第 1 章　函数、极限与连续

函数是对现实世界中各种变量之间相互依存关系的一种抽象表现，是微积分研究的基本对象。本章对中学所学过的函数知识做简要的复习与总结，并补充有关的函数知识，如邻域、复合函数、有界函数、基本初等函数和初等函数。

1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念

1. 集合

具有某种共同属性的一些对象的全体，称为集合。构成集合的每一个对象称为该集合的元素。通常，用大写字母 **A**，**B**，**C**…等表示集合，用小写字母 a，b，c…等表示集合的元素。如果 x 是集合 **A** 的元素，则称 x 属于 **A**，记作 $x\in \mathbf{A}$；如果 x 不是集合 **A** 的元素，则称 x 不属于 **A**，记作 $x\notin \mathbf{A}$。

用 **N** 表示自然数集合，用 **Z** 表示整数集合，用 **Q** 表示有理数集合，用 **R** 表示实数集合。

2. 集合的表示法

(1) 列举法：把集合的元素按任意顺序一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，称为列举法。

例如，由 1，2，3，4，5 组成的集合，可表示为 $\{1,2,3,4,5\}$。

(2) 描述法：把集合的元素用共同属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，称为描述法，即 $\mathbf{A}=\{x\mid x$ 具有的共同属性$\}$表示集合 **A**。

例如，用 $\{x\mid x^2-4x+3>0\}$ 表示不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解集。

(3) 图形法：用一个平面图形表示一个集合，其中图形上的点表示集合的元素，称为图形法。如图 1-1 所示。

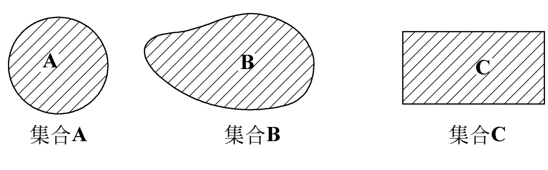


图　1-1

3. 集合的类型

(1) 有限集：含有有限个元素的集合称为有限集。

(2) 无限集：含有无限个元素的集合称为无限集。

(3) 空集：不含任何元素的集合称为空集，记为$\varnothing$。

(4) 全集：在研究某个问题时，把研究的所有对象构成的集合，称为全集，记为 **I** 或 **U**。

4. 子集、集合的相等

定义 1.1.1 设 **A**,**B** 为两个集合，如果集合 **A** 的元素都是集合 **B** 的元素，则称集合 **A** 为集合 **B** 的子集，如图 1-2 所示，记为 $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{B}\supset\mathbf{A}$，读作 **A** 包含于 **B** 或 **B** 包含 **A**。如果集合 **A** 与集合 **B** 含有相同的元素，则称集合 **A** 与集合 **B** 相等，记为 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$，读作 **A** 等于 **B**。

性质：设 **A**,**B**,**C** 为任意集合，U 为全集，则有

(1) $\varnothing\subset\mathbf{A}\subset\mathbf{U}$

(2) $\mathbf{A}\subset\mathbf{B},\mathbf{B}\subset\mathbf{C}\Rightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{A}=\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B}\subset\mathbf{A}$

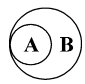


图 1-2

1.1.2 集合的运算

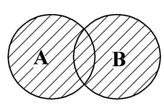
如同数与数之间有加、减、乘、除等各种运算一样，集合与集合之间也有并、交、差、补四种基本运算。

1. 并集

定义 1.1.2 设 **A** 与 **B** 为两个集合，则称 **A** 与 **B** 中所有元素汇总构成的集合为 **A** 与 **B** 的并集，记为 $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$，读作 **A** 并 **B**，即

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{x\mid x\in\mathbf{A}\text{ 或 }x\in\mathbf{B}\}$$

例如，设 $\mathbf{A}=\{1,2,3,4\}$，$\mathbf{B}=\{2,5,7,8\}$，如图 1-3 所示，则 $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{1,2,3,4,5,7,8\}$。



