

# 第1章 绪 论

## 本章内容

- 介绍有限元方法
- 阐述有限元方法简史
- 介绍矩阵记法符号
- 阐述计算机在有限元方法发展中的作用
- 介绍有限元方法的一般步骤
- 列举有限元方法中使用的各种类型的单元
- 介绍有限元方法的典型应用
- 总结有限元方法的优势

## 序言

有限元方法是用于解决工程学和数学物理学问题的一种数值方法。可用有限元方法求解的工程和数学物理学领域的典型问题包括结构分析、热传导、流体流动、质量传输和电磁电位。

利用数学解析通常难以求解涉及复杂几何形状、荷载和力学特性的问题。数学解析是通过求解数学表达式而求得物体(这里指待分析的整体结构或物理系统)任意位置的未知量,因此数学解析对于物体任意多个位置都是有效的。数学解析通常要求解常微分方程或偏微分方程,但由于物体复杂的几何形状、荷载和力学特性,通常使得无法通过数学解析进行求解,因此需要利用数值方法,如有限元方法。有限元方法是通过求解联立代数方程组进行问题求解的,而不是求解微分方程。数值方法可以求解出连续体中多个离散点未知量的近似值。通过将物体划分为由小物体或单元(有限元)组成的等价系统而进行物体建模的过程称为离散化,多个单元(节点)通常在公共点、边界线或表面相互连接。有限元方法并非一次性求解整个物体,而是通过为每一个有限元建立方程,并进而组合这些方程而对物体进行求解。

简言之,结构问题的求解通常是指确定受到荷载结构的各个节点内的位移和应力。求解非结构问题时,节点未知量可以是热流或流体流动产生的温度或流体压力。

本章将首先介绍有限元方法发展的简短历史。从中可以看到,有限元方法仅在近 55 年才成为解决工程问题的实用性方法(与现代高速电子数字计算机的发展相关)。在简要介绍有限元方法的历史之后,将介绍矩阵运算符号,并阐述为什么需要矩阵方法(现代数字计算机的发展使其切实可行)来建立并求解方程。本章不仅阐述数字计算机对于求解复杂问题所涉及的大型联立代数方程的作用,还将介绍基于有限元方法的数值计算机程序的发展。进而,列举有限元方法求解问题所包含的一般步骤以及各种可用类型的单元。然后,将给出若干应用实例以说明有限元方法求解问题的能力。实例问题涉及复杂的几何形状、多种材料以及不规则荷载等情况。本章还将介绍使用有限元方法求解工程和数学物理问题的各种优点。最后列举有限元方法的计算机程序的多项特征。

## 1.1 简短历史

本节将阐述有限元方法在工程学的结构和非结构领域以及在数学物理学中应用的简短历史。本节引用的参考文献旨在加深对有限元方法历史背景的理解。

Hrennikoff<sup>[1]</sup>于1941年, McHenry<sup>[2]</sup>于1943年用线(一维)单元(杆和梁)求解了连续体中的应力,从而在20世纪40年代开始了有限元方法在结构化工程领域的现代发展。Courant<sup>[3]</sup>于1943年发表的文章提出了设置变分形式的应力解,但很多年没有得到广泛的承认。后来他在构成整个区域的三角形分区上引入分段插值(形)函数,将此作为得到近似数值解的方法。Levy<sup>[4]</sup>于1947年建立柔度法或力法,他在1953年的著作<sup>[5]</sup>中提出另一种很有前景的方法(刚度法或位移法)可用来分析静冗余飞机结构。然而,他们的方程难以手工求解,因此只有随着高速数字计算机的发展,这种方法才变得普遍起来。

Argyris 和 Kelsey<sup>[6, 7]</sup>于1954年利用能量原理建立了矩阵结构分析方法。这一发展说明了能量原理在有限元方法中的重要作用。

Turner 等人<sup>[8]</sup>于1956年首次使用了二维单元。他们推导了杆单元、梁单元、二维三角形平面应力单元和矩形单元的刚度矩阵,并概括了称为直接刚度法的过程,以得出总体刚度矩阵。随着20世纪50年代早期高速数字计算机的发展,Turner 等人的工作<sup>[8]</sup>促进了用矩阵符号表示的有限元刚度方程的进一步发展。Clough<sup>[9]</sup>1960年在用三角形单元和矩形单元进行平面应力分析时引进了“有限元”习惯用语。

Melosh<sup>[10]</sup>于1961年建立了平面矩形板弯曲单元刚度矩阵。随后 Grafton 和 Strome<sup>[11]</sup>于1963年建立了轴对称壳和压力容器的曲面壳弯曲单元刚度矩阵。

Martin<sup>[12]</sup>于1961年, Gallagher 等人<sup>[13]</sup>于1962年, Melosh<sup>[14]</sup>于1963年利用建立四面体刚度矩阵的方法将有限元方法延伸到三维问题。Argyris<sup>[15]</sup>于1964年研究了其他的三维单元。Clough 和 Rashid<sup>[16]</sup>, Wilson<sup>[17]</sup>于1965年考虑了特殊的轴对称立体单元。

20世纪60年代早期以前,大多数有限元工作是处理小应变、小位移、弹性材料性能和静荷载。然而,Turner 等人<sup>[18]</sup>于1960年考虑了大挠度和热应力分析, Gallagher 等人<sup>[13]</sup>于1962年考虑了非线性材料问题, Gallagher 和 Padlog<sup>[19]</sup>于1963年还首次处理了屈曲问题。Zienkiewicz 等人<sup>[20]</sup>于1968年将有限元方法扩充到黏弹性问题。

Archer<sup>[21]</sup>于1965年通过建立一致质量矩阵进行了动力分析,用于分析分布质量系统,如结构分析中的杆和梁。

Melosh<sup>[14]</sup>于1963年认识到可以借助变分方程建立有限元方法方程,于是,有限元方法开始用于解非结构应用问题。Zienkiewicz 和 Cheung<sup>[22]</sup>于1965年, Martin<sup>[23]</sup>于1968年, Wilson 和 Nickel<sup>[24]</sup>于1966年求解了场问题,如确定轴的扭转、流体流动和热传导。

加权残余法的适应性使得有限元方法得以进一步扩展。Szabo 和 Lee<sup>[25]</sup>于1969年首先推导了已知的用于结构分析的弹性方程,然后 Zienkiewicz 和 Parekh<sup>[26]</sup>于1970年推导了用于瞬态场问题的方程。就是从这时开始认识到,当直接公式和变分公式难以或无法使用时,加权残余法常常是适用的。例如, Lyness 等人<sup>[27]</sup>于1977年将加权残余法用于确定磁场。

Belytschko<sup>[28, 29]</sup>于1976年考虑了与大位移非线性动力特性有关的问题,并改进了求解得出的方程组的数值技术。更多关于此问题的讨论可以参考 Belytschko, Liu, Moran<sup>[58]</sup>以及 Crisfield<sup>[61, 62]</sup>的书籍。

生物工程领域是有限元方法一个相当新的应用领域<sup>[30, 31]</sup>。这个领域仍然被非线性材料、几何非线性和其他尚待发现的复杂问题等造成的困难所困扰。

从20世纪50年代早期至今,应用有限元方法解决复杂的工程问题已取得了巨大的进展。工程师、应用数学家和其他科学家将毫无疑问会建立新的应用领域。有关有限元方法的众多书目请参阅 Kardestuncer<sup>[32]</sup>、Clough<sup>[33]</sup>或 Noor<sup>[54]</sup>的著作。

## 1.2 矩阵符号简介

矩阵法是有限元方法的必要工具，其目的是简化单元刚度方程式，能够手工求解各种问题，更重要的是用于高速数字电子计算机的编程。因此矩阵符号是用于表示和求解联立代数方程组的简单且容易使用的记号。

