形式。冲激 $\delta(t-t_0)$ 位于 $t = t_0$ 时刻发生, 因此, 位于 $x(t)\delta(t-t_0)$ 下的面积是 $x(t_0)$, 这就是 $x(t)$ 在冲激时刻 $t = t_0$ 的值。在这些推导中都已假设函数 $x(t)$ 在冲激所在时刻是连续的。

由式(1.19)给出的单位冲激信号的定义从数学上看是不严谨的。首先, 冲激信号没有定义一个唯一的信号。例如, 可以证明 $\delta(t) + \delta'(t)$ 也满足式(1.19); 其次, $\delta(t)$ 甚至不是一个普通意义下的函数。一个普通函数是由对全部时间 t 的函数值所表征的, 而冲激函数除 $t = 0$ 外, 处处为零, 而就是在这一点, 它的存在范围内的唯一关注的部分却没有定义。将冲激函数定义为广义函数而不是普通函数就能够解决这些问题。一个广义函数是用他对其他函数的作用而

不是在每个时刻的值来定义的。

在这种处理方式中,冲激函数用抽样特性定义。我们不必说冲激函数是什么,或者是它看起来像什么,而是通过它对一个测试函数 $\phi(t)$ 的作用来定义冲激函数。将一个单位冲激函数定义为这样一个函数,它与某一函数 $\phi(t)$ 的乘积下的面积就等于冲激所在时刻函数 $\phi(t)$ 的值。假设 $\phi(t)$ 在冲激出现时刻是连续的。因此,无论是式(1.24)还是式(1.25)都能用作在这种方式下冲激函数的定义。回想一下,抽样特性是式(1.19)定义的结果,而在广义函数中则用抽样特性定义冲激函数。

运用冲激函数的广义函数定义,讨论一个实际应用问题。因为单位阶跃信号 $u(t)$ 在 $t=0$ 处不连续,所以在普通函数定义下,在 $t=0$ 时,它的导数 $\frac{d}{dt}u(t)$ 不存在。现在要说明的是在广义函数意义下,这个导数存在,而且它就是 $\delta(t)$ 。作为证明可以求一下 $\frac{d}{dt}u(t) \cdot \phi(t)$ 的积分,利用分部积分有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}u(t) \cdot \phi(t) dt &= u(t)\phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot \phi'(t) dt \\ &= \phi(\infty) - 0 - \int_0^{\infty} \phi'(t) dt = \phi(\infty) - \phi(t) \Big|_0^{\infty} = \phi(0)\end{aligned}$$

这个结果表明, $\frac{d}{dt}u(t)$ 满足 $\delta(t)$ 的抽样特性,因此在广义函数意义下它就是一个冲激信号 $\delta(t)$,即

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1.26)$$

这样一来就有

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1.27)$$

这些结果也能从图1.10(b)中用图解方法得到。从图1.10(b)中可以看出,若 $t < -\tau/2$,则从 $-\infty$ 到 t , $\delta(t)$ 在 $\tau \rightarrow 0$ 极限形式下的面积是零;若 $t > -\tau/2$, $\tau \rightarrow 0$,其面积为1,即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t) \quad (1.28)$$

这个结果表明:一方面,通过积分,单位冲激信号可以得到单位阶跃信号。同样通过积分,单位阶跃信号可以得到单位斜波信号 $tu(t)$,可以一直做下去。另一方面,也能通过微分由冲激函数派生出高阶冲激信号(见习题1.2-4)。所有从单位冲激信号导出的这些信号(连续求导和积分)统称为奇异信号。

1.2.3 离散时间单位样值信号和单位阶跃信号

1.2.3.1 单位样值信号 $\delta(n)$

离散时间中对应连续时间冲激信号 $\delta(t)$ 的信号是 $\delta(n)$,其定义为

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

这个信号也称为**单位脉冲序列**或**单位冲激序列**,如图 1.13(a) 所示。图 1.13(b) 中画出单位样值信号平移 k 个单位。与其连续时间中的对应信号 $\delta(t)$ 不同, $\delta(n)$ 信号很简单,只是用普通函数描述的。

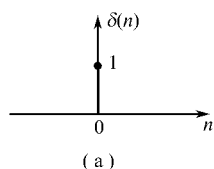
利用 $\delta(n)$ 与 $\delta(n-k)$ 可以定义任意离散信号 $x(n)$ 。例如,图 1.14 所示离散信号 $x(n)$ 的图形可以表示为

$$x(n) = 2\delta(n+2) - \delta(n+1) + 3\delta(n) - \delta(n-1) + 2\delta(n-2)$$

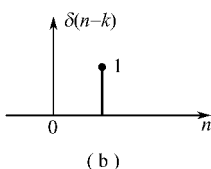
或写成

$$x(n) = x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2)$$

其中 $x(-2) = 2, x(-1) = -1, x(0) = 3, x(1) = -1, x(2) = 2$ 。



(a)



(b)

图 1.13 单位样值信号与其移位信号

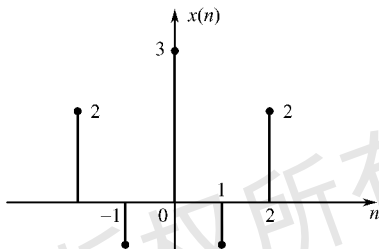


图 1.14 任意离散信号

由此可见对于一个任意信号 $x(n)$ 可利用 $\delta(n)$ 与 $\delta(n-k)$ 表示为

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad (1.30)$$

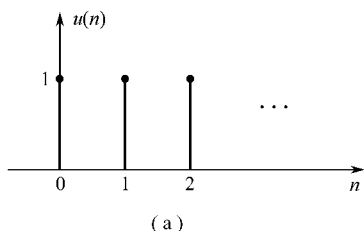
式(1.30)是一个重要的关系式,在以后章节中还会对该式作进一步讨论。

1.2.3.2 单位阶跃序列 $u(n)$

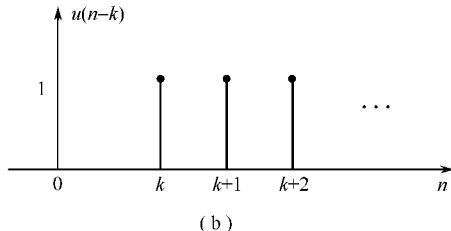
离散时间中对应于单位阶跃信号 $u(t)$ 的信号为 $u(n)$,其定义为

$$u(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \text{ 的整数} \\ 1 & n \geq 0 \text{ 的整数} \end{cases} \quad (1.31)$$

如图 1.15(a) 所示。图 1.15(b) 中画出平移 k 个单位的单位阶跃序列 $u(n-k)$ 。 $u(n)$ 类似于连续信号 $u(t)$,但应注意 $u(n)$ 在 $n=0$ 时明确取值为 1。



(a)



(b)

图 1.15 单位阶跃序列与其移位信号

观察 $\delta(n)$ 序列与 $u(n)$ 序列的定义式,可以看出两者之间存在如下的关系:

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots \quad (1.32)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.33)$$

同样单位阶跃序列 $u(n)$ 也具有单边特性,利用这一特性也可表示各种单边序列,或者组合成其他一些基本序列。例如,一般的单边序列可以表示为 $x(n)u(n)$;图 1.16 所示的常用门序列(又称矩形序列或窗函数),可用 $u(n)$ 表示为

$$G_4(n) = u(n) - u(n-4) \quad (1.34)$$

在连续时间系统中,单位冲激信号 $\delta(t)$ 与单位阶跃信号 $u(t)$ 之间的关系是用微 / 积分关系来描述的,而在离散系统中,单位样值信号 $\delta(n)$ 与单位阶跃序列 $u(n)$ 之间的关系是用差分 / 累加关系来描述的。

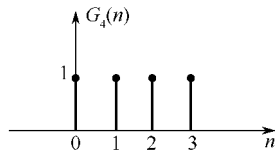


图 1.16 用阶跃序列表示的门序列

1.2.4 离散时间复指数信号

离散时间指数信号可表示为

$$x(n) = z^n \quad (1.35)$$

其中 z 为复数。式(1.35)也可用极坐标表示,即 $z^n = (re^{j\Omega})^n$, r 为模, Ω 为辐角。离散时间指数信号 z^n 与连续时间指数 e^{st} 相对应,两者之间的对应关系为

$$e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t}$$

令 $t = nT$ 有

$$e^{(\sigma + j\omega)nT} = e^{(\sigma T + j\omega T)n} = e^{\sigma T n} e^{j\omega T n}$$

而 $z^n = (re^{j\Omega})^n = r^n e^{j\Omega n}$, 故可得

$$r = e^{\sigma T} \quad \Omega = \omega T \quad (1.36)$$

对于每一个复数 z , 都唯一对应复平面(实部为横轴,虚部为纵轴)上一点,该复平面又称为 z 平面,由式(1.36)可得 s 平面与 z 平面有如下的映射关系:

(1) s 平面的虚轴($\sigma = 0, s = j\omega$)映射到 z 平面上,是一个单位圆, $|z| = r = 1$ 。显然由于 $\sigma = 0, |z| = r = e^{0T} = 1$, 而 Ω 是任意的。

(2) s 平面的左半开平面(不含虚轴),即 $\text{Re}[s] = \sigma < 0$, 映射到 z 平面是单位圆内。显然由于 $\sigma < 0, |z| = r = e^{\sigma T} < 1$, 而 Ω 是任意的。

(3) s 平面的右半开平面(不含虚轴),即 $\text{Re}[s] = \sigma > 0$, 映射到 z 平面是单位圆外。

(4) s 平面的实轴,即 $\omega = 0, s = \sigma$, 映射到 z 平面是正实轴。显然由于 $\omega = 0, \Omega = 2k\pi$, 而 $|z| = r = e^{\sigma T}$, σ 变化 z 沿正实轴变化。

(5) s 平面的原点,即 $\sigma = 0, \omega = 0$, 映射到 z 平面是 $z = 1$ 。

(6) 从 z 平面到 s 平面的变换是一个多值变换。在 z 平面上的一个已知点,相应于在 s 平面上无限多点,在 s 平面 ω 从 $-\pi/T$ 增长到 π/T , 则在 z 平面中 Ω 从 $-\pi$ 增长到 $+\pi$, 即辐角旋转一周映射了整个 z 平面。所以每当 ω 增加 $\omega_s = 2\pi/T$, (σ 是任意的), 在 z 平面中 Ω 就相应增加 2π , 也即重复旋转一周, z 平面重叠一次。这种多值函数的映射关系,可以想象为将 s 平面裁成一条条宽为 ω_s 的“横带”,这些横带相互重叠地映射到整个 z 平面。例如在 z 平面 $z = 1$ 这一点,由于

$$z = e^{sT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j(\omega \pm \frac{2k\pi}{T})T} = 1, k \text{ 为整数}$$

则在 s 平面上, $\sigma = 0, \omega = \pm \frac{2k\pi}{T}$ 都满足 $z = 1$ 。

图 1.17 示出了 s 平面与 z 平面之间的映射关系。当 z 取不同值时可由 z^n 派生出离散时间实指数信号和离散时间正弦信号等。

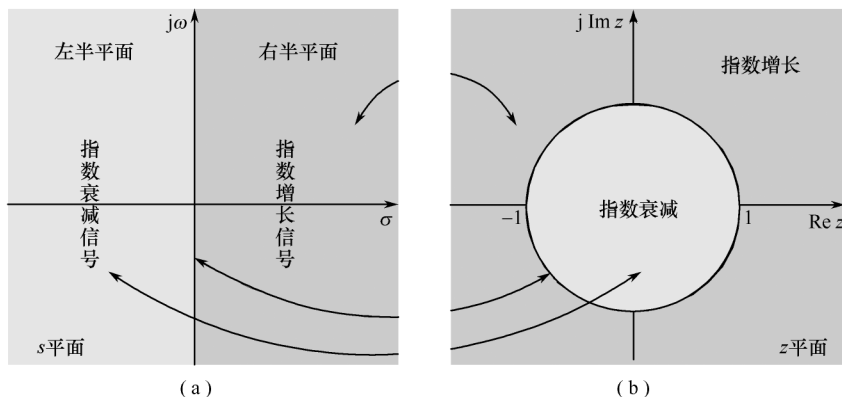


图 1.17 s 平面、 z 平面及它们之间的映射

1.2.4.1 离散时间实指数信号

当 $\Omega = 0$, 由式(1.35) 可得离散时间实指数信号

$$x(n) = r^n \quad (1.37)$$

式中 r 是实数, r 参数对信号波形的影响如图 1.18 所示。当 $|r| > 1$ 时, 信号是增长的, 如图 1.18(a) 和(c) 所示; 当 $|r| < 1$ 时, 信号是衰减的, 如图 1.18(b) 和(d) 所示; 当 $r < 0$ 时, 信号交替改变正负值(n 为偶数时为正, n 为奇数时为负), 如图 1.18(c) 和(d) 所示。

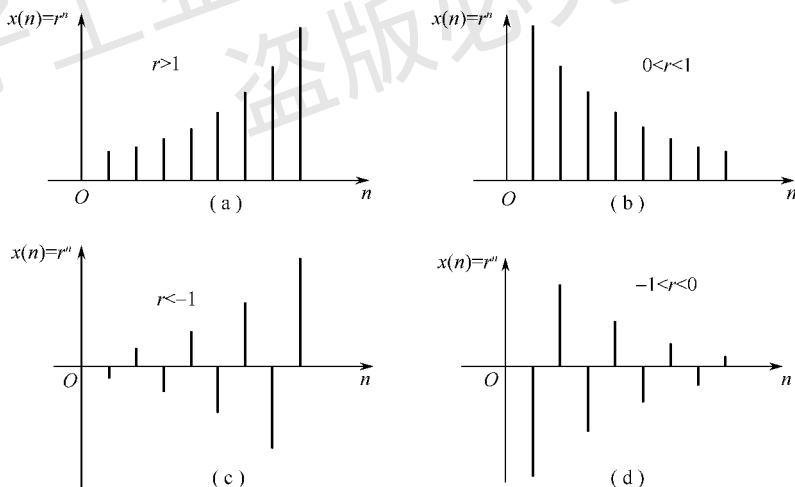


图 1.18 离散时间复指数信号

1.2.4.2 离散时间正弦信号

对式(1.35) 所示的离散时间复指数信号, 取其实部或虚部可得离散时间正弦信号。离散时间正弦信号的一般形式为

$$x(n) = A \cos(\Omega n + \theta) \quad (1.38)$$

式中 A 为幅度, θ 是以弧度值表示的相位。同样, Ω 是角度的弧度值。因此 Ω 的量纲为每样本弧

度。这个正弦也可以表示为

$$A\cos(\Omega n + \theta) = A\cos(2\pi f n + \theta)$$

其中 $f = \Omega/2\pi$ 。因此,离散时间频率 f 的量纲为每样本的弧度值 $/2\pi$,即等价于每样本的周期数。这就意味,若 N 为正弦的周期(样本数/周期),则正弦的频率 $f = 1/N$ (周期数/每样本)。

图 1.19 示出了一个离散时间正弦信号 $\cos(n\pi/4)$ 。此时,角频率 $\Omega = \pi/4$ 弧度/每样本,或者 $f = 1/8$ 周期数/每样本,也就是说,正弦的一个周期中有 8 个样本。

对一个连续时间正弦抽样可得到离散时间正弦。例如对一个连续时间正弦 $\cos\omega t$ 每隔 T 秒抽样得到一个离散时间序列,它的第 n 个序列($t = nT$)是 $\cos\omega nT$ 。因此,抽样所得信号 $x(n)$ 给出为

$$x(n) = \cos\omega nT = \cos\Omega n$$

式中 $\Omega = \omega T$ 。

从上面讨论看,离散时间正弦似乎与连续时间正弦并无异样。然而,离散时间正弦的一些性质确与连续时间正弦十分不同。例如,并不是所有离散时间正弦信号都是周期的;一个正弦 $\cos\Omega n$ 仅当 Ω 是 2π 的有理数倍时才是周期的。另外,离散时间正弦带宽限制于 $\Omega = \pi$ 。任何 $\Omega \geq \pi$ 的正弦总可以表示为某个角频率 $\Omega \leq \pi$ 的正弦,这些特殊的性质直接来自离散时间正弦的周期必须是整数这一事实。这个问题在第 7 章还将进一步讨论。

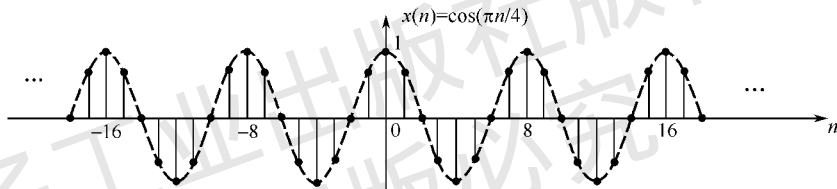


图 1.19 离散时间正弦信号

1.3 信号时域运算

当对信号进行合成、抽样、调制等处理时,往往需要进行信号运算,它包括信号的翻转、展缩、平移、微分、积分,以及信号的相加或相乘。某些物理器件可直接实现这些功能,例如,加法器可对几个同时输入的信号进行相加运算;微分器和积分器是分别对信号进行微分和积分运算的器件。然而对于一些信号的复杂处理,实际上是上述基本运算的综合结果,因此,我们有必要熟悉在运算过程中信号解析表达式对应的波形变化,并初步了解这些运算的物理背景。