$\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$

图 1-3

性质：

(1) $\varnothing\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cup\mathbf{U}=\mathbf{U}$

(2) $\mathbf{A}\subset(\mathbf{A}\cup\mathbf{B}),\mathbf{B}\subset(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})$

2. 交集

定义 1.1.3 设 **A** 与 **B** 为两个集合，则称 **A** 与 **B** 中所有公共元素汇总构成的集合为 **A** 与 **B** 的交集，记为 $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$，读作 **A** 交 **B**，即

$$\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{x\mid x\in\mathbf{A}\text{ 且 }x\in\mathbf{B}\}$$

例如，设 $\mathbf{A}=\{x \mid -1<x<3\}$，$\mathbf{B}=\{x \mid 0<x<5\}$，如图 1-4 所示，则 $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\{x \mid 0<x<3\}$。

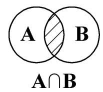


图　1-4

性质：

(1) $\varnothing\cap\mathbf{A}=\varnothing$，$\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}\cap\mathbf{U}=\mathbf{A}$

(2) $\mathbf{A}\supset(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$，$\mathbf{B}\supset(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$

3. 差集

定义 1.1.4　设 **A** 与 **B** 为两个集合，则称由集合 **A** 中去掉集合 **B** 的元素后，由剩下的元素构成的集合为 **A** 与 **B** 的差集，如图 1-5 所示，记为 **A**−**B**，读作 **A** 减 **B**，即

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\{x \mid x\in\mathbf{A}\text{ 且 }x\notin\mathbf{B}\}$$

例如：(1) 设 $\mathbf{A}=\{1,2,3,5,7\}$，$\mathbf{B}=\{2,4,5,6\}$，则 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\{1,3,7\}$。

(2) 设 $\mathbf{A}=\{x \mid 0<x<6\}$，$\mathbf{B}=\{x \mid -2<x<1\}$，则 $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\{x \mid 1\leqslant x<6\}$。

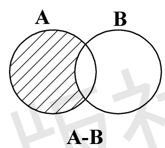


图　1-5

性质：

(1) $\varnothing-\mathbf{A}=\varnothing$，$\mathbf{A}-\varnothing=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}-\mathbf{A}=\varnothing$

(2) $\mathbf{A}-\mathbf{B}\subset\mathbf{A}$

4. 补集

定义 1.1.5　设 **A** 与 **B** 为两个集合，且 $\mathbf{A}\subset\mathbf{B}$，则称 **B**−**A** 为 **A** 关于 **B** 的补集，如图 1-6 所示，记为 $\mathbf{A}_\mathbf{B}^\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{A}_\mathbf{B}^\mathbf{C}=\mathbf{B}-\mathbf{A}=\{x \mid x\in\mathbf{B}\text{ 且 }x\notin\mathbf{A}\}$$

当 $\mathbf{B}=\mathbf{U}$ 时，称 $\mathbf{A}_\mathbf{B}^\mathbf{C}$ 为 **A** 的补集，记为 $\mathbf{A}^\mathbf{C}$（或 $\overline{\mathbf{A}}$ 或 $\mathbf{A}'$）。

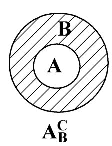


图　1-6

性质：

(1) $\varnothing^\mathbf{C}=\mathbf{U}$，$\mathbf{U}^\mathbf{C}=\varnothing$

(2) $\mathbf{A}^\mathbf{C}\cup\mathbf{A}=\mathbf{U}$，$\mathbf{A}^\mathbf{C}\cap\mathbf{A}=\varnothing$

(3) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})^\mathbf{C}=\mathbf{A}^\mathbf{C}\cap\mathbf{B}^\mathbf{C}$，$(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})^\mathbf{C}=\mathbf{A}^\mathbf{C}\cup\mathbf{B}^\mathbf{C}$