附录 A 介绍了整本书都将使用的具有重要意义的矩阵概念。本节将仅概括介绍本书所使用的记号。

矩阵是按行和列排列值的矩形数组，通常用于辅助表示和求解代数方程组。如下是后续章节将要用到的矩阵实例，作用在结构的各节点(1, 2, ...,  $n$ )上的力的分量( $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}$ )、相应的节点位移( $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n$ )都可以表示为如下矩阵形式：

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \\ \vdots \\ F_{nx} \\ F_{ny} \\ F_{nz} \end{Bmatrix} \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (1.2.1)$$

$F$  的下标分别表示节点以及力的方向。例如， $F_{1x}$  表示在节点 1 的  $x$  方向上作用的力。节点在  $x, y$  和  $z$  方向的位移分别由  $u, v$  和  $w$  表示。 $u, v$  和  $w$  的下标代表节点。例如， $u_1, v_1, w_1$  分别表示节点 1 上  $x, y$  和  $z$  方向的位移分量。方程(1.2.1)所示的矩阵称为列矩阵，大小为  $n \times 1$ 。本书使用大括号  $\{\}$  表示列矩阵。列矩阵中所有的力或位移值可简化表示为  $\{F\}$  和  $\{d\}$  ①。

常用的矩形矩阵使用方括号  $[ ]$  表示。例如，书中各种类型单元(如图 1.1 中的单元)的单元刚度矩阵  $[k]$  和总体刚度矩阵  $[K]$  分别用方矩阵表示如下：

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

和

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

在结构理论中，元素  $k_{ij}$  和  $K_{ij}$  通常指刚度影响系数。

通过使用总体刚度矩阵  $[K]$ ，可将总节点力  $\{F\}$  与总节点位移  $\{d\}$  进行关联，方程如下：

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (1.2.4)$$

① 有关本书的向量、矩阵等符号的表示方法参见书前的符号表——编者注。

方程(1.2.4)称为总体刚度方程,代表一组联立方程,是刚度分析法或位移分析法建立的基本方程。

为了能够更加清楚地理解方程(1.2.3)中的元素  $K_{ij}$ ,下面使用方程(1.2.1)写出方程(1.2.4)的扩展形式:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \vdots \\ F_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (1.2.5)$$

假定结构受力产生的位移为  $u_1 = 1, v_1 = w_1 = \cdots = w_n = 0$ 。那么由方程(1.2.5)可以得出:

$$F_{1x} = K_{11} \quad F_{1y} = K_{21}, \cdots, F_{nz} = K_{n1} \quad (1.2.6)$$

方程(1.2.6)包含  $[K]$  中第 1 列的所有元素。此外,可以看出  $K_{11}, K_{21}, \cdots, K_{n1}$  是维持施加的位移状态所需要的整组节点力。类似地,  $[K]$  的第 2 列代表保持位移状态  $v_1 = 1$ , 而所有其他节点位移分量均等于零时所需要的节点力。至此,读者应该对刚度影响系数的意义有了更清楚的理解。

后续章节将讨论不同类型单元的单元刚度矩阵  $[k]$ , 例如, 杆、梁、平面应力和三维应力单元。也将讨论求取不同结构的总体刚度矩阵  $[K]$  的步骤, 以及通过求解方程(1.2.4)获得矩阵  $\{d\}$  中未知位移的步骤。

矩阵概念和运算将成为实际中进行问题求解的惯用方式, 以及手工求解小规模问题的有用工具。求解复杂问题时将涉及大量的联立方程, 因此, 使用数字计算机进行问题求解时矩阵法是必要的工具。

### 1.3 计算机的作用

如上所述, 在 20 世纪 50 年代初期以前, 矩阵法以及与之相关的有限元方法无法用于复杂问题的求解。尽管有限元方法已经用来描述复杂的结构, 但应用有限元方法进行结构分析时得到的大量代数方程使得该方法极为困难而无法实际应用。然而, 计算机的出现实现了几分钟时间内完成几千组方程的求解。

第一台现代商用计算机是诞生于 20 世纪 50 年代的 UNIVAC, IBM 701, 它是一台真空管计算机。伴随着 UNIVAC 产生了穿孔卡片技术, 需要将程序和数据都建立在卡片上。20 世纪 60 年代, 由于价格、质量、功耗以及高可靠性因素, 晶体管技术取代了真空管技术。1969 年至 20 世纪 70 年代晚期, 集成电路技术的兴起大大提高了计算机的运行速度, 这使得利用有限元技术求解具有更多自由度的大规模问题变得可行。20 世纪 70 年代晚期到 80 年代, 大规模集成电路以及具有视窗式图形用户界面和鼠标的工作站问世。第一个计算机鼠标于 1970 年 11 月 17 日获得了专利权。个人机从此成为大量销售的桌面计算机。网络计算时代与这些同时兴起的技术带来了 Internet 和万维网。20 世纪 90 年代发布的 Windows 操作系统通过集成图形用户界面而使得 IBM 及其兼容的个人机使用更为方便。

计算机的发展带动了计算机程序的发展。大量专用和通用程序开发出来以处理各种复杂的结构和非结构问题。计算机程序如参考文献[46~56], 不仅展示了有限元方法的优雅性, 同时也加深了对它的理解。

实际上, 有限元计算机程序已经能够运行在单处理器计算机上, 例如单台台式或便携式个人计算机, 或者计算机集群。个人计算机的大容量内存和高效的解题程序, 使其能够胜任具有上百万未知量的问题求解工作。

使用计算机进行求解时,分析人员需要提供确定的有限元模型,并将其相关信息输入计算机。这些信息包括单元节点坐标的位置、单元相互连接的方式、单元的材料性能、外加荷载、边界条件或约束条件,以及要进行分析的类型。计算机将利用这些信息生成相关分析所需要建立的方程并进行求解。

## 1.4 有限元方法的一般步骤

本节将介绍工程中应用有限元方法求解问题时建立方程并求解的一般性步骤,并将其作为后续章节求解结构和非结构问题时的准则。

为简单起见,在列举步骤时仅涉及结构问题。第13章和第14章将介绍非结构问题热传导和流体力学及其与结构问题的相似性。

结构应力分析通常需要工程师确定整体结构在平衡状态下受外加荷载作用时的位移和应力。然而,很多结构难以使用常规的方法确定其变形分布,因此必须使用有限元方法。

结构力学分析中,有限元方法通常与两种直接法相关。其中一种叫做力法或柔度法,使用内力作为问题的未知量。为了得到控制方程,首先需要使用平衡方程,然后通过引入协调方程作为必要的附加方程得到一组关于多余力或未知力的代数方程组。

第二种方法叫做位移法或刚度法,以节点位移作为问题的未知量。举例来说,协调条件要求施加荷载之前,在公共节点处、公共边界上或公共表面上的单元,在变形之后仍要保持连接在之前的节点、边界或表面上。然后,利用平衡方程以及力与位移的关系,基于节点位移建立控制方程。

上述两种方法在分析中得出不同的未知量(力或位移),以及计算不同矩阵(柔度矩阵或刚度矩阵)的方程。由于位移法的方程对于大多数结构分析问题比较简单,因此,位移法(或刚度法)更适用于利用计算机进行求解<sup>[34]</sup>。此外,绝大多数的通用有限元程序都包含求解结构问题的位移方程,因此本书仅使用位移法。

变分法是常用于建立结构或非结构问题控制方程的一种方法。变分法包括一系列原理,本书使用的是其中相对易于理解、常在基本力学课程介绍的、适用于线弹性材料的特性最小势能原理。最小势能原理将在本书不同章节进行介绍并使用,例如应用于2.6节的弹簧单元,3.10节的杆单元,4.7节的梁单元,6.2节的常应变三角形平面应力和平面应变单元,9.1节的轴对称单元,11.2节的三维四面体单元和12.2节的板弯曲单元。第13章将介绍使用与最小势能原理所使用的泛函类似的方法,来建立非结构问题热传导的有限元方程的方法。

