

第 1 章 绪 论

在科学技术研究中，数学方法是一种必不可少的研究工具。按照马克思的看法，“一种科学只有成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步”。数学方法不但广泛应用于自然科学领域的研究活动中，而且也广泛渗透到其他的研究活动中。高等数学方法是一种重要的研究方法。本章将对数学方法进行简单的介绍，使读者对高等数学方法中的微积分方法所研究的基本问题有一个初步的了解，并对怎样学习高等数学有一个初步的认识。

1.1 数学方法概述与作用

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的一门基础学科。在人类活动的早期，由于生产的需要，产生了算术与几何学，算术运算后来又发展到一般字母符号的运算，形成了代数学。从 16 世纪开始，由于社会生产的要求，使得代数与几何相结合，产生了解析几何学。在解析几何学的基础上又产生了微积分，形成了数学分析学。代数、几何与数学分析三大数学学科各自独立地发展，互相联系和渗透，加上其他学科的纵横交叉从而产生和分化出众多的数学分支。相对于初等数学，它们被称为高等数学。

所谓数学方法，就是运用数学所提供的概念、理论和方法对所研究的对象进行定量的分析、描述、推导和计算，以便从量的关系上认识事物发展变化的规律性的方法。但是，必须说明，这里所说的数学方法，不是指数学家研究数学的方法，而是指除此之外的科研人员以数学概念和理论揭示所研究事物的内在联系和运动规律的方法。

那么，数学方法具有哪些特点呢？数学方法的特点与数学本身的特点是统一的。这些特点归纳起来有以下几个方面：第一，数学方法具有高度的抽象性。数学概念和理论的抽象性，决定了数学方法的抽象性。在用数学方法解决问题时，已经舍弃了研究对象的其他性质，把全部问题变成了数学符号之间的运算关系。第二，数学方法具有严密的逻辑性。数学方法在揭示事物量和量的关系时，不是通过直接的实验方法来实现的，而是通过一系列的逻辑推理和逻辑证明之后才认为是正确的。这样，数学方法具有比其他科学方法更严格的逻辑特性。第三，数学方法具有严格的确定性。数学是描述事物量的关系的科学，而量是严格确定的。虽然量也可能以变化状态出现，但它在每个确定条件下都有确定值。第四，数学方法具有应用的广泛性。这是数学方法最重要的特点。数学的生命力的源泉在于它的概念和结论尽管极为抽象，但是它们都是从实践中来的，在实践中研究对象量和量的关系。任何科学都有自己的研究对象和应用范围，而量和量的关系贯穿于一切领域和一切事物中，在对不同的领域和不同的事物进行定量分析时，都离不开数学方法。因此，同其他科学方法相比，数学方法具有更加广泛的应用范围。

在科学研究中，定量分析和精确计算是掌握客观规律的根本途径。而数学方法是对客观事物进行定量分析和精确计算的重要手段。由于数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性、严格的确定性和广泛的适用性等特点，在长期的发展中创造了一系列的概念、理论和方法，再加上电子计算机的出现和应用，使得数学方法能适应现代科学技术发展的要求，在科学技术

研究中起着越来越重要的作用。

数学方法的第一个作用是它为科学研究提供定量分析和精确计算的手段；第二个作用是它为科学研究提供了一种简洁精确的形式化语言；第三个作用是它为科学研究提供了逻辑推理和科学抽象的工具；最后，数学方法还为总结科学理论和创立新学科提供新的手段。

数学模型方法是解决科学技术问题最重要、最常用的一种数学方法。所谓数学模型方法，就是通过建立和研究客观事物的数学模型来揭示事物的本质特征和变化规律的一种方法。这种方法将在本书的有关章节中进行详细讨论。

本书所介绍的高等数学方法，称为高等数学。它是高职高专各专业必修的一门重要基础课，内容主要包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数、矩阵等等，其核心内容是微积分。工程技术人员在所建立的数学表达式中一些烦琐的数学计算与推理，运用微积分方法，过去只能由数学专业人员才能完成的，由于电子计算机与数学应用软件的发展，现在也可以由一般工程技术人员借助计算机与数学应用软件方便地完成。因此，训练学生掌握数学应用软件的使用已成为高等数学教学内容的一部分。

1.2 微积分所研究的两个基本问题及方法

从研究常量到研究变量，是数学发展中的一个转折点。初等数学主要采用形式逻辑的方法，静止地、孤立地研究问题，而高等数学则是用运动的、变化的观点去研究问题。下面，用“速度问题”和“面积问题”这两个经典问题为例，介绍微积分的基本方法。

1. 变速直线运动的瞬时速度

物体最简单的运动是直线运动。在直线运动中，有两种运动：一种是速度始终保持不变的运动，称为匀速直线运动；一种是速度有变化的运动，称为变速直线运动。客观实际中的直线运动常常是变速的，例如，火车和汽车的行驶，飞机的飞行与物体的降落等等，都是变速运动。