5. 集合的运算律

(1) 交换律

(i) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\mathbf{B}\cup\mathbf{A}$

(ii) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}=\mathbf{B}\cap\mathbf{A}$

(2) 结合律

(i) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cup\mathbf{C}=\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})$

(ii) $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$

(3) 分配律

(i) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})$

(ii) $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})\cup\mathbf{C}=(\mathbf{A}\cup\mathbf{C})\cap(\mathbf{B}\cup\mathbf{C})$

1.1.3　区间、邻域

1. 有限区间

设 a,b 为实数,且 $a<b$。

(1) 开区间:称实数集合$\{x|a<x<b\}$是以 a 为左端点、b 为右端点的开区间,记为(a,b),如图 1-7 所示,即

$$(a,b)=(x \mid a<x<b)$$

图　1-7

(2) 左开右闭区间:称实数集合$\{x|a<x\leqslant b\}$是以 a 为左端点、b 为右端点的左开右闭区间,记为$(a,b]$,如图 1-8 所示,即

$$(a,b]=(x \mid a<x\leqslant b)$$

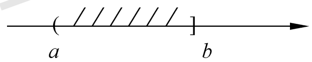


图　1-8

(3) 左闭右开区间:称实数集合$\{x|a\leqslant x<b\}$是以 a 为左端点、b 为右端点的左闭右开区间,记为$[a,b)$,如图 1-9 所示,即

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$

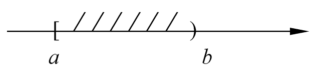


图　1-9

(4) 闭区间:称实数集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$是以 a 为左端点、b 为右端点的闭区间,记为$[a,b]$,如图 1-10 所示,即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

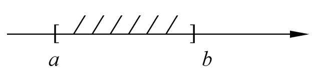


图　1-10

2. 无限区间

(1) $(a,+\infty)=\{x|a<x\}$表示大于 a 的实数集合。

(2) $[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$表示大于等于 a 的实数集合。

(3) $(-\infty,b)=\{x|x<b\}$表示小于 b 的实数集合。

(4) $(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$表示小于等于 b 的实数集合。

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$表示实数集合。

注意“$+\infty$”(读作正无穷大)、“$-\infty$”(读作负无穷大)是引用符号,不能当作数。

3. 邻域

称集合$\{x\,\big|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$为点 x_0 的 δ 邻域,点 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径,如图 1-11 所示。称集合$\{x|0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$为点 x_0 的空心 δ 的邻域,如图 1-12 所示。

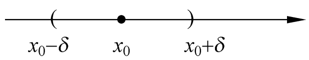


图　1-11

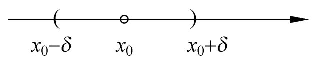


图　1-12

例如:点 1 的 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,点 1 的空心 $\frac{1}{2}$ 邻域为 $\left(\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$。

习题 1.1

1. 用列举法表示下列集合。

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3) 集合$\{x|x-1\leqslant 5$ 的整数$\}$。

2. 用集合的描述法表示下列集合。

(1) 大于 5 的所有实数集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合;

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y=0$ 的交点的集合。

3. 下列集合哪些是空集?

$$\mathbf{A}=\{x\mid x-1=0\},\quad \mathbf{B}=\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$$
$$\mathbf{C}=\{x\mid x<-1,\text{且 } x>0\},\quad \mathbf{D}=\{x\mid x>1\text{ 且 } x<5\}$$
$$\mathbf{E}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\text{ 且 } x+y=3,x,y\in\mathbf{R}\}$$

4. 如果 $\mathbf{A}=\{0,1,2\}$,$\mathbf{B}=\{1,2\}$,下列各种写法,哪些是对的?哪些不对?