信号的基本运算可大致分为两类:一类是直接对信号进行加、乘、微分、积分等数学运算;另一类是对信号中的自变量进行置换。在信号与系统分析中,后一类运算有着重要的应用价值,本书重点讨论这一类信号运算。

1.3.1 信号的和、积运算

信号和与积运算是指信号相加与相乘。这类运算较为简单。需要注意的是,必须将同一瞬间的两个函数值相加或相乘。

信号的和与积运算有着实在的物理意义。在图 1.20 中,将 $x(t)$ 视为缓慢波动的信道噪声,

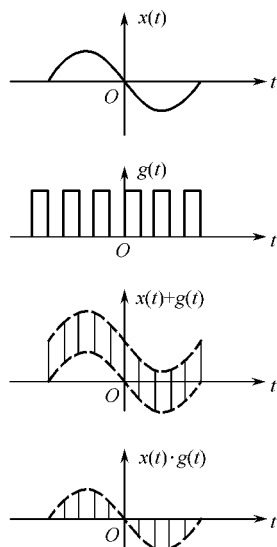


图 1.20 信号的相乘与相加

1.3.2 信号的积分与微分运算

对连续时间信号 $x(t)$ 的积分运算 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ [记作 $x^{(-1)}(t)$] 产生另一个连续时间信号,它在任意时刻 t 的取值是从 $-\infty \sim t$ 时间内 $x(t)$ 的波形图与时间轴所包围的面积。

对连续时间信号 $x(t)$ 的微分运算 $\frac{d}{dt}x(t)$ [记作 $x'(t)$] 也是一个连续时间信号,表示信号随时间的变化率。图 1.12(a)、(b) 分别画出了两个信号的积分和微分波形。

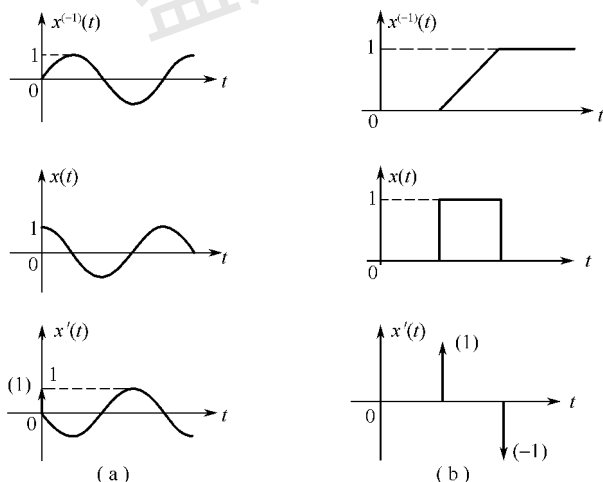


图 1.21 信号的积分与微分

由于引入了奇异信号的概念,不仅普通连续时间信号可以微分,具有第一类间断点的信号也可以微分,它们在间断点的一阶微分是一个冲激,面积为原信号在该时刻的跃变增量,而它们在其他连续区间的微分就是常规意义上的导数。

$g(t)$ 视为要传输的数字信号,则 $x(t) + g(t)$ 表示了实际发送的数字信号, $x(t) \cdot g(t)$ 表示了信道噪声 $x(t)$ 的抽样输出信号。

利用和运算,可以将一些复杂的信号化为有限或无限个简单信号的加权组合,从而便于处理和分析。应用乘运算,可以将一个信号分解成若干因子的乘积。

【例 1.3.1】 (1) $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} = |t| \cdot \frac{1}{t}$

(2) $n \left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) = [nu(n)] \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n u(n) \right]$

(3) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$

(4) $x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$

【例 1.3.2】 求如图 1.22(a) 所示信号 $x(t)$ 的微分信号。

$$x(t) = \begin{cases} t & t \in [0, 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

解: 由于 $t=1$ 是 $x(t)$ 的间断点, 故 $x'(t)$ 在 $t=1$ 处应出现一个冲激, 由于 $x(1^-) = 1$, $x(1^+) = 0$, 冲激的面积为 $x(1^+) - x(1^-) = -1$, 因此有

$$x'(t) = g(t) - \delta(t-1)$$

波形图如图 1.22(b) 所示。

其中

$$g(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在离散信号中, 对应于微积分运算的是离散信号的差分与求和, 这两种运算的定义分别为

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1.39)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.40)$$

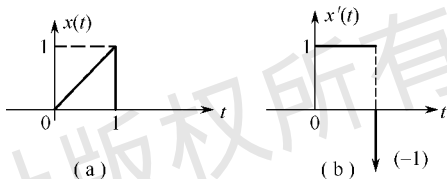


图 1.22 例 1.3.2 的波形图

同连续信号中微分和积分的关系一样, 只有当 $x(n)$ 在 $n=-\infty$ 等于 0 时, 差分运算与求和运算才互为逆运算。例如, 序列 $u(n)$ 与 $\delta(n)$ 之间的差分、求和运算就是一对逆运算, 即

$$\delta(n) = \nabla u(n) = u(n) - u(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

上述两关系式在 1.2.3 节已证明, 可参阅。

1.3.3 信号波形的翻转、展缩与平移

在变换、分析等信号处理中, 常用到三种信号运算: 平移、展缩和翻转。因为在我们的信号描述中自变量是时间, 所以讨论的这些运算又称为时移、时间展缩和时间翻转。不过, 这节讨论的结论对于不是以时间为自变量(如频率)的函数也同样成立。

1.3.3.1 时移

信号的时移运算就是将信号 $x(t)$ 转换为 $x(t+T)$ 的过程, 即 $x(t) \rightarrow x(t+T)$ 。信号可以沿时间轴左移或右移。当 $T > 0$ 时, 信号波形图左移; 当 $T < 0$ 时, 信号波形图右移。

【例 1.3.3】 试画出图 1.23(a) 所示信号 $x(t) = e^{-5t}$ 延时 1 秒及超前 1 秒的波形图。

解: 根据信号的时移运算, 延时 1 秒, 即可将原信号 $x(t)$ 向右移 1 秒, 得 $x(t-1)$, 波形图如图 1.23(b) 所示; 超前 1 秒, 即可将原信号 $x(t)$ 向左移 1 秒, 得 $x(t+1)$, 波形图如图 1.23(c) 所示。

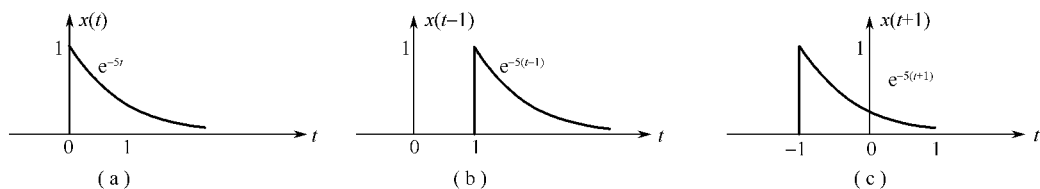


图 1.23 例 1.3.3 的波形图

1.3.3.2 时间展缩

信号时间展缩运算(又称为时间尺度变换)就是将信号 $x(t)$ 转换成新的信号 $x(at)$, 即 $x(t) \rightarrow x(at)$, 其中 a 为不为零的实数, 称为展缩系数。若 $|a| > 1$, 则将 $x(t)$ 的波形压缩到 $1/|a|$ 倍, 即得到 $x(at)$ 的波形; 若 $|a| < 1$, 则将 $x(t)$ 的波形扩展到 $1/|a|$ 倍, 即得到 $x(at)$ 的波形。

【例 1.3.4】 试画出图 1.24(a) 所示信号 $x(t)$ 的展/缩信号 $x(2t)$ 和 $x(t/2)$ 的波形图。

解: 以新的自变量 $2t$ 代替 $x(t)$ 中的变量, 此时展缩系数 $a = 2$, 因此所得 $x(2t)$ 的波形图是将原信号 $x(t)$ 波形沿时间轴 t 压缩 $1/2$ 倍, 如图 1.24(b) 所示; 同理, 以新的自变量 $t/2$ 代替 $x(t)$ 中的变量, 此时展缩系数 $a = 1/2$, 因此所得 $x(t/2)$ 的波形图是将原信号 $x(t)$ 波形沿时间轴 t 扩展 2 倍, 如图 1.24(c) 所示。

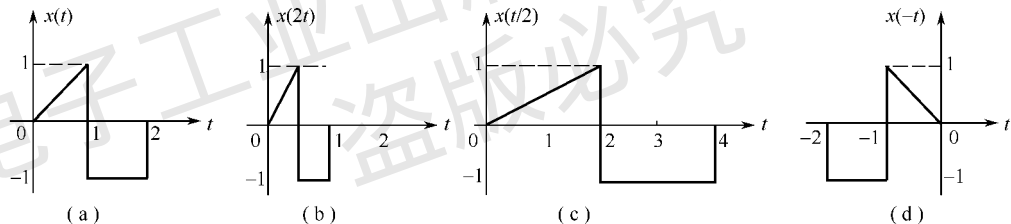


图 1.24 例 1.3.4 的波形图

1.3.3.3 时间翻转

信号翻转运算就是将信号 $x(t)$ 转换成新的信号 $x(-t)$ 的过程, 或者说是信号展缩运算 $x(at)$ 中 $a = -1$ 时的特例。其实质就是将原信号 $x(t)$ 的波形相对于纵轴作翻转。图 1.24(a) 中 $x(t)$ 翻转后的 $x(-t)$ 波形如图 1.24(d) 所示。