另一种常用于推导控制方程的变分法是虚功原理,多用于线弹性材料以及非线性材料。附录E中介绍的利用虚功原理建立通用有限元控制方程的方法尤其适用于静态和动态系统中杆、梁和二维、三维立体单元。

有限元方法使用相互连接的、叫做有限元的小单元进行结构模拟。每个单元与一个位移函数相关联。每个单元通过共同(或共享)接口,包括节点、边界、表面,直接或间接与其他单元相连接。通过构成结构的材料的应力/应变特性,某特定节点的特性可以由结构中其他单元的特性确定。描述每一节点特性的方程组形成了一系列代数方程,由矩阵符号表示最为适宜。

下面将给出利用有限元方法进行结构问题分析时建立方程并求解的步骤,同时进行必要的解释。这些一般步骤揭示了有限元方法进行问题分析时建立方程并求解所应遵循的步骤。使得在后续章节中,阐述如何利用这些步骤求解弹簧、杆、梁、平面框架、平面应力、轴对称应力、三维应力、热传导和流体流动等特殊问题时更易于理解。当建立特定单元的方程时,建议读者定期地复习这一节。

需要注意,分析人员必须确定以下问题:如何将结构或连续体划分为有限元、选择分析中要



使用的单元类型(步骤 1)、确定外加荷载的类型以及边界条件或外加支撑的类型。而其余步骤 2 至步骤 7, 则将由计算机程序自动进行。

步骤 1 离散化和选择单元类型

步骤 1 包括将物体划分为具有节点的有限元的等价系统, 以及选择最适当的单元类型以尽可能地模拟物体的实际物理行为。工程分析中需要确定的主要问题包括模拟特定对象所需单元的数量、大小以及类型。单元必须小到可以给出有价值的结果, 又必须足够大以节省计算开销。计算结果会剧烈变化的地方(如几何形状改变)需要小单元, 可能的话用高阶单元; 结果相对稳定的地方可以使用大单元。在后续章节将更详细地阐述离散准则, 特别是在第 7 章这一问题变得非常重要。通常可以使用网格生成程序或预处理程序生成离散体或网格。

在有限元分析中, 单元的选择取决于物体实际荷载条件下的物理构成, 也取决于分析人员对实际行为的近似程度的期望。评估待解问题适合于哪种建模方式(一维、二维或三维)是非常必要的。而且, 对于特定的问题选择最适当的单元是设计人员和分析人员的主要任务之一。图 1.1 给出了实际应用中的常用单元, 本书将讨论其中的绝大部分。

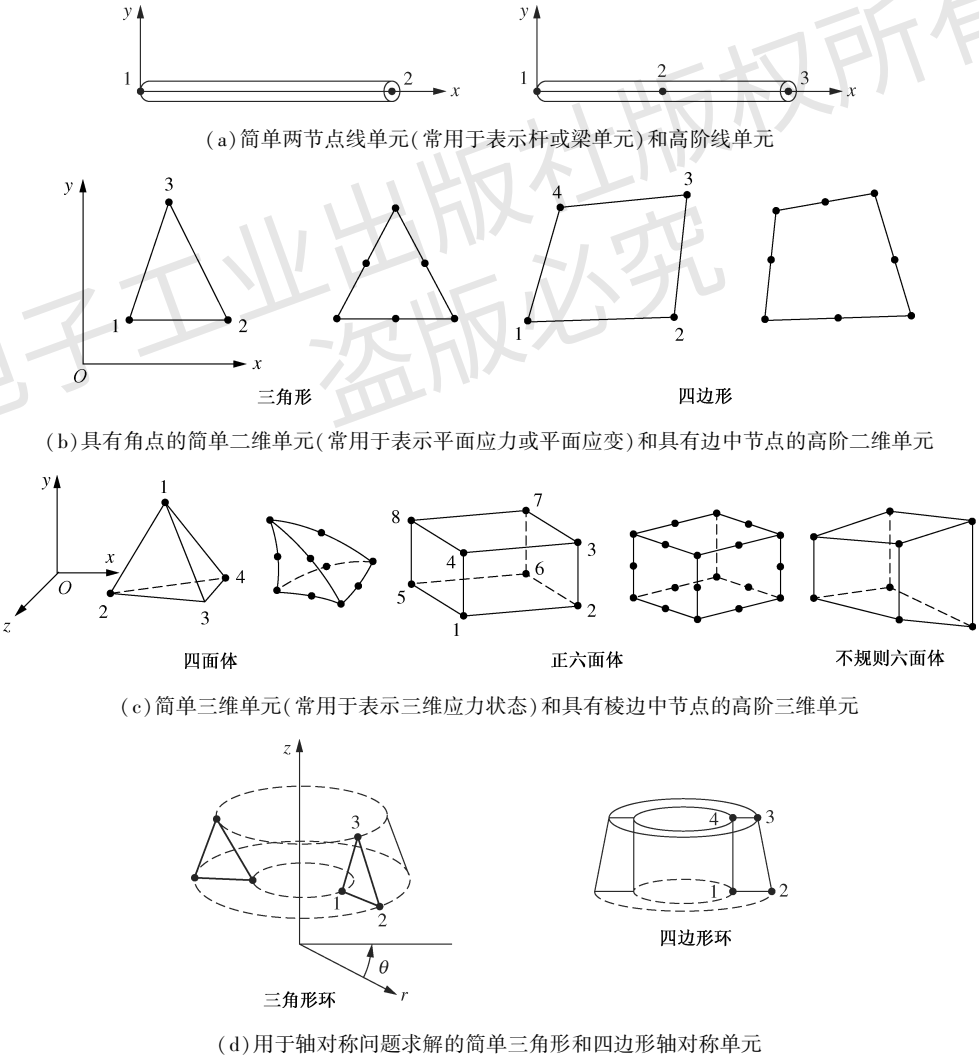


图 1.1 各种类型的有限单元

主要的线单元[参见图 1.1(a)]包括杆(或桁架)单元和梁单元。虽然线单元有横截面积,但一般仅用线段表示。通常,单元横截面积是可变的,但本书只考虑横截面不变的情况。线单元通常用来模拟桁架和框架结构(如图 1.2 所示)。最简单的线单元(称为线性单元)有两个节点,每端一个节点。此外,还有三个节点或更多节点的高阶单元(称为二次单元或三次单元等)。第 10 章将介绍高阶线单元。线单元是所介绍单元之中最简单一种,第 2 章至第 5 章将利用其阐述有限元方法的基本概念。

基本的二维单元(或平面单元)[参见图 1.1(b)]在其平面内受力(平面应力或平面应变条件)。二维单元可以是三角形单元或四边形单元。最简单的二维单元仅有角节点(线性平面单元)和直边或边界(参见第 6 章)。当然还有高阶单元,通常含有边中节点(或称二次单元)和曲线边界[参见图 1.1(b)](参见第 8 章和第 10 章)。单元可以是可变厚度的,也可以是等厚度的。这些单元广泛应用于工程问题的模拟(参见图 1.3 和图 1.4)。

最常用的三维单元[参见图 1.1(c)]是四面体单元和六面体单元(也称为实体单元)。在必须进行三维分析时使用三维单元。基本的三维单元(参见第 11 章)只有角点和直边,而高阶单元有边中节点(可能也有面中节点),侧面为曲面[参见图 1.1(c)]。

轴对称单元[参见图 1.1(d)]是通过使用三角形或四边形绕平面内的固定轴转动  $360^\circ$  而得到的。轴对称单元(将在第 9 章介绍)可用于几何形状以及荷载都是轴对称的问题中。