设物体沿着直线运动，所走过的路程为 s ，所花费的时间为 t ，匀速直线运动的速度为 v ，则有公式

$$v = \frac{s}{t} \quad (1.1)$$

问题是如何求变速直线运动的速度，下面举例来说明。

例 1.1 求自由落体的运动速度。

由常识可知，从空中落下来的物体越落越快，速度是变化的。假定物体在初始时刻是静止的，并且忽略空气阻力的作用，则在时间 t 内下落的路程 s 由下列公式给出：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.2)$$

其中 g 是重力加速度。现在要计算自由落体在每一个时刻的速度，即所谓瞬时速度。

对于匀速直线运动中每一个时刻的速度，可用公式 (1.1) 计算，而对于变速直线运动，如自由落体运动，其速度是随时间变化而变化的，这时不能用公式 (1.1) 计算，用公式 (1.1) 只能算出这段时间内的平均速度，而不能算出这段时间内每一时刻的速度。如何解决这个问题？为此，可以先考察某一很小时间段内速度的变化情况，在整段时间内，速度是变化的，但在很小时间段内，速度可以近似地看成是不变的，即可以近似地“以匀速代变速”来计算。

利用这种思想方法，为了求自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$ ，考察从时刻 t_0 到时刻 $t_0 + \Delta t$ 这段时间内的运动，这里 Δt 表示从时刻 t_0 开始的一段时间。由式 (1.2)，在这段时间，自由落体所走过的路程为

$$\Delta s = \frac{1}{2} g(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_0^2 = g t_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g(\Delta t)^2$$

如果 Δt 很小，在这段时间内，运动就可以近似地看成是匀速的，所以就可以用这段时间内的平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 来表示，即

$$\bar{v}(t_0) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g t_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g(\Delta t)^2}{\Delta t} = g t_0 + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t \quad (1.3)$$

来近似地代替时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$ ，即 $v(t_0) \approx \bar{v}(t_0)$ ， Δt 越小，近似程度越高。但是，无论 Δt 多么小，平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 总还是瞬时速度 $v(t_0)$ 的近似值，而不是它的精确值。

为了解决近似值与精确值这对矛盾，即如何把近似值转化为精确值，只要将 Δt 无限地趋近于 0，即当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 无限接近一个确定的常数就是瞬时速度 $v(t_0)$ ，记为

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

因此，在平均速度 $\bar{v}(t_0)$ 的计算公式 (1.3) 中，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，得

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(g t_0 + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t \right) = g t_0$$

这就算出了自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0) = g t_0$ 。在把近似值转化为精确值的过程中运用的方法称为取极限。

上述计算的思想方法可以简单表示为：局部以匀速代替变速，以平均速度代替瞬时速度，然后通过取极限的方法，把瞬时速度的近似值转化为它的精确值。

变速直线运动的瞬时速度问题及其求解方法引出微积分中的一个基本问题——微分学。在微分学中的基本概念就是导数，导数就是从这类问题中抽象出来的。在本书的第 4 章将进一步研究这个问题。

2. 平面图形的面积问题

平面图形的面积的研究引出微积分中的另外一个基本问题——积分学。为此，举例来说明平面图形的面积的求法。

例 1.2 设给定一个如图 1.1 所示的平面图形，它由抛物线 $y = x^2$ ，直线 $x = 1$ 及 Ox 轴所围成，试计算这个平面图形的面积。

由于该平面图形有一边是曲的，称为曲边三角形，其面积不能用初等数学的方法计算，出现了“曲与直”的矛盾。

为了解决这一矛盾，利用把面积分割成很小的块的思想方法，先把 x 轴上从 0 到 1 这线段分成许多小段，再从所有分点引平行于 y 轴的直线，将整个平面图形分成许多很窄的竖条。虽然每一个

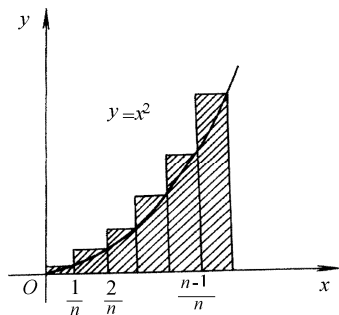


图 1.1

竖条的上面那个边都是曲的，但由于竖条很窄，从计算面积的角度来看，“以直代曲”，把它们近似地看成小矩形来计算。

假定把 x 轴上从 0 到 1 这线段分成 n 个相等的小段，则每一小段的长为 $\frac{1}{n}$ ，分点的坐标分别为 $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$ 。小矩形共有 n 个，它们的宽度都是 $\frac{1}{n}$ ，而高度分别是 $\left(\frac{1}{n}\right)^2, \left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots, \left(\frac{n}{n}\right)^2$ 。因此，它们的面积分别等于 $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}, \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n}, \dots, \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$ 。把这些小矩形面积加起来就得到平面图形面积的近似值为