$1\in\mathbf{A}$,$0\notin\mathbf{B}$,$\{1\}\in\mathbf{A}$,$1\subset\mathbf{A}$,$\{1\}\subset\mathbf{A}$,$\{0\}\subset\mathbf{B}$,$\mathbf{A}=\mathbf{B}$,$\mathbf{A}\supset\mathbf{B}$,$\varnothing\subset\mathbf{A}$,$\mathbf{A}\subset\mathbf{A}$

5. 如果 $\mathbf{A}$ 是非空集合,下列各个等式哪些是对的?哪些是不对的?

$$\mathbf{A}\cup\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\varnothing,\mathbf{A}\cup\varnothing=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cup\varnothing=\varnothing,\mathbf{A}\cup\mathbf{U}=\mathbf{U},\mathbf{A}\cap\mathbf{U}=\mathbf{A},\mathbf{A}\cap\varnothing=\mathbf{A},$$
$$\mathbf{A}\cap\varnothing=\varnothing,\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{A},\mathbf{A}-\mathbf{A}=\varnothing,\mathbf{A}^{\mathrm{C}}=\mathbf{U}$$

6. 设 $\mathbf{A}=\{x|x^2-16<0\}$，$\mathbf{B}=\{x|x^2-4+3\geqslant 0\}$，$\mathbf{U}=\mathbf{R}$，求：

(1) $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ (2) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ (3) $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ (4) $\mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ (5) $\mathbf{B}^{\mathbf{C}}$ (6) $(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})^{\mathbf{C}}$

7. 设 $\mathbf{A}=\{a,b,c\}$，$\mathbf{B}=\{b,e,f\}$，$\mathbf{C}=\{a,c,f\}$，求：

(1) $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$ (2) $\mathbf{B}\cap\mathbf{C}$ (3) $\mathbf{A}\cap\mathbf{C}$ (4) $(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}$ (5) $(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})$

1.2 函　　数

1.2.1 函数的概念

1. 函数的定义

定义 1.2.1 设 f 是集合 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 之间的一种对应关系，若对 $\mathbf{X}$ 中的每一个元素 x，通过 f 都有 $\mathbf{Y}$ 中唯一确定的元素 y 与 x 对应，则称 f 为从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{Y}$ 的映射，记为

$$f:\mathbf{X}\rightarrow\mathbf{Y} \text{ 或 } y=f(x),x\in\mathbf{X}$$

若 $\mathbf{X}$ 与 $\mathbf{Y}$ 都是实数集合，则称映射 f 为函数，称 $\mathbf{X}$ 为 f 的定义域，记为 $\mathbf{D}_\mathrm{f}$；称函数值的集合 $\{y|y=f(x),x\in\mathbf{X}\}$ 为 f 的值域，记为 $\mathbf{R}_\mathrm{f}$。

设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，定义域为 $\mathbf{D}_\mathrm{f}$，在平面直角坐标系中，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值，这样，在 $\mathbf{D}_\mathrm{f}$ 内的每一个 x 及相应的函数值 $y=f(x)$ 就确定了一个点 $P(x,y)$，当 x 在 $\mathbf{D}_\mathrm{f}$ 内变动时，点 P 便在平面上移动，所有这些点的集合 $\{P(x,y)|x\in\mathbf{D}_\mathrm{f},y=f(x)\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的图像。一般地，函数 $y=f(x)$ 的图像是平面内的一条曲线。

如果两个函数的定义域相同，对应关系相同，则称这两个函数是相同的(或相等的)，否则称这两个函数是不相同的(或不相等的)，至于自变量和因变量用什么记号表示，则没有什么关系。因此，只要定义域相同，对应关系 f 相同，则函数 $y=f(x)$ 与 $u=f(t)$ 表示同一个函数。

2. 函数的表示法

常用函数的表示法有三种：公式法或解析法、表格法或列表法、图形法或图像法。

下面各举一个例子。

例如，$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$

这是用公式表示 y 是 x 的函数，它的定义域 $\mathbf{D}_\mathrm{f}=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3]$。

例如，某城市一年里各月毛线的零售量(单位：百千克)如表 1-1 所示，它的定义域是 $\mathbf{D}_\mathrm{f}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。