## 步骤 2 选择位移函数

步骤 2 将选择每个单元的位移函数。位移函数由单元的节点值进行定义。常用的位移函数包括线性、二次和三次多项式,因为由其建立的有限元方程比较简单。当然也可以使用三角级数。二维单元的位移函数是其平面坐标的函数(如  $x$ - $y$  平面)。位移函数以节点未知量(在二维分析中,用  $x$  分量和  $y$  分量表示)为参数。每个单元可重复使用一个通用位移函数。因此,有限元方法是使用离散的模型来近似模拟连续的量,如整个物体的位移。所采用的离散模型是由定义在各个有限域或有限单元上的分片连续函数而组成的。

## 步骤 3 定义应变/位移和应力/应变关系

推导各有限元方程时,需要利用应变/位移和应力/应变关系。例如,对于  $x$  方向上一维变形情况,小应变的应变  $\varepsilon_x$  和位移  $u$  的关系如下:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1.4.1)$$

此外,应力和应变必须通过应力/应变关系(通常称为本构关系)进行关联。为了获得可接受的结果,精确定义材料行为非常重要。胡克定律是通常用于应变分析的最简单的应力/应变定律,其由下式给出:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (1.4.2)$$

其中,  $\sigma_x$  为  $x$  方向的应力,  $E$  为弹性模量。

## 步骤 4 推导单元刚度矩阵和方程

单元刚度矩阵和单元方程最初是基于刚度影响系数的概念建立的,需要有结构分析的背景知识。本书使用另外的方法,不需要这些特殊的背景知识。

### 1.4.1 直接平衡法或刚度法

直接平衡法通过基本单元的力平衡条件以及力/变形关系,得出关关节点力和节点位移的刚度矩阵以及单元方程。由于直接平衡法最易应用于线单元或一维单元,所以在第 2 章、第 3 章和第 4 章分别将其应用于弹簧单元、杆单元和梁单元。

### 1.4.2 功或能量法

功或能量法<sup>[35]</sup>更适宜建立二维和三维单元的刚度矩阵与方程。常常用来推导单元方程的功或能量法包括虚功原理(利用虚拟位移)、最小势能原理和 Castigliano 理论。

附录 E 介绍的虚功原理可用于任何材料性能,而最小势能原理和 Castigliano 理论只能应用于弹性材料。此外,虚功原理还适用于势函数不存在的情况。然而,三个原理对于线弹性材料都能够得出相同的单元方程。因此,在线弹性材料的结构分析中使用哪种方法,很大程度上取决于哪种方法更为方便以及个人喜好。最小势能原理是上述三种能量方法中最为知名的,因此在第 2 章和第 3 章将详细介绍最小势能原理,并且将其应用于推导弹簧单元和杆单元的方程。后续章节将进一步推广最小势能原理,将其用于第 4 章中的梁单元和第 6 章中的应力/应变单元。以此类推,最小势能原理也将作为第 8 章、第 9 章、第 11 章和第 12 章的其他问题应力分析中推导刚度矩阵和单元方程的基础。

为了将有限元方法扩展到结构应力分析以外的领域,泛函<sup>①</sup>(函数的函数,或以函数为参数的函数)在推导单元刚度矩阵和方程过程中非常有用,与最小势能原理中所使用的类似(参见第 13 章的热传导和第 14 章的流体流动)。例如,设  $\pi$  表示泛函,  $f(x, y)$  表示变量  $x$  和  $y$  的函数  $f$ , 若令  $\pi = \pi(f(x, y))$ , 则  $\pi$  是函数  $f$  的泛函。泛函的更一般形式基于两个自变量  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$ , 如下:

$$\pi = \iint F(x, y, u, v, u_{,x}, u_{,y}, v_{,x}, v_{,y}, u_{,xx}, \dots, v_{,yy}) dx dy \quad (1.4.3)$$

其中,自变量  $x$  和  $y$  在笛卡儿坐标系下,下标中  $x$  和  $y$  前面的逗号表明该项是关于  $x$  或  $y$  的微分,例如,  $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ , 等等。

### 1.4.3 加权残余法

加权残余法在推导单元方程时是很有用的,其中伽辽金法十分著名。加权残余法在任何适用于能量法的场合都能够得到与其相同的结果。当难以得到泛函(如势能)时,加权残余法就特别有用。加权残余法能够直接将有限元方法应用于任何微分方程之中。

第 3 章将介绍伽辽金法,以及配置法、最小二乘法和子域加权残余法。为了清楚阐述每一种方法,每种方法都将用来求解已知解的一维杆问题以便进行比较。第 4 章用伽辽金法推导梁单元方程。第 13 章用伽辽金法求解热传导、对流和质量传输组合问题。有关加权残余法应用的详细资料,请参阅参考文献[36]。有关有限元方法中应用的其他方法请参阅参考文献[37]和[38]。

使用上述任何一种方法都将得出描述单元特性的方程。这些方程便于写为如下矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{n1} & & & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (1.4.4)$$

或写为精炼的矩阵形式

$$\{f\} = [k]\{d\} \quad (1.4.5)$$

其中  $\{f\}$  是单元节点力矢量,  $[k]$  是单元刚度矩阵(通常为对称方阵),  $\{d\}$  是单元未知节点自由度

① 泛函的另一定义为:泛函是隐式地含有待解问题的微分方程的积分表达式。典型泛函的形式为  $I(u) = \int F(x, u, u') dx$ , 其中,由于  $u(x)$ ,  $x$  和  $F$  是实数,因此  $I(u)$  也是实数。此处,  $u' = \partial u / \partial x$ 。



或广义位移矢量  $\mathbf{n}$ 。广义位移可以是实际位移、斜度甚至曲率等。在以后的章节中将针对不同类型的单元,如图 1.1 所示,深入探讨方程(1.4.5)中的矩阵的建立方法并进行解释。

### 步骤5 组合单元方程得出总体方程并引进边界条件

将第4步得到的各个单元节点联立方程组合在一起则可以得到总体节点联立方程。2.3节中将介绍如何将这一概念应用于双弹簧组合。以节点力平衡为基础的一种较为直接的叠加方法(称为直接刚度法),可以用来组合整体结构的总体方程。2.4节将介绍如何将这一方法应用于弹簧组合。直接刚度法中隐含了连续性和协调性概念,即要求结构保持完整,在结构任何一处不发生撕开。

最后,组合方程或总体方程的矩阵形式如下:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (1.4.6)$$

其中  $\{F\}$  是总体节点力矢量,  $[K]$  是结构总体刚度矩阵(对于多数问题,总体刚度矩阵是对称方阵),  $\{d\}$  是结构已知和结构未知的节点的自由度或广义位移。可以看到,总体刚度矩阵  $[K]$  是行列式等于零的奇异矩阵。为了去掉奇异性,必须利用某些边界条件(或约束或支撑),使结构固定而不作为一个刚体移动。在后面的章节中将给出引进边界条件的细节和方法。当前需要注意的是,引进边界或支撑条件会引起总体方程(1.4.6)的变动。还需要强调的是,整体力矩阵  $\{F\}$  中包括已知的外加荷载。

### 步骤6 解未知自由度(或广义位移)

通过引入边界条件修改方程(1.4.6)之后,形成一组联立代数方程组,可以写为扩展的矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (1.4.7)$$

其中  $n$  是结构未知节点自由度的总数。方程可用消元法(如 Gauss 消元法)或迭代法(如 Gauss-Seidel 迭代法)求解,得出所有  $d$  值。附录 B 中将讨论这两种方法。因为  $d$  值是利用刚度(或位移)有限元方法获得的第一组量,因此称为初始未知量。

### 步骤7 求解单元应变和应力

结构应力分析中,可以利用步骤6得到的位移以及典型的应变/位移关系和应力/应变关系,如步骤3中给出的一维应力方程(1.4.1)和方程(1.4.2),来直接描述应力和应变,因此应力和应变(或者力矩和剪力)是可获得的第二组重要的量。

### 步骤8 解释结果

最后,需要解释和分析结果,以将其应用于设计与分析过程。在进行设计和分析决策时,确定结构中出现大变形和大应力的位置通常是非常重要的。计算机后处理程序能够辅助用户以图形的方式阐释结果。