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] \quad (1.4)$$

设平面图形的面积为 S ，则有 $S \approx S_n$ ，当 n 越大时，近似程度越高。

为了解决近似值与精确值这对矛盾，即如何把近似值转化为精确值，只要将 n 无限地增大，即当 $n \rightarrow \infty$ 时，平面图形面积的近似值 S_n 无限接近一个确定的常数就是平面图形面积 S ，记为

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

为了计算这个极限，利用公式

$$(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

把式 (1.4) 写成为

$$S_n = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \quad (1.5)$$

利用式 (1.5) 得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

即这个平面图形的面积等于 $\frac{1}{3}$ 。

上述计算的思想方法可以简单表示为：分割（将平面图形的面积分成许多窄条），局部“以直代曲”取近似（将平面图形面积中每个窄条近似地换成小矩形），求和得到面积的近似值（把这些小矩形的面积加起来），然后通过取极限的方法，把面积的近似值转化为它的精确值。这样得到的极限值称为积分值。在积分学中的基本概念就是定积分，定积分就是从这类问题中抽象出来的。在本书的第 7 章将进一步研究这个问题。

上述两个例子代表了微积分学中两个基本问题，具有普遍的意义，其求解的思想方法就是微积分思想方法的具体体现。从上面两个例子中看出，采取的方法都是：在微小局部“以匀代非匀”，“以直代曲”，求得近似值，通过求极限转化为精确值。这是微积分解决问题的基本思想方法，体现了通过矛盾的转化解决矛盾的唯物辩证法，与初等数学主要依据形式逻辑的推理方法有很大的不同。

3. 高等数学方法的特点

从以上两个基本问题可知，微积分学研究的问题及处理问题所依据的基本观念和基本方

法具有不同于初等数学的特点，主要有以下几点：

(1) 贯穿基本问题讨论中的一个基本观点，就是变化的观点，用变化的观点去考察问题，从变化中去认识解决问题。如在平面图形面积计算中，从局部内的直边形去代替曲边形。

(2) 从变化的观点出发研究问题，就要引入变量，了解变量的依赖关系，从变量之间的联系去考察问题。这就决定了微积分主要研究变量，研究变量间的关系就是函数。而初等数学主要研究常量，即固定不变的量。

(3) 在微积分中，经常要处理矛盾，这些矛盾的主要表现形式为曲与直的矛盾，变与不变的矛盾，有限与无限的矛盾和匀与不匀的矛盾等。解决这些矛盾的方法是：首先在局部“以直代曲”，“以不变代变”，“以有限代无限”等，从而求得近似解，再归结为近似与精确的矛盾，为了解决近似与精确的矛盾，最后通过取极限方法实现从近似到精确的转化。

(4) 极限理论是解决微积分基本问题的基础，表现了微积分学不同于初等数学的显著特点。

1.3 怎样学习高等数学

从高等数学方法的特点来看，高等数学的研究对象和研究方法与初等数学有很大的不同。高等数学的概念更加抽象，推理更加严谨，逻辑性更强，适用性更广，理论性更强，因此，学习高等数学困难也更大。于是，读者在学习高等数学的时候，根据数学方法的特点和计算机的广泛应用，应注意以下几点：

(1) 由于数学方法具有高度的抽象性，所以可以通过实例将抽象的内容具体化，并要透过抽象的表达形式，深刻理解基本概念的内涵与实质，正确掌握一些重要的数学思想方法与基本理论。只有把数学的基本概念、基本方法和基本理论掌握好，才能运用数学方法去分析问题和解决问题。

(2) 由于数学方法具有严密的逻辑性，所以一定要培养抽象思维和逻辑思维的能力。这方面的训练主要是做一定数量的习题，做习题不仅为了掌握数学的基本方法，而且更重要的是培养抽象思维和逻辑思维的能力，通过举一反三、触类旁通，培养创新的能力。

(3) 由于数学方法具有应用的广泛性，所以要把学到的数学知识用到实际问题中去。学会把实际问题建成数学模型的方法，并培养运用数学方法分析、解决数学模型的能力。在学习中，要独立思考，勇于提出问题，研究问题，培养创造性思维和自学的能力。

(4) 由于计算机的广泛应用，所以一定要善于利用计算机与数学应用软件来完成一些典型的习题。在培养运用计算机与数学应用软件处理数学问题能力的同时，可以提高对有关问题的感性认识，加深对数学概念及方法的理解。

若在学习数学中注意以上几点，付出努力，学好数学并不难。当你进入数学的自由王国时，就会发现它会给你增添无穷的智慧和力量。

习 题 1

1. 数学方法有哪些特点？
2. 微积分学所研究的两个基本问题及方法是什么？
3. 怎样学习高等数学？