以上讨论的都是信号基本单元运算。在有些复杂的运算中需要同时应用几种基本运算。涉及全部三种基本单元运算的最一般运算是 $x(at + b)$ 。在同时含有信号的多种运算时, 与信号基本运算顺序无关, 每一步骤只参与一种基本运算, 逐步完成。

【例 1.3.5】 已知 $x(t)$ 的波形如图 1.25(a) 所示, 试画出 $x(3 - 2t)$ 的波形图。

解: 本例题包含信号的三种基本运算, 在这三种运算中可以看到最终结果将与运算先后顺序无关。下面将采用两种不同运算过程进行讨论。

第一种情况: 由 $x(t) \rightarrow x(2t) \rightarrow x(-2t) \rightarrow x(3 - 2t)$, 即对原信号先进行压缩, 再进行翻转和右移, 结果分别如图 1.25(b)、(c) 和 (d) 所示。

$$x(t) \xrightarrow{\text{波形压缩为 } 1/2} x(2t) \xrightarrow{\text{波形翻转}} x(-2t) \xrightarrow{\text{波形右移 } 3/2} x(3-2t)$$

第二种情况:由 $x(t) \rightarrow x(t-3) \rightarrow x(2t-3) \rightarrow x(3-2t)$, 即对原信号先进行右移, 再进行压缩和翻转, 结果分别如图 1.25(e)、(f) 和 (g) 所示。

显然对信号进行两种不同顺序的操作过程, 并不影响最后的结果, 这说明对信号同时进行多种运算时, 与信号运算顺序无关。

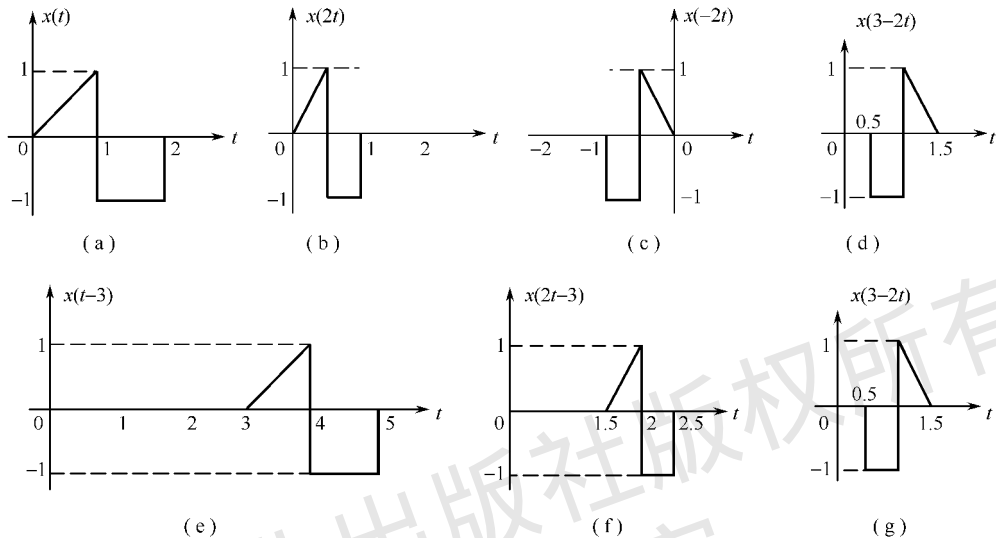


图 1.25 例 1.3.5 的波形图

信号的翻转、展缩与平移同样适用于离散信号, 其中, 翻转和平移的方法与连续信号相同, 而展缩变换确有所不同, 其原因在于离散信号中的自变量 n 只能取整数。例如, 在图 1.26 中, 我们分别画出了某一离散信号 $x(n)$ 及其经过展缩变换后得到的 $x(2n)$ 、 $x(n/2)$ 的波形, 从图上可见, 与连续信号的展缩变换相比, $x(2n)$ 并不是 $x(n)$ 经过时间轴压缩 1/2 的结果, 而是从 $x(n)$ 中抽取 n 为偶数的样点值构成; $x(n/2)$ 也不是 $x(n)$ 经过时间轴上扩展 2 倍后的结果, 而是由 $x(n)$ 中 n 处样点值变成 $2n$ 处样点值构成的。一般来讲, 当 $a > 1$ 且为整数时, $x(an)$ 是由 $x(n)$ 中抽取 n 为 a 的整数倍的一些样点值 (包括 $n=0$) 组成; $x(n/a)$ 是由 $x(n)$ 中 n 处样点值变为 $a \cdot n$ 处的一些样点值 (包括 $n=0$) 组成。

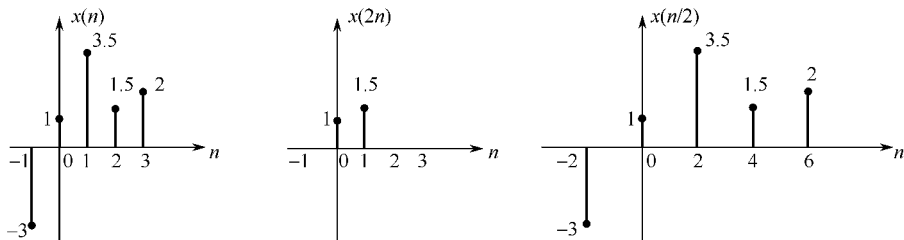


图 1.26 $x(n)$ 及其 $x(2n)$ 和 $x(n/2)$ 的波形

信号的运算和变换不仅存在于时域中, 而且还存在于频域中。更重要的是, 如果某个信号在时域中进行了某种运算或变换, 则这种运算或变换一定会在频域的相应信号中有所反映; 反之亦然, 如果信号在频域中进行了某种运算或变换, 则其在时域中的相应信号也一定会有所反映。关于这方面的内容将在后续章节中详细讨论。

1.3.4 信号的分解

在对信号进行分析和处理时,常常将信号分解成基本信号分量之和。这种分解可以按信号的时间函数进行分解,也可以按信号的不同频率进行分解,或按照其他方式进行分解。下面我们讨论信号分解的几种方法。

1.3.4.1 信号分解为奇信号与偶信号之和

一连续信号 $x(t)$ 可以分解为偶分量 $x_e(t)$ 和奇分量 $x_o(t)$ 之和,即

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (1.41)$$

由式(1.41)和式(1.9)可得下列关系式:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (1.42)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (1.43)$$

【例 1.3.6】 已知信号 $x(t)$ 波形如图 1.27(a) 所示,画出 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$ 的波形图。

解: 由式(1.42)和式(1.43)可知,要想求出 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$,必须先求出信号 $x(t)$ 的翻转信号 $x(-t)$,如图 1.27(b) 所示,再进一步做 $x(t)$ 和 $x(-t)$ 代数相加减的运算,即可得,如图 1.27(c)、(d) 所示。

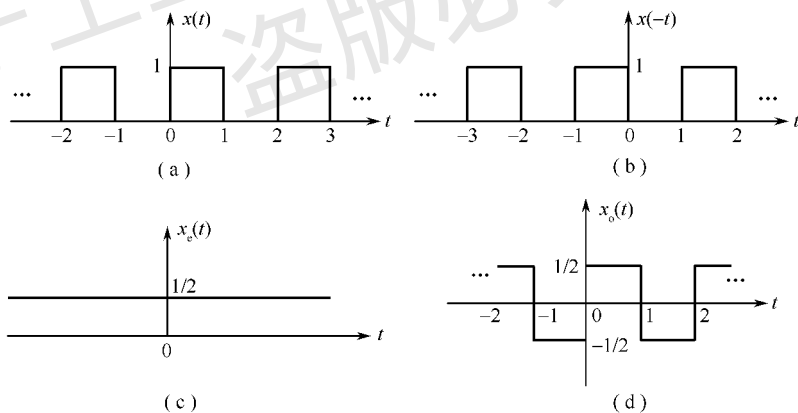


图 1.27 例 1.3.6 的波形图

1.3.4.2 信号分解为基本信号的有限项之和

1.2 节所讨论过的常用信号,在信号分析中有专门的分析研究。若将信号分解成它们的有限项和式,则信号本身的分析结果也就基本清楚了,我们以几个例子来对这种分解情况进行说明。