## 1.5 有限元方法的应用

有限元方法可用于结构以及非结构问题的分析。典型的结构问题如下所述。

1. 应力分析。包括桁架和框架分析(例如步行桥、高层建筑框架和风力发电机塔),以及孔、圆角或物体(如汽车零件、压力容器、医疗器械、航空器以及运动器材)内几何形状改变相关的应力集中问题。

- 2. 屈曲。如柱、框架和容器中。
- 3. 振动分析。如振动设备中。
- 4. 碰撞问题。包括车辆碰撞、子弹撞击和物体坠落及其撞击对象的分析。

非结构问题如下所述。

- 1. 热传递。例如在个人计算机微处理器芯片中电子设备热辐射，发动机和散热器的散热片中。
- 2. 流体流动。包括多孔材料的渗流(如水坝中的渗水)、凉水池、运动场馆等通风系统、绕赛车、帆船和冲浪板等的空气流动。
- 3. 电势或磁势的分布。如在天线和晶体管中。

此外，有限元方法也应用于某些生物力学工程问题(可能包含应力分析)，通常包括人的脊柱、头骨、股关节、颌移植、树胶牙齿移植、心脏和眼的分析。

下面将列举若干有限元方法典型的应用实例，这些实例展示了有限元方法可以用于求解不同类型、规模和复杂度的问题。同时，也将介绍典型的离散方式以及所用的单元类型。

图 1.2 表示一个由一系列梁单元组成的铁路控制塔三维框架。48 个单元由带圆圈的数字标识，28 个节点由不带圈的数字表示。每个节点有三个转动分量和三个位移分量。转动( $\theta$ )和位移( $d$ )叫做自由度。基于该塔结构所受的荷载情况，这里使用了三维模型。

利用有限元方法求解此框架，设计者和分析者能够快速得出该结构在设计规范所要求的一般性荷载下的位移和应力。在有限元方法和计算机发展之前，即使是求解这样相对简单的问题也需要花费大量时间。

第二个实例是利用有限元方法求解由于地面爆炸产生振动而形成荷载时，地下箱形涵洞的位移和应力。图 1.3 所示的离散模型包括 369 个节点，用来模拟箱形涵洞中钢筋的 40 个一维杆单元或桁架单元，用来模拟周围的土壤和混凝土箱形涵洞的 333 个二维三角形和矩形平面应变单元。由于对称性，仅需要分析一半的箱形涵洞。此问题需要求解近 700 个未知的节点位移。本例说明在一个有限元模型中通常可以使用不同类型的单元(本例中包括杆单元和平面应变单元)。

接下来的问题讨论如图 1.4 所示的液压缸杆端。此例使用了 120 个节点和 297 个三角形平面应变单元进行模拟。由于对称性，仅需要分析一半的杆端。此分析的目的是确定杆端应力最为集中的位置。

图 1.5 表示一个高烟囱段，高度为 4 个构件高度(或总高 9.75 m)。本例中，用 584 个梁单元模拟构成模板的垂直和水平钢筋，用 252 个平板单元模拟内部的木模板和混凝土壳。由于结构所受荷载不规则，所以需要使用三维单元。混凝土中的位移和应力是本例首要分析的问题。

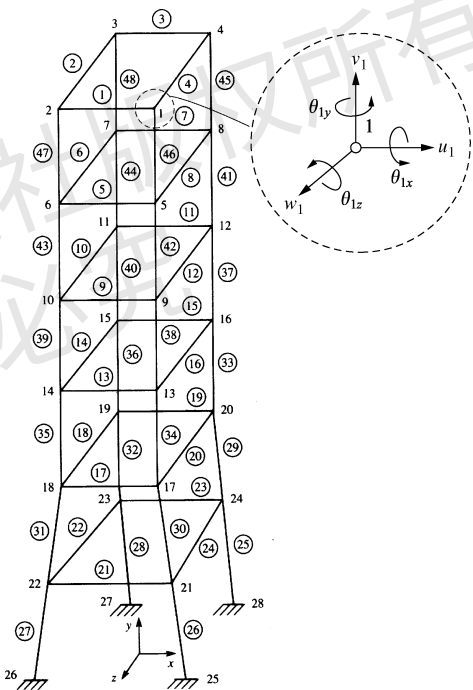


图 1.2 离散的铁路控制塔(28 个节点, 48 个梁单元), 以节点 1 为例标识其标准的自由度

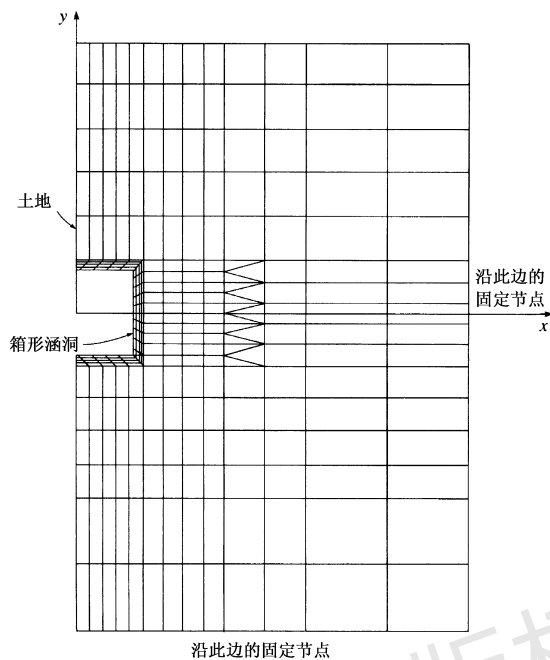


图 1.3 地下箱形涵洞的离散模拟(369 个节点、40 个杆单元和 333 个平面应变单元)<sup>[39]</sup>

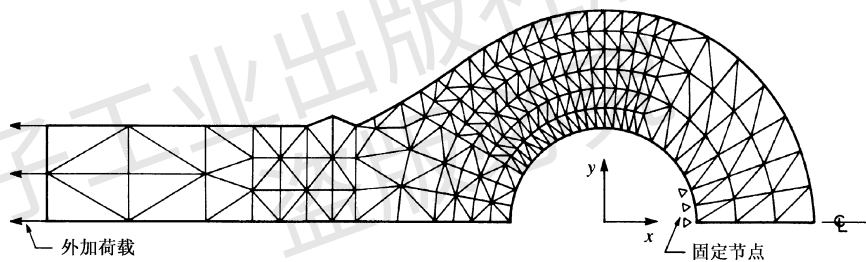


图 1.4 液压缸杆端二维分析(120 个节点, 297 个平面应变三角单元)

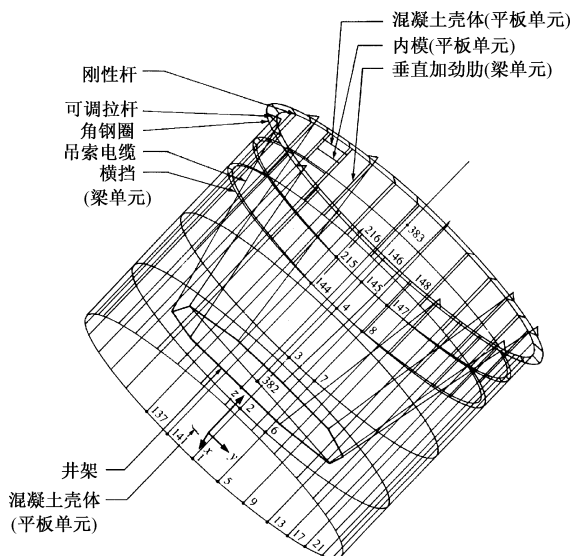


图 1.5 高烟囱段有限元模型(端部旋转 45°视图, 584 个梁单元和 252 个平板单元)(由 Daryl L. Logan 提供)