表 1-1

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 y	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

例如，某河道的断面图形，其深度 y 与岸边一点 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系由图 1-13 中的曲线所示。

这里，深度 y 是测距 x 的函数是用图形表示的，它的定义域为 $\mathbf{D_f}=[0,b]$。

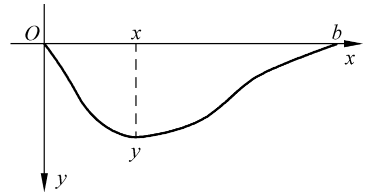


图　1-13

3. 分段函数

定义 1.2.2　设给定一个函数，如果对其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而至少要用两个数学表达式表示，则称这类函数为分段函数。

例如：$y=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x-1 & x>0 \end{cases}$ 与 $y=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$是的分段函数。

分段函数的定义域一般都分成若干部分，称每一部分为一段，段与段之间的交接点为分界点或分段点。注意，分段函数是至少用两个数学式子表示同一个函数，而不是表示几个函数。

4. 隐函数

定义 1.2.3　由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数。其中因变量 y 不一定能用自变量 x 直接表示出来。例如：由方程 $xe^y-y+1=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系就不能写成 $y=f(x)$（显函数）形式，因而称为隐函数。

1.2.2　函数的几何特性

1. 单调性

定义 1.2.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若对 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调增加。反之，若 (a,b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内严格单调减少。若 $f(x)$ 在 $\mathbf{D_f}$ 上严格单调增加，则称 $f(x)$ 为严格单调增加函数，若 $f(x)$ 在 $\mathbf{D_f}$ 上严格单调减少，则称 $f(x)$ 为严格单调减少函数。严格单调增加函数与严格单调减少函数统称为严格单调函数。

在几何上，严格单调增加函数的图形是随着 x 的增加而上升的曲线；严格单调减少函数的图形是随着 x 的增加而下降的曲线。

例如 $y=x^2$ 不是严格单调函数，它在 $(-\infty,0)$ 内严格单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加，$y=x^3$ 是严格单调增加函数，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是严格单调减少函数。

2. 奇偶性

定义 1.2.5　设有函数 $y=f(x)$，若对任意 $x\in\mathbf{D_f}$，$\mathbf{D_f}$ 关于原点对称，都有 $f(-x)=$

$f(x)$,则称函数 $f(x)$为偶函数;若对任意的 $x\in \mathbf{D}_f$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为奇函数。

在几何上,偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称。

3. 周期性

定义 1.2.6 设有函数 $y=f(x)$,若存在常数 $\omega>0$,对一切 $x\in \mathbf{D}_f$,有 $f(x+\omega)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数,ω 为 $f(x)$的一个周期。

在几何上,周期函数图形的特点是自变量每增加或减少一个周期后,图形重复出现。

例如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都是周期函数,周期都是 $2k\pi(k\in \mathbf{Z})$,最小正周期都是 2π;$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 都是周期函数,周期都是 $k\pi(k\in \mathbf{Z})$,最小正周期都是 π。

习惯上,如果一个函数存在最小正周期,则称这个最小正周期为函数的周期。

4. 有界性

定义 1.2.7 设有函数 $y=f(x)$,若存在两个常数 A 和 B,使对一切 $x\in(a,b)$,有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)上有界。若 $f(x)$在 $\mathbf{D}_f$上有界,则简称为 $f(x)$有界。

定义 1.2.8 设有函数 $y=f(x)$,若存在常数 $M>0$,使对一切 $x\in(a,b)$,有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)上有界。

定义 1.2.7 与定义 1.2.8 等价。

例如 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$,$y=C$($C$ 为常数)都是有界函数。

在几何上,有界函数的图形介于两条水平直线 $y=A$ 与 $y=B$ 之间。

例 1.2.1 下列函数有界的有( )。

(A) $\dfrac{2x}{1+x^2}$ (B) $(-1)\dfrac{n(n+1)}{2}\cos\dfrac{x}{n}$ (C) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (D) $2\sin 3x+3\cos x-1$