如图 1.28 所示信号 $x_a(t)$,可分解为

$$x_a(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-2)$$

单位三角信号:

$$x_b(t) = \Lambda_2(t) = (t+1)u(t+1) - 2tu(t) + (t-1)u(t-1)$$

单位门信号:

$$G_\tau(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$x_d(t) = 2u(t) - 1$$

$x_d(t)$ 又常记为 $\text{sgn}(t)$, 称为符号函数, 其定义是

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

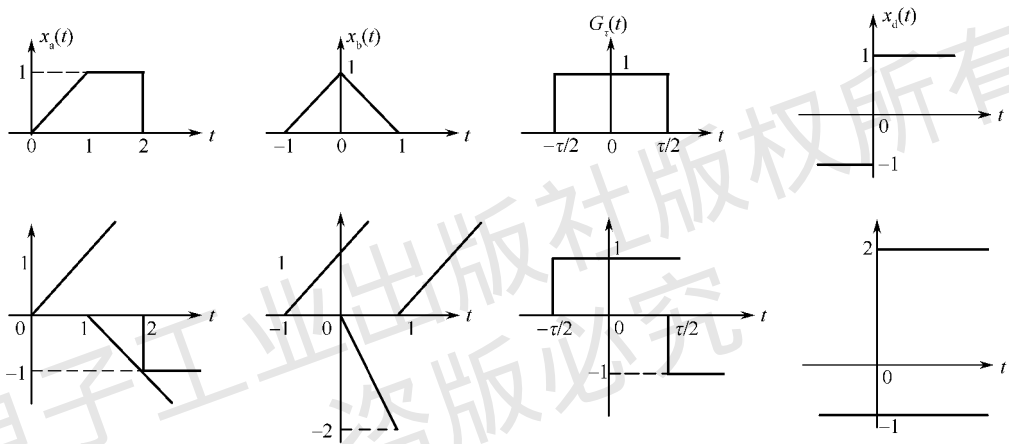


图 1.28 信号分解为有限个典型信号之和

1.3.4.3 信号的因子分解

将信号分解成若干因子的乘积, 这在第 3 章中求信号的频谱时会经常用到。由信号的表达式作因子分解是比较容易的, 比如符号函数可以分解成两个信号 $|t|$ 和 $1/t$ 的积, 即

$$\text{sgn}(t) = |t| \cdot \frac{1}{t}$$

又如

$$te^{-t}u(t) = tu(t) \cdot e^{-t}u(t)$$

$$e^{-t}\sin(t)u(t) = e^{-t}u(t) \cdot \sin(t)$$

等。

图 1.29 示出了对信号的波形图作信号因子分解的例子。

$$x_a(t) = \Lambda_{2\tau}(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$x_b(t) = \Lambda_{2\tau}(t) \cdot P_T(t)$$

其中 $P_T(t)$ 表示周期为 T 的对称方波串。

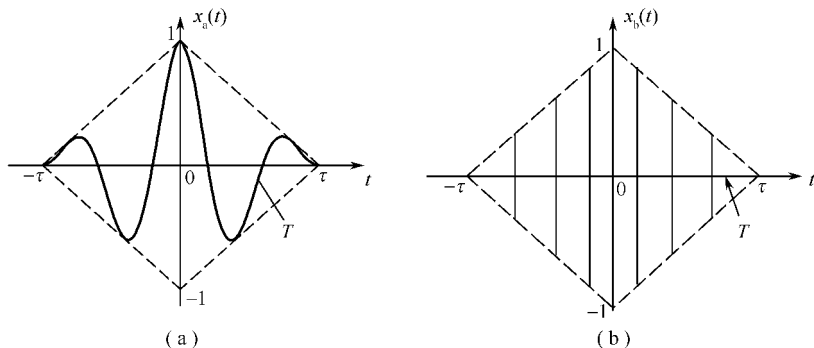
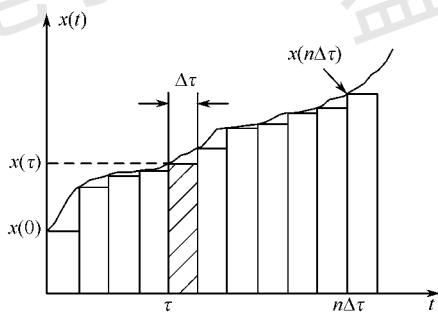


图 1.29 信号的因子分解

1.3.4.4 信号分解成矩形脉冲序列

任一连续信号 $x(t)$ 可以分解成一系列矩形窄脉冲,如图 1.30 所示,将时间坐标分成许多相等的时间间隔 $\Delta\tau$,则从零时刻起第一个脉冲为 $x(0)[u(t) - u(t - \Delta\tau)]$,第二个脉冲为 $x(\Delta\tau)[u(t - \Delta\tau) - u(t - 2\Delta\tau)]$,...,将这一系列矩形脉冲相叠加,得

$$\begin{aligned}
 x(t) &\approx \cdots + x(0)[u(t) - u(t - \Delta\tau)] + x(\Delta\tau)[u(t - \Delta\tau) - u(t - 2\Delta\tau)] + \cdots \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \{u(t - n\Delta\tau) - u[t - (n+1)\Delta\tau]\} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \frac{u(t - n\Delta\tau) - u[t - (n+1)\Delta\tau]}{\Delta\tau} \Delta\tau
 \end{aligned} \quad (1.45)$$

图 1.30 用矩形脉冲逼近信号 $x(t)$

在 $\Delta\tau \rightarrow 0$ 的极限情况下, $\Delta\tau$ 变为 $d\tau$, $n\Delta\tau$ 变为 τ , 而式(1.45)则变成

$$x(t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta\tau) \delta(t - n\Delta\tau) \Delta\tau$$

即为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (1.46)$$

式(1.45)表明,时域里任一信号可近似地分解为一系列矩形窄脉冲之和。式(1.46)表明,当上述矩形脉冲的脉宽趋于无限小时,信号可

分解成无数冲激信号的叠加,这种分解方法在后面几节中还将详细讨论。

1.3.4.5 信号分解成正交信号分量之和

连续信号可分解成一系列正交分量之和。例如,一个对称矩形脉冲信号可以用各次谐波的正弦与余弦信号的叠加来近似表示,如图 1.31 所示。各次谐波的正弦、余弦信号就是此矩形脉冲信号的正交分量。有关信号分解为正交分量的理论方法在第 3 章中详细讨论。

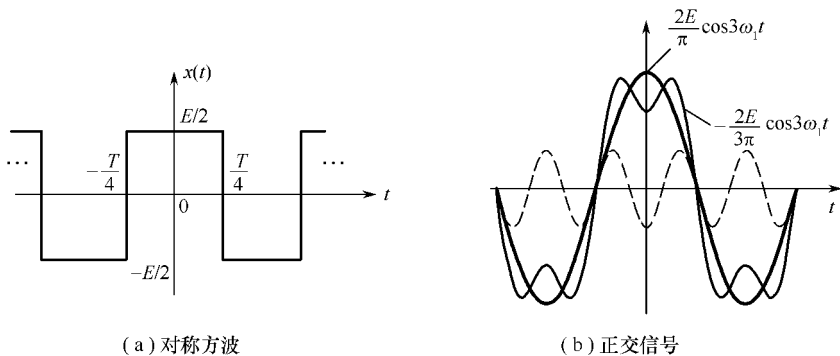


图 1.31 信号分解为一系列正交分量之和

1.4 系统及其表示

1.4.1 系统

要产生信号,要对信号进行存储、转化、传输和处理,需要一定的物理装置,这样的物理装置称为信号系统,简称系统。因而我们研究的系统可看作信号变换器,对输入信号经过某种变换以后得到输出信号,其目的是消弱信号中的多余内容,滤除噪声和干扰,或者将信号变换成容易分析和识别的形式,便于估计和选择其特征参数。与连续时间信号和离散时间信号相对应,系统也分为连续时间系统和离散时间系统,前者将连续时间输入信号变换为连续时间输出信号;后者将离散时间输入信号变换为离散时间输出信号。本书将分别但并行地讨论这两种系统,以便读者可以借助对一种系统的透彻了解来理解另一种系统。

1.4.2 系统的表示

对系统进行表示,就是对系统的输入信号与输出信号间的关系进行表示,这是系统分析的第一步。如果只对系统的端口特性(外部特性)进行分析,可以用一个方框图代表系统,如图 1.32 所示。