图 1.6 表示在塑料膜加工过程中拟使用的钢模的有限元离散模型。由于其不规则几何形状和应力的集中，必须使用有限元方法进行分析以得到合理的解。本例中使用了 240 个轴对称单元模拟三维钢模。

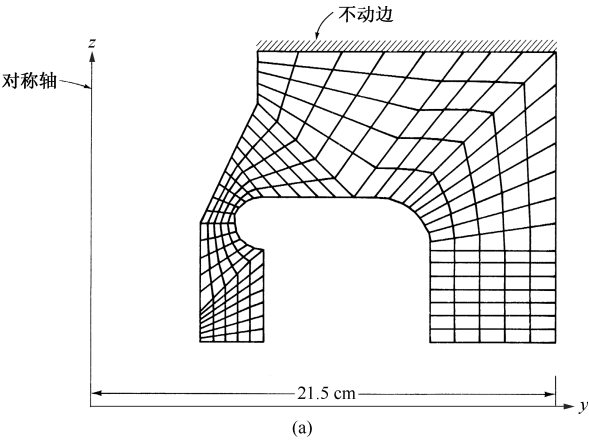


图 1.6 (a)塑料薄膜工业中使用的高强度钢模有限元模型(240 个轴对称单元) (由 Daryl L. Logan 提供);(b)平面中的单元绕z轴360°对称旋转时的三维模具视图(本图彩色版参见彩色插图)

图 1.7 表示用三维立体单元模拟反向铲框架的摆动铸件。由于三维铸件的形状不规则，必须用三维六面体单元模拟。二维模拟无法得到此类问题的精确工程解答。

图 1.8 表示用于确定以传送热气的埋藏管线为热源，土壤中温度分布的二维热传递模型。

图 1.9 是人类骨盆的三维有限元模型，可用来研究在骨骼和植入物之间，骨骼中以及黏结层中的应力。

图 1.10 给出了 710 G 的铲斗的有限元模型。

近年来，有限元方法也应用于涉及非线性行为和接触的机械事件仿真(MES)过程的研究<sup>[46]</sup>，如图 1.11 所示的滚轧成形过程以及如图 1.12 所示的不同荷载下风力发电机应力分析，其荷载包括风、冰以及在叶片转动时发生的振动<sup>[46]</sup>。

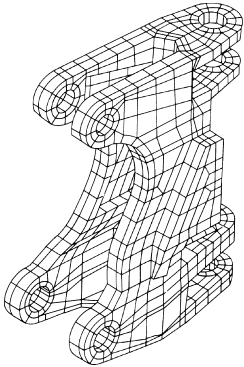


图 1.7 反向铲框架摆动铸件的三维立体单元模型

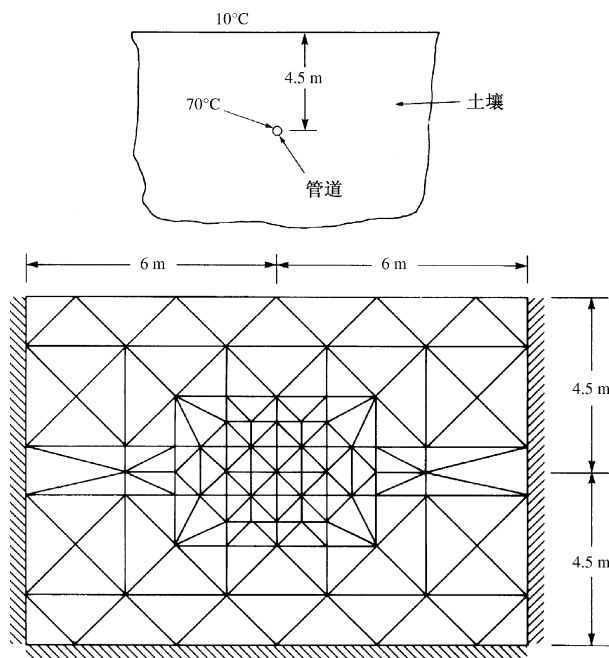


图 1.8 土壤中二维温度分布的有限元模型

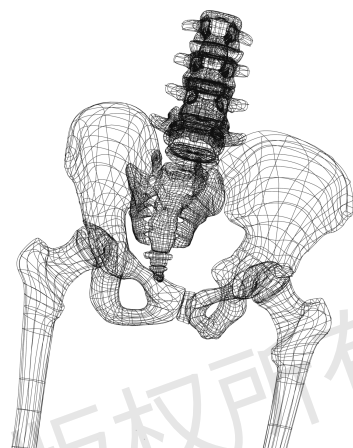


图 1.9 人体骨盆有限元模型(由麦克白科学照片库工作室提供)

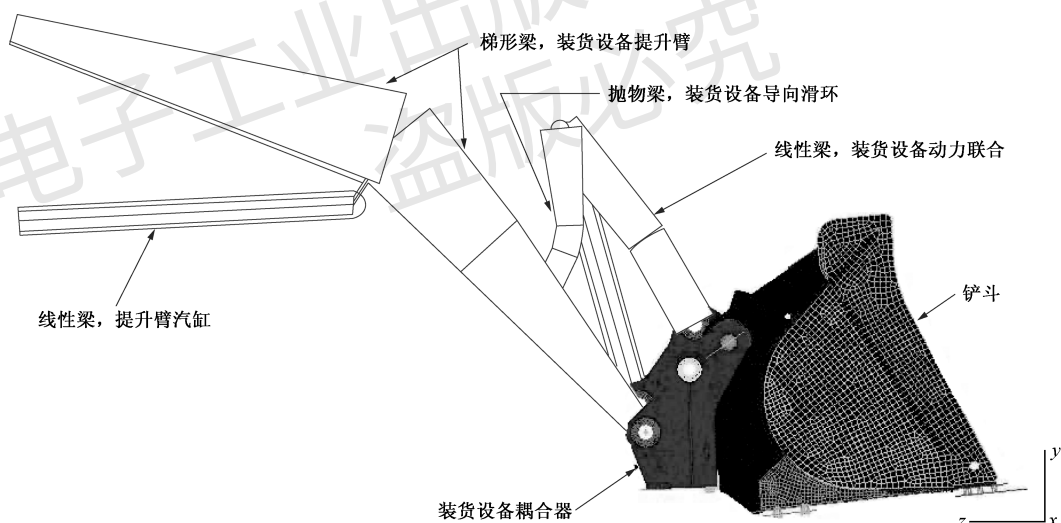


图 1.10 使用了 169 595 个单元 185 026 个节点的 710 G 的铲斗的有限元模型(模型中用了 78 566 个薄壁线性四边形单元模拟铲斗和耦合器, 83 104 个立体线性体单元模拟凸台, 212 个梁单元模拟提升臂、提升臂汽缸和导向滑环)(引自 Yousif Omer, Structural Design Engineer, Construction and Forestry Division, John Deere Dubuque Works)

最后, 近年来计算流体力学(CFD, Computational Fluid Dynamics)领域将有限元分析技术应用于通风系统的设计, 例如用在大型体育竞技场, 也用于研究围绕赛车或围绕被球棍猛烈击打的高尔夫球的空气流动问题<sup>[63]</sup>。

这些例子列举了可以用有限元方法求解的各种类型的问题。有关建模技术的其他指导方法将在第 7 章中给出。



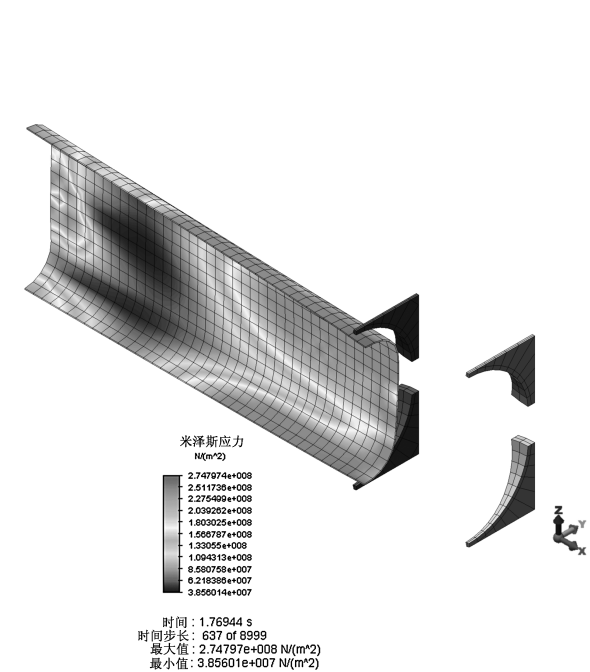


图 1.11 轮廓滚形或冷轧成形过程有限元模型(由 Valmont West Coast Engineering 提供, 本图彩色版参见彩色插图)

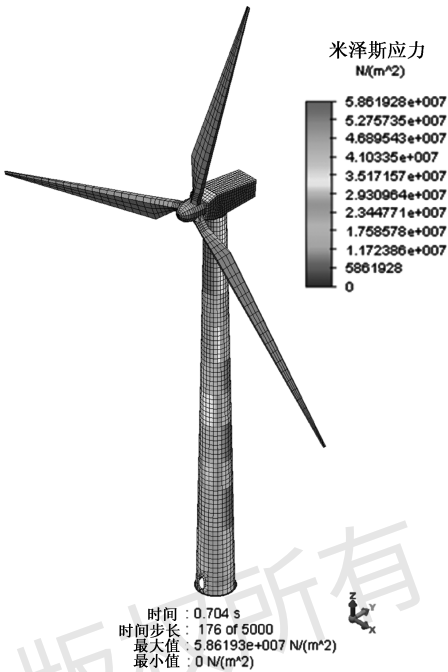


图 1.12 非线性有限元模拟临界时间步长的风力发电机塔米泽斯应力区有限元模型

### 1.6 有限元方法的优点

如上所述,有限元方法已应用于大量问题,既包括结构问题,也包括非结构问题。有限元方法有很多优点,因而应用越来越广泛。这些优点包括:

- 1. 便于模拟不规则形状的结构。
- 2. 易于处理一般的荷载条件。
- 3. 因为单元方程是单个建立的,所以可以模拟由几种不同材料构成的物体。
- 4. 能够处理各种数量和类型的边界条件。
- 5. 单元的大小是可变的,必要时可以使用小单元。
- 6. 改变有限元模型比较容易,代价不大。
- 7. 可包括动力效应。
- 8. 可处理大变形和非线性材料带来的非线性问题。

结构有限元分析使得设计者能够在设计过程中检测应力、振动和热应力问题,以在构造原型之前对设计方案做出评估,从而增强对原型可接受性的信心。此外,如果使用得当,有限元方法还可以减少所需构造的原型的数量。

虽然有限元方法最初仅用于结构分析,但目前已被完善并可适用于工程学和数理物理学领域中的其他学科,如流体流动、热传导、电磁势、土壤力学和声学<sup>[22~24, 27, 42~44]</sup>。

### 1.7 有限元方法的计算机程序

通常,使用计算机进行有限元方法求解问题的方式有两种。一种是使用大型的商业程序,这些通用性的程序可用来解决多种类型的问题,其中很多能够在个人计算机(PC)上运行。另一种

方法是建立多个小型的专用程序以解决特定的问题。本节将讨论上述两种方法的优点和缺点。然后列举某些可用的通用程序及其标准功能。

通用程序的优点如下：

1. 良好的输入界面，程序设计时考虑到了用户使用的方便性。用户不需要具有计算机软件或硬件的专业知识。易于使用的预处理程序有助于用户创建有限元模型。
2. 通用程序是一个庞大的系统，同样的输入格式常常可以用于求解各种规模和类型的问题。
3. 很多程序可通过增加新问题和新技术的求解模型加以扩充。这样只要花费很小的代价就可以跟随潮流的发展。
4. 随着 PC 内存容量和计算效率的提升，很多通用程序已经可在微机上运行。
5. 许多商用程序价格诱人，并且可以求解多种问题<sup>[45~56]</sup>。

通用程序的缺点如下：

1. 开发通用程序的初始成本很高。
2. 通用程序对每个问题要做很多检查，而专用程序不需要做如此多的检查，因此通用程序效率没有专用程序高。
3. 许多程序拥有专用权，因此用户无权触及程序的逻辑。如果需要进行修改，则只能由开发人员来完成。

专用程序的优点如下：

1. 专用程序通常相对较小，因此开发费用较低。
2. 专用程序可运行于小型计算机。
3. 专用程序易扩充，并且成本低。
4. 专用程序求解问题效率高，因为它们是专门设计用来求解此问题的。

专用程序的主要缺点是无法解决不同类型的问题。因此，有多少类型的问题需要求解，就需要有多少个程序。参考文献[60]中的网址提供了公共领域的有限元专用程序的列表。

有限元程序的供应商很多，感兴趣的用户在购买软件之前应该详细咨询商家。为了向读者提供一些关于可用的、有限元方法求解问题的商业个人计算机程序的指导，下面将列举一些现有的程序。

1. Algor<sup>[46]</sup>
2. Abaqus<sup>[47]</sup>
3. ANSYS<sup>[48]</sup>
4. COSMOS/M<sup>[49]</sup>
5. GT-STRUDEL<sup>[50]</sup>
6. LS-DYNA<sup>[59]</sup>
7. MARC<sup>[51]</sup>
8. MSC/NASTRAN<sup>[52]</sup>
9. NISA<sup>[53]</sup>
10. Pro/MECHANICA<sup>[54]</sup>
11. SAP2000<sup>[55]</sup>
12. STARDYNE<sup>[56]</sup>

上述文献和参考文献[45]列举了上述程序的标准功能。这些功能包括：

1. 单元类型选择。如梁单元、平面应力单元和三维立体单元。
2. 分析类型选择。如静力分析和动力分析。
3. 材料性能。如线弹性和非线性。
4. 荷载类型。如集中力、分布力、热应力和位移(沉降)。
5. 数据生成。如节点、单元和约束的自动生成(大多数程序有网格生成预处理程序)。
6. 绘图。如原始的以及变形的几何形状, 应力和温度轮廓线(大多数程序有后处理程序可用于以图形方式阐释结果)。
7. 位移特性。如小位移、大位移和屈曲。
8. 选择输出。如选择节点、单元、最大值或最小值。

所有程序都至少具有杆单元、梁单元、平面应力单元、板弯曲单元和三维立体单元分析能力, 目前大多数程序还包括热传导分析。

通过程序的参考手册和技术网址可更好地获得其完整功能及价格, 参见参考文献[46~56, 59]。

## 参考文献

- [1] Hrennikoff, A., "Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 8, No. 4, pp. 169-175, Dec. 1941.
- [2] McHenry, D., "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems," *Journal of Institution of Civil Engineers*, Vol. 21, pp. 59-82, Dec. 1943.
- [3] Courant, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 49, pp. 1-23, 1943.
- [4] Levy, S., "Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 14, No. 10, pp. 547-560, Oct. 1947.
- [5] Levy, S., "Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 20, No. 7, pp. 449-454, July 1953.
- [6] Argyris, J. H., "Energy Theorems and Structural Analysis," *Aircraft Engineering*, Oct., Nov., Dec. 1954 and Feb., Mar., Apr., May 1955.
- [7] Argyris, J. H., and Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, London, 1960 (collection of papers published in *Aircraft Engineering* in 1954 and 1955).
- [8] Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 23, No. 9, pp. 805-824, Sept. 1956.
- [9] Clough, R. W., "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," *Proceedings*, American Society of Civil Engineers, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, pp. 345-378, Sept. 1960.
- [10] Melosh, R. J., "A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 28, No. 1, pp. 34-42, Jan. 1961.
- [11] Grafton, P. E., and Strome, D. R., "Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 1, No. 10, pp. 2342-2347, 1963.
- [12] Martin, H. C., "Plane Elasticity Problems and the Direct Stiffness Method," *The Trend in Engineering*, Vol. 13, pp. 5-19, Jan. 1961.
- [13] Gallagher, R. H., Padlog, J., and Bijlaard, P. P., "Stress Analysis of Heated Complex Shapes," *Journal of the American Rocket Society*, Vol. 32, pp. 700-707, May 1962.
- [14] Melosh, R. J., "Structural Analysis of Solids," *Journal of the Structural Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, pp. 205-223, Aug. 1963.