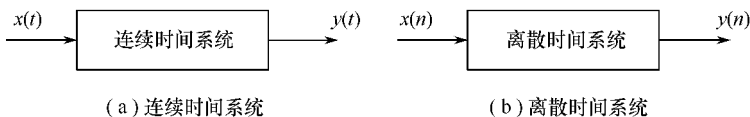


图 1.32 系统方框图

图中 $x(t)$ 和 $x(n)$ 分别代表连续时间系统和离散时间系统的输入信号(又称激励), $y(t)$ 和 $y(n)$ 分别代表连续时间系统和离散时间系统的输出信号(又称响应)。对于单输入 - 单输出系统又可表示为

$$y(t) = T[x(t)] \quad \text{或} \quad y(n) = T[x(n)]$$

其意义是,如果给系统输入信号 $x(t)$ 或 $x(n)$ 作为激励,系统将输出信号 $y(t)$ 或 $y(n)$ 作为响应。也可将系统的输入与输出关系用一个箭头表示出来,这是最直观表示方法

$$x(t) \rightarrow y(t) \quad \text{或} \quad x(n) \rightarrow y(n)$$

以上系统的表示法是系统输入与输出关系的一般表示,并未具体指明系统激励与响应关系究竟怎样,为了进行具体深入地系统分析,常常采用两种方式来表示:数学方程式(微积分方程或代数方程或差分方程)和系统模拟框图来表示。

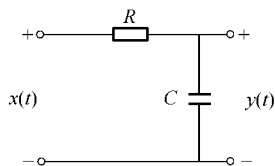


图 1.33 一阶 RC 电路

在电路分析中,曾研究过如图 1.33 所示的一阶 RC 电路,其中 $x(t)$ 是激励信号, $y(t)$ 是电容器两端的电压,以此为系统的输出信号。描述该系统的一阶微分方程为

$$RC \frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t) \quad (1.47)$$

电容器和电感器的端口方程都可以用微分或积分形式来表示,因此可用积分器来模拟储能元件。而电阻元件的端口方程是代数形式,因此电阻器可以用倍乘器来模拟。现将系统模拟中常用的几种基本运算器的符号及其运算关系列于图 1.34 中。

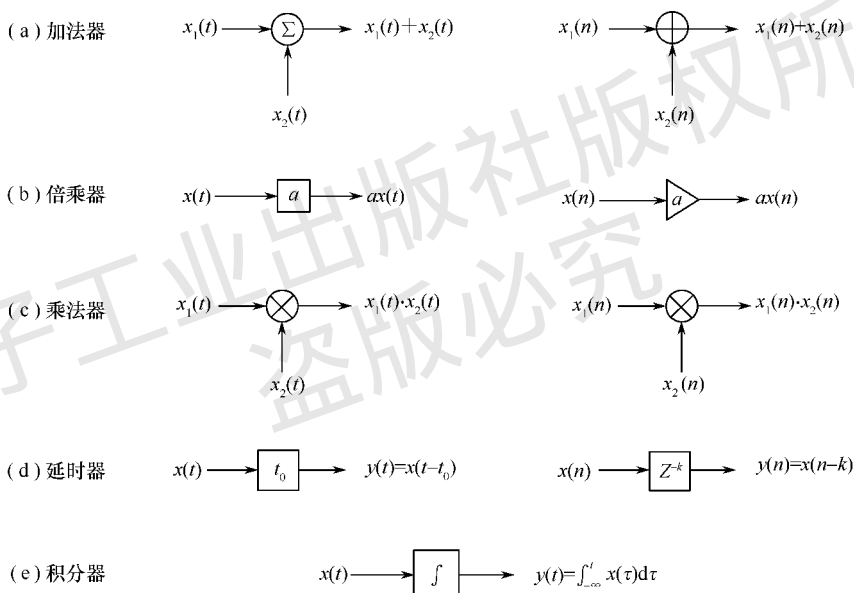


图 1.34 系统模拟的基本运算器

将式(1.47)两边积分得

$$y(t) + \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

经整理得

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t [x(\tau) - y(\tau)] d\tau$$

由上式可画出该系统的模拟框图,如图 1.35 所示。

一个系统往往由若干子系统组成。子系统之间的连接有串连(级联)和并联两种基本形式,如图 1.36 所示。

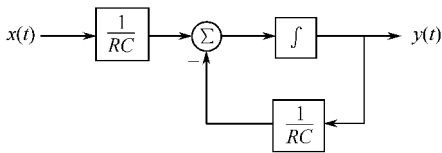
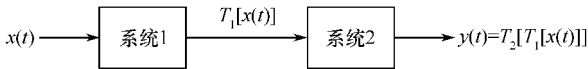
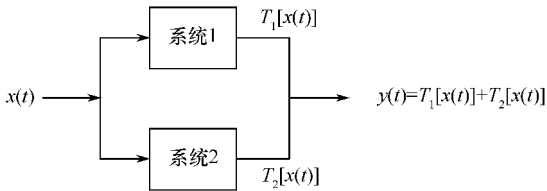


图 1.35 一阶 RC 系统模拟框图



(a) 两个子系统级联



(b) 两个子系统并联

图 1.36 系统连接的两种形式

1.5 系统的分类

1.5.1 因果与非因果系统

在实际的物理系统中,激励是产生响应的原因,响应是激励引起的后果,这种性质称为系统的因果性。响应不出现于激励之前的系统称为**因果系统**或**物理可实现系统**,否则称为**非因果系统**或**物理不可实现系统**。具体地说,因果系统在任何瞬时的输出响应与未来的输入无关,只与当前或以前时刻的输入有关;非因果系统的响应可以领先于输入,即输出响应还与未来的输入有关。例如,由方程 $y(t) = x(t-1)$ 和 $y(n) = x(n) - x(n-1)$ 所代表的系统都是因果系统,而由方程 $y(t) = x(t+1)$ 和 $y(n) = x(n) - x(n+1)$ 所代表的系统都是非因果系统。

一般而言,实际运行的系统都是因果系统,不满足因果规律的非因果系统在实际中是不存在的,但对它的研究有理论意义。

1.5.2 连续与离散系统

连续时间系统是指激励和响应都是连续时间变量 t 的函数,即能够将一种连续信号转换成另一种连续信号的数学模型。这种数学模型就是微分方程,如模拟通信系统。

离散时间系统是指激励和响应都是离散时间变量 n 的函数,即能够将一种离散信号转换成另一种离散信号的数学模型。而这种数学模型就是差分方程,如数字计算机系统。

对于连续系统和离散系统,在分析方法和分析思路方面,有很多类似可比之处,故在学习中采用对照两种系统的学习方法有利于记忆和理解。

1.5.3 有记忆系统与无记忆系统

如果系统的输出只与当前时刻的输入有关,系统就称为**无记忆系统**。纯电阻电路就是一个无记忆系统,又称**即时系统**。

如果系统的输出不仅与当前时刻的输入有关,而且还与它过去的工作状态有关,系统就称为**有记忆系统**,又称**动态系统**。含有记忆元件(电容器、电感、磁芯、寄存器、存储器等)的系统都是有记忆系统。

例如方程 $y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ 和 $y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$ 代表的系统都是有记忆系统。有记忆系统的数学模型是微分方程或差分方程。

1.5.4 时不变系统与时变系统

时不变系统的参数不随时间而变化。描述这种系统的数学模型是常系数微分方程或常系数差分方程。

时不变系统有一个很重要的特性,它能对于一个有时移的输入信号,产生一个与之相应的时移输出信号,即

$$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \quad (1.48)$$

或

$$x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0) \quad (1.49)$$

其中 t_0, n_0 是实常数,可正可负。

由此可知,只要初始状态不变,时不变系统的响应形式仅取决于输入信号形式,而与输入信号的时间起点无关。图 1.37 是一个时不变连续系统的示意图。

时不变系统的另一特性是描述其系统的参数不随时间而变化。例如图 1.38 所示系统,电阻 $R(t)$ 是时变电阻,输入信号为电压源 $x(t)$,输出为回路电流 $i(t)$,该系统可用下列微分方程来描述该系统,即

$$L \frac{di(t)}{dt} + R(t)i(t) = x(t) \quad (1.50)$$

式(1.50)清楚地表明了时变系统的数学模型是变系数微分方程。因而对于时不变系统可用常系数微分方程来描述。

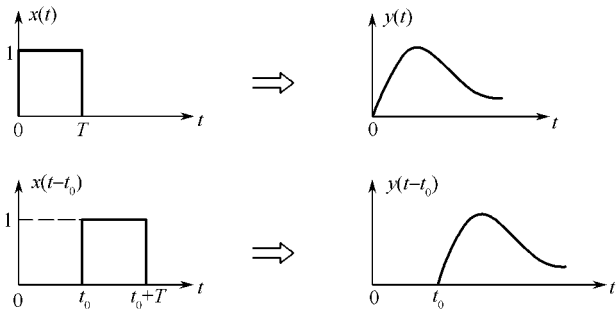


图 1.37 时不变连续系统示意图

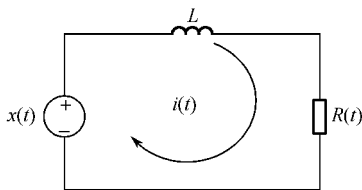


图 1.38 时变系统

同样,对时不变离散系统可用常系数差分方程来描述。

1.5.5 线性与非线性系统

设某系统的激励 $x(t)$ 与其响应 $y(t)$ 之间关系表示为

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

如果激励增大 a 倍,则其响应也增大 a 倍,即

$$ax(t) \rightarrow ay(t) \quad (1.51)$$

式(1.51)说明系统满足齐次性。

如果

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

则

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t) \quad (1.52)$$

式(1.52)说明系统满足可加性。

由式(1.51)和式(1.52)可以定义:既满足齐次性又满足可加性的系统称为线性系统,即如果

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

则

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t) \quad (1.53)$$

式中 a_1, a_2 为任意实常数。

类似的,对离散时间系统,线性性质的定义为

如果

$$x_1(n) \rightarrow y_1(n), x_2(n) \rightarrow y_2(n)$$

则

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \rightarrow a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \quad (1.54)$$