- [15] Argyris, J. H., "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis," *Progress in Aeronautical Science*, Vol. 4, Pergamon Press, New York, 1964.
- [16] Clough, R. W., and Rashid, Y., "Finite Element Analysis of Axisymmetric Solids," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 91, pp. 71-85, Feb. 1965.
- [17] Wilson, E. L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 3, No. 12, pp. 2269-2274, Dec. 1965.
- [18] Turner, M. J., Dill, E. H., Martin, H. C., and Melosh, R. J., "Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads," *Journal of Aeronautical Sciences*, Vol. 27, No. 2, pp. 97-107, Feb. 1960.
- [19] Gallagher, R. H., and Padlog, J., "Discrete Element Approach to Structural Stability Analysis," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 1, No. 6, pp. 1437-1439, 1963.
- [20] Zienkiewicz, O. C., Watson, M., and King, I. P., "A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 10, pp. 807-827, 1968.
- [21] Archer, J. S., "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques," *Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics*, Vol. 3, No. 10, pp. 1910-1918, 1965.
- [22] Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite Elements in the Solution of Field Problems," *The Engineer*, pp. 507-510, Sept. 24, 1965.
- [23] Martin, H. C., "Finite Element Analysis of Fluid Flows," *Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 517-535, Oct. 1968. (AFFDL-TR-68-150, Dec. 1969; AD-703-685, N.T.I.S.)
- [24] Wilson, E. L., and Nickel, R. E., "Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 4, pp. 276-286, 1966.
- [25] Szabo, B. A., and Lee, G. C., "Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1, pp. 301-310, 1969.
- [26] Zienkiewicz, O. C., and Parekh, C. J., "Transient Field Problems: Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, No. 1, pp. 61-71, 1970.
- [27] Lyness, J. F., Owen, D. R. J., and Zienkiewicz, O. C., "Three-Dimensional Magnetic Field Determination Using a Scalar Potential. A Finite Element Solution," *Transactions on Magnetism*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, pp. 1649-1656, 1977.
- [28] Belytschko, T., "A Survey of Numerical Methods and Computer Programs for Dynamic Structural Analysis," *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 37, No. 1, pp. 23-34, 1976.
- [29] Belytschko, T., "Efficient Large-Scale Nonlinear Transient Analysis by Finite Elements," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, No. 3, pp. 579-596, 1976.
- [30] Huiskes, R., and Chao, E. Y. S., "A Survey of Finite Element Analysis in Orthopedic Biomechanics: The First Decade," *Journal of Biomechanics*, Vol. 16, No. 6, pp. 385-409, 1983.
- [31] *Journal of Biomechanical Engineering*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, (published quarterly) (1st issue published 1977).
- [32] Kardestuncer, H., ed., *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [33] Clough, R. W., "The Finite Element Method After Twenty-Five Years: A Personal View," *Computers and Structures*, Vol. 12, No. 4, pp. 361-370, 1980.
- [34] Kardestuncer, H., *Elementary Matrix Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [35] Oden, J. T., and Ripperger, E. A., *Mechanics of Elastic Structures*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1981.
- [36] Finlayson, B. A., *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York, 1972.

- [37] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
- [38] Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., Wiley, New York, 2002.
- [39] Koswara, H., *A Finite Element Analysis of Underground Shelter Subjected to Ground Shock Load*, M. S. Thesis, Rose-Hulman Institute of Technology, 1983.
- [40] Greer, R. D., "The Analysis of a Film Tower Die Utilizing the ANSYS Finite Element Package," M. S. Thesis, Rose-Hulman Institute of Technology, Terre Haute, Indiana, May 1989.
- [41] Koeneman, J. B., Hansen, T. M., and Beres, K., "The Effect of Hip Stem Elastic Modulus and Cement/Stem Bond on Cement Stresses," 36th Annual Meeting, Orthopaedic Research Society, Feb. 5-8, 1990, New Orleans, Louisiana.
- [42] Girijavallabham, C. V., and Reese, L. C., "Finite-Element Method for Problems in Soil Mechanics," *Journal of the Structural Division*, American Society of Civil Engineers, No. SM2, pp. 473-497, Mar. 1968.
- [43] Young, C., and Crocker, M., "Transmission Loss by Finite-Element Method," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 57, No. 1, pp. 144-148, Jan. 1975.
- [44] Silvester, P. P., and Ferrari, R. L., *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1983.
- [45] Falk, H., and Beardsley, C. W., "Finite Element Analysis Packages for Personal Computers," *Mechanical Engineering*, pp. 54-71, Jan. 1985.
- [46] Algor Interactive Systems, 150 Beta Drive, Pittsburgh, PA 15238.
- [47] Web site <http://www.abaqus.com>.
- [48] Swanson, J. A., ANSYS-Engineering Analysis Systems User's Manual, Swanson Analysis Systems, Inc., Johnson Rd., P. O. Box 65, Houston, PA 15342.
- [49] COSMOS/M, Structural Research & Analysis Corp., 12121 Wilshire Blvd., Los Angeles, CA 90025.
- [50] web site <http://ce6000.cegatech.edu>.
- [51] web site <http://www.mssoftware.com>.
- [52] MSC/NASTRAN, MacNeal-Schwendler Corp., 600 Suffolk St., Lowell, MA, 01854.
- [53] web site <http://emrc.com>.
- [54] Toogood, Roger, Pro/MECHANICA Structure Tutorial, SDC Publications, 2001.
- [55] Computers & Structures, Inc., 1995 University Ave., Berkeley, CA 94704.
- [56] STARDYNE, Research Engineers, Inc., 22700 Savi Ranch Pkwy, Yorba Linda, CA 92687.
- [57] Noor, A. K., "Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology," *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 44, No. 6, pp. 307-317, June 1991.
- [58] Belytschko, T., Liu W. K., and Moran, B., *Nonlinear Finite Elements For Continua and Structures*, John Wiley, 1996.
- [59] Hallquist, J. O., LS-DYNA, Theoretical Manual, Livermore Software Technology Corp., 1998.
- [60] web site <http://homepage.usak.ca/~ijm451/finite/fe/resources>.
- [61] Crisfield, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 1: Essentials*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.
- [62] Crisfield, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol. 2: Advanced Topics*, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- [63] ANSYS Advantage, Vol. 1, Issue 1, 2007.

## 习题

### 1.1 定义术语“有限元”。



- 1.2 在有限元方法中“离散”是什么意思？
- 1.3 现代有限元方法的发展开始于哪一年？
- 1.4 直接刚度法是在哪一年提出的？
- 1.5 定义术语“矩阵”。
- 1.6 计算机在有限元方法中起什么作用？
- 1.7 列举和简要说明有限元方法的一般步骤。
- 1.8 什么是位移法？
- 1.9 列举 4 种常用的有限单元类型。
- 1.10 说出 3 种推导单元刚度矩阵和单元方程的常用方法。简述每一种方法。
- 1.11 术语“自由度”指什么？
- 1.12 列举有限元方法在工程中 5 个典型的应用领域。
- 1.13 列举有限元方法的 5 个优点。

电子工业出版社版权所有  
盗版必究