式中, a_1, a_2 为任意实常数。

具有上述线性性质的系统称为线性系统。否则,称为非线性系统。

对于动态系统,其响应不仅决定于系统的激励 $x(t)$,而且与系统的初始状态 $y(t_0)$ 有关。可以将初始状态看作是系统的另一种激励。这样,根据线性性质,线性系统的响应可理解外加输入信号 $x(t)$ 与初始状态 $y(t_0)$ 单独作用所引起的响应之和。

若令外加输入信号为零,由初始状态 $y(t_0)$ 引起的响应,称为零输入响应,记作 $y_{zi}(t)$,即

$$y(t_0), x(t) = 0 \rightarrow y_{zi}(t) \quad (1.55)$$

若令初始状态为零,由外加输入信号 $x(t)$ 引起的响应,称为零状态响应,记作 $y_{zs}(t)$,即

$$y(t_0) = 0, x(t) \rightarrow y_{zs}(t) \quad (1.56)$$

若系统的响应是由外加输入信号 $x(t)$ 和初始状态 $y(t_0)$ 共同作用产生的,称为系统的全响应,记作 $y(t)$,即

$$y(t_0), x(t) \rightarrow y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (1.57)$$

线性系统这一性质,即可以把由初始状态和外加输入信号引起的响应分开,可称为**分解特性**。单凭分解特性还不足以判断系统是线性系统,因为当系统具有多个输入信号或多个初始状态时,它必须满足对所有的输入信号和初始状态分别呈现线性性质。

故此,线性系统可定义为:凡是具有分解性、零输入响应线性和零状态响应线性的系统就称为线性系统。线性系统的三个条件缺一不可,否则系统就是非线性系统。对于离散系统,同样有上述结论成立。

【例 1.5.1】 判断下述方程所表示系统中哪些是线性系统?(其中 $x(t)$ 和 $x(n)$ 代表系统输入, $y(0)$ 代表系统唯一的初始状态, $y(t)$ 和 $y(n)$ 代表系统输出。)

$$(1) y(t) = y(0) + x(t) + y(0)x(t)$$

$$(2) y(t) = y^2(0) + x(t)$$

$$(3) y(t) = y(0) + |x(t)|$$

$$(4) y(t) = 2y(0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$(5) y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

$$(6) y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$

解:按照线性系统的定义,方程(4)、(5)、(6)所表示的系统是线性系统。而方程(1)、(2)、(3)所表示的系统分别不具有分解性、零输入响应线性、零状态响应线性,从而都是非线性系统。

【例 1.5.2】 已知一线性连续时间系统,当输入 $x(t)$ 为零,初始状态 $y(0) = 5$ 时,系统响应为 $5e^{-2t}$,在 $y(0) = 10$ 和 $x(t)$ 的共同作用下,系统全响应为 $y(t) = 1 + 9e^{-2t}$ 。求 $y(0) = 25$ 和 $2x(t)$ 共同作用下的系统全响应。

解:已知 $x(t) = 0, y(0) = 5 \rightarrow 5e^{-2t}$,根据系统的线性性质,有

$$x(t) = 0, y(0) = 10 \rightarrow 10e^{-2t}, x(t) = 0, y(0) = 25 \rightarrow 25e^{-2t}$$

而

$$x(t), y(0) = 10 \rightarrow 1 + 9e^{-2t}$$

$$\text{由系统线性性质,有 } x(t), y(0) = 0 \rightarrow 1 + 9e^{-2t} - 10e^{-2t} = 1 - e^{-2t}$$

从而有

$$2x(t), y(0) = 0 \rightarrow 2 - 2e^{-2t}$$

于是

$$2x(t), y(0) = 25 \rightarrow 2 + 23e^{-2t}$$

即 $y(0) = 25$ 和 $2x(t)$ 共同作用系统产生的全响应为 $2 + 23e^{-2t}$ 。

【例 1.5.3】 判断下列系统是否为线性时不变系统:

$$(1) y(t) = \cos[x(t)]$$

$$(2) y(t) = nx(n)$$

解: (1) 设输入信号分别为 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 相应的输出为 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$, 则

$$y_1(t) = T[x_1(t)] = \cos[x_1(t)], y_2(t) = T[x_2(t)] = \cos[x_2(t)]$$

当输入为 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ 时, 相应的输出为

$$y_3(t) = T[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \cos[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \neq \cos[\alpha x_1(t)] + \cos[\beta x_2(t)]$$

即 $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$, 故该系统为非线性系统。

又设输入延时 t_0 , 则相应输出为 $y(t) = \cos[x(t - t_0)] = y(t - t_0)$, 故该系统为时不变系统。

(2) 同理, 根据系统的线性性质可判断 $y(n) = nx(n)$ 为线性系统。

根据时不变系统的特性有

$$x(n - n_0) \rightarrow nx(n - n_0) \neq (n - n_0)x(n - n_0) = y(n - n_0)$$

故该系统为时变系统。

1.5.6 其他的系统分类

按照研究角度的不同, 对于系统还可作出其他多种分类。比如: 输入输出都可以用确定性信号表示的系统称为确定性系统, 而输入输出都必须用随机信号来描述的系统称为不确定系统或随机系统。系统对任何一个有界输入, 其系统的输出也有界, 该系统为**稳定系统**; 反之, 如果系统的输入有界, 输出无界, 则系统称为**不稳定系统**。

本书主要讨论**线性时不变**(Linear Time-Invariant, 记作 **LTI**) 系统, 对于这类系统的因果性和稳定性可利用系统的冲激响应和系统函数来判断, 这些内容在后续章节中将详细讨论。

习 题 一

1.1-1 试判断下面每一种说法对与错, 若为错, 用证明或例子说明。

- (1) 两个周期信号之和总是周期信号;
- (2) 所有非周期信号都是能量信号;
- (3) 所有能量信号都是非周期信号;
- (4) 若一个信号不是能量信号, 那么它就一定是功率信号, 反之亦然;
- (5) 两个功率信号之积总是一个功率信号;
- (6) 一个能量信号和一个功率信号之积总是一个能量信号。

1.1-2 说明下列信号哪些是周期信号, 哪些是非周期信号; 哪些是能量信号, 哪些是功率信号。计算它们的能量和平均功率。

$$(1) x(t) = \begin{cases} 5\cos(10\pi t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$(2) x(t) = \begin{cases} 8e^{-4t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$(3) x(t) = 5\sin 2\pi t + 10\sin 3\pi t, -\infty < t < \infty$$

1.1-3 判断下列序列是否是周期的, 如果是周期的, 试确定其基本周期。

$$(1) \cos(0.5\pi n + 0.2) \quad (2) \cos(\sqrt{2}\pi n + 1.2)$$

$$(3) \sin\left(0.5n + \frac{\pi}{3}\right) \quad (4) e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

1.1-4 试证明:

- (1) 两个奇信号或两个偶信号的乘积是一个偶信号。

(2) 一个奇信号和一个偶信号的乘积是一个奇信号。

1.2-1 画出下列信号的波形图,注意它们的区别。

$$(1)x_1(t) = tu(t)$$

$$(2)x_2(t) = (t-1)u(t)$$

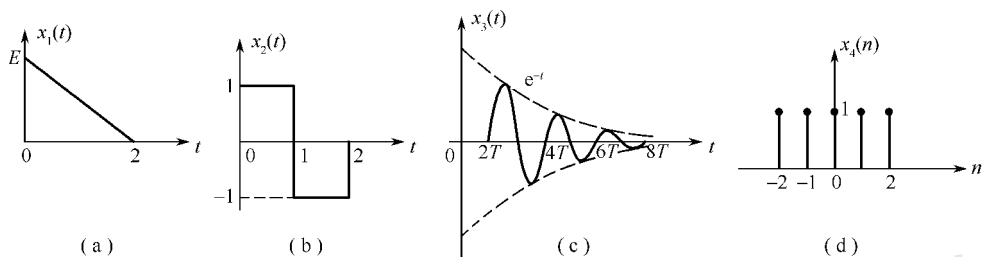
$$(3)x_3(t) = (t+1)u(t)$$

$$(4)x_4(t) = (t+1)u(t+1)$$

$$(5)x_5(t) = t[u(t) - u(t-1)]$$

$$(6)x_6(t) = tu(t) - (t-1)u(t)$$

1.2-2 写出如题 1.2-2 图所示信号的解析表示式。



题 1.2-2 图

1.2-3 利用冲激函数的广义函数定义,

$$(1) \text{ 证明 } \delta(at+b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right), a \neq 0, b \text{ 的实数};$$

$$(2) \text{ 证明 } \delta(t) \text{ 是 } t \text{ 的偶函数}.$$

1.2-4 单位冲激信号的微分 $\frac{d}{dt}\delta(t)$ 定义为单位冲激偶信号,记作 $\delta'(t)$, t_0 为实数。利用冲激函数的广义函数定义,

$$(1) \text{ 证明 } x(t)\delta'(t-t_0) = x(t_0)\delta'(t-t_0) - x'(t_0)\delta(t-t_0);$$

$$(2) \text{ 证明 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0)x(t)dt = -x'(t_0);$$

$$(3) \text{ 证明 } \delta'(t) \text{ 是 } t \text{ 的奇函数}.$$

1.2-5 计算下列各式:

$$(1)x(t+t_0)\delta(t)$$

$$(2)\left(\frac{\cos t}{t^2+2}\right)\delta(t)$$

$$(3)[e^{-t}\cos(3t-60^\circ)]\delta(t)$$

$$(4)\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)\delta(\omega+3)$$

$$(5)\left(\frac{\sin k\omega}{\omega}\right)\delta(\omega)$$

$$(6)\frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$$

$$(7)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$$(8)\int_{-4}^2 e^t\delta(t+3)dt$$

$$(9)\int_0^{\infty} e^{-t}\sin t\delta(t+1)dt$$

$$(10)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2-4)dt$$

$$(11)\int_{-1}^1 \delta(t^2-4)dt$$

$$(12)\int_{-\infty}^t e^{-\tau}\delta'(\tau)d\tau$$

1.3-1 粗略画出下列各解析表达式表示的信号波形:

$$(1)x(t) = (3 - e^{-t})u(t)$$

$$(2)x(t) = (5e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

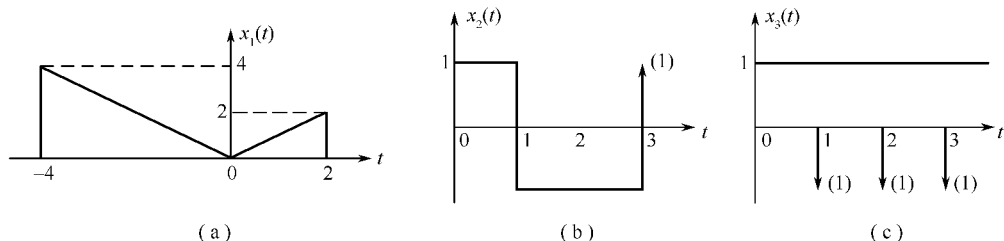
$$(3)x(t) = e^{-t}\sin 2\pi t[u(t) - u(t-3)]$$

(4) $x(t) = \frac{\sin at}{at}, a \neq 0$ 的实数

(5) $x(n) = (-2)^{-n}[u(n) - u(n-6)]$

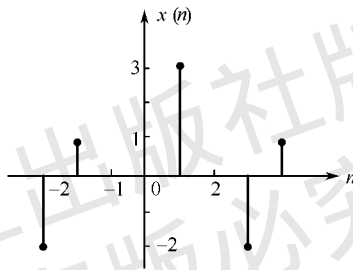
(6) $x(n) = n[u(n) - u(n-4)]$

1.3-2 求解题 1.3-2 图(a) 中信号的微分,并画出波形图,求解题 1.3-2 图(b)、(c) 中信号的积分并画出波形图。



题 1.3-2 图

1.3-3 已知 $x(n]$ 序列如题 1.3-3 图所示,试画出其累加序列 $y[n]$ 。



题 1.3-3 图

1.3-4 已知信号 $x(t)$ 的波形如题 1.3-4 图所示,试画出下列各信号对 t 的波形图:

(1) $x(-t)$

(2) $x(-t+2)$

(3) $x(-t-2)$

(4) $x(2t)$

(5) $x\left(\frac{1}{2}t\right)$

(6) $x(t-2)$

(7) $x\left(-\frac{1}{2}t+1\right)$

(8) $\frac{d}{dt}\left[x\left(\frac{1}{2}t+1\right)\right]$

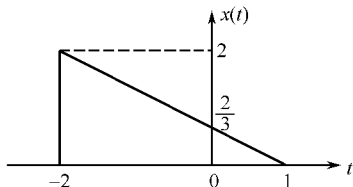
(9) $\int_{-\infty}^t x(2-\tau)d\tau$

1.3-5 已知信号 $x[n]$ 的波形如题 1.3-5 图所示,试画出下列各信号的波形图。

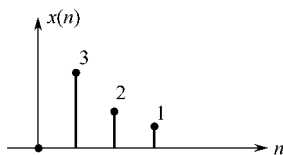
(1) $x[n-2]$

(2) $x(2n)$

(3) $x(-n-2)$



题 1.3-4 图

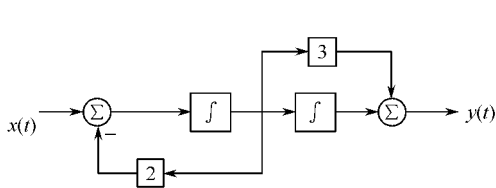


题 1.3-5 图

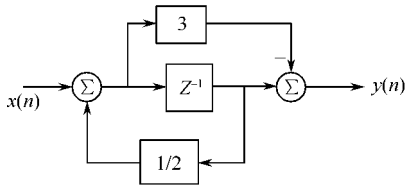
1.3-6 假设有一连续信号 $x(t)$ 不包含间断点,试证明:如果 $x(t)$ 是偶函数,则 $\frac{d}{dt}x(t)$ 是奇函数,如果 $x(t)$ 是奇函数,则 $\frac{d}{dt}x(t)$ 是偶函数。

1.4-1 某 LTI 系统如题 1.4-1 图所示,试写出该系统的微分方程。

1.4-2 某 LTI 系统如题 1.4-2 图所示,试写出该系统的差分方程。



题 1.4-1 图



题 1.4-2 图

1.4-3 试画出下列方程所对应的模拟框图。

(1) $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x''(t) + 4x(t)$

(2) $y(n) + 0.3y(n-1) - 0.2y(n-2) = x(n) + 0.5x(n-1)$

1.5-1 试判断下列方程所描述的系统是否为线性、时不变系统。

(1) $y''(t) + y(t) = 2x''(t) + 3x(t)$

(2) $y''(t) + y(t) \cdot y'(t) = 2[x'(t)]^2 + 3x(t)$

(3) $y''(t) + \sin t \cdot y'(t) + y^2(t) = 0$

(4) $y(n+2) + y(n) \cdot y(n-1) = 2x(n)$

(5) $y(n+2) + (n-1) \cdot y(n-1) = 2x(n)$

1.5-2 试判断下列方程所描述的系统是否为线性、时不变系统,其中 $y(0)$ 为初始状态, $x(\cdot)$ 为输入信号, $y(\cdot)$ 为输出信号。

(1) $y(t) = y(0) \cdot x(t) + \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

(2) $y(t) = \ln y(0) + 3t^2 x(t)$

(3) $y(t) = y(0) + \sin[x(t)]$

(4) $y(n) = y(0) + x(n) \cdot x(n-1)$

(5) $y(n) = (n-1)y(0) + (n-1)x(n)$

(6) $y(n) = y(0) + \sum_{i=0}^{n+2} n^2 x(i), n = 0, 1, 2, \dots$

1.5-3 试判断下列方程所描述的系统是否为线性、时不变、记忆、因果和稳定系统,其中 $x(\cdot)$ 为输入信号, $y(\cdot)$ 为输出信号。

(1) $y(t) = a^{x(t)}$

(2) $y(t) = x\left(1 - \frac{1}{2}t\right)$

(3) $y(t) = x(t-1) - x(-t)$

(4) $y(t) = \int_{-\infty}^{3t} x(\tau) d\tau$

(5) $y(n) = x(n) \cdot x(n-1)$

(6) $y(n) = x(2n)$

(7) $y(n) = \sum_{i=-n-2}^{n+2} x(i)$

(8) $y(n) = nx(n)$

1.5-4 一线性连续系统在相同的初始状态下,当输入为 $x(t)$ 时,全响应为 $y(t) = 2e^{-t} + \cos 2t$,当输入 $2x(t)$ 时,全响应 $y(t) = e^{-t} + 2\cos 2t$ 。求在相同的初始条件下,输入为 $4x(t)$ 时的全响应。