解 $\because \left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|=\dfrac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$,$\left|(-1)\dfrac{n(n+1)}{2}\cos\dfrac{x}{n}\right|\leqslant 1$,$0<\dfrac{1}{1+x^2}\leqslant 1$,

$|2\sin 3x+3\cos x-1|\leqslant 2|\sin 3x|+3|\cos x|+1\leqslant 2+3+1=6$

$\therefore$选(A),(B),(C),(D)。

例 1.2.2 将函数 $y=5-|2x-1|$用分段函数表示。

解 $\mathbf{D}_f=(-\infty,+\infty)$,

令$|2x-1|=0$,得 $x=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore y=5-|2x-1|=\begin{cases}5-(1-2x) & x<\dfrac{1}{2}\\ 5-(2x-1) & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}4+2x & x<\dfrac{1}{2}\\ 6-2x & x\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

1.2.3　复合函数和反函数

1. 复合函数

定义 1.2.9　设函数 $y=f(u)$的定义域为 $\mathbf{D_f}$，$u=g(x)$的值域为 $\mathbf{R_g}$，若 $\mathbf{D_f}\cap\mathbf{R_g}\neq\varnothing$，则称 $y=f[g(x)]$为 $y=f(u)$与 $u=g(x)$的复合函数。其中 $y=f(u)$叫作外函数，$u=g(x)$叫作内函数，u 叫作中间变量。

例 1.2.3　已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=a-x^2$。讨论当 $a=1$，$a=-1$ 时，$y=f[g(x)]$是不是复合函数？

解　(1) $a=1$ 时，有

$$y=\sqrt{u},\quad u=1-x^2$$
$$\mathbf{D_f}=[0,+\infty],\quad \mathbf{R_g}=(-\infty,1]$$
$$\mathbf{D_f}\cap\mathbf{R_g}=[0,1]\neq\varnothing$$

所以，$y=f[g(x)]=\sqrt{1-x^2}$是复合函数。

令 $1-x^2\geqslant 0$，得$|x|\leqslant 1$，于是复合函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域为$[-1,1]$。

(2) $a=-1$ 时，有

$$y=\sqrt{u},\quad u=-1-x^2,$$
$$\mathbf{D_f}=[0,+\infty],\quad \mathbf{R_g}=(-\infty,-1]$$
$$\mathbf{D_f}\cap\mathbf{R_g}=\varnothing$$

所以 $y=f[g(x)]=\sqrt{-1-x^2}$不是复合函数。

例 1.2.4　(1) 如果 $y=\sqrt{u}$，$u=2+v^2$，$v=\cos x$，将 y 表示为 x 的函数；

(2) 如果 $f(x)=3x^3+2x$，$g(x)=\lg(1+x)$，求 $f[g(x)]$。

解　(1) $y=\sqrt{2+v^2}=\sqrt{2+\cos^2 x}$

(2) $f[g(x)]=f[\lg(1+x)]=3\lg^3(1+x)+2\lg(1+x)$

例 1.2.5　分析下列复合函数的复合结构。

(1) $y=\sin e^{x^2+x}$　　　(2) $y=\ln\cos\sqrt{x^2+1}$

解　(1) 最外层是 $y=\sin u$，第二层是 $u=e^v$，内层是 $v=x^2+x$，这里的 u 和 v 都是中间变量。

(2) 最外层是 $y=\ln u$，第二层是 $u=\cos v$，第三层是 $v=\sqrt{w}$，最内层是 $w=x^2+1$，这里的 u，v 和 w 都是中间变量。

评注　分析复合函数 $y=f[g(x)]$的复合结构，先写出最外层函数 $y=f(u)$，后写出内层函数 $u=g(x)$，若内层函数仍为复合函数，要继续分解，直到最后一个函数是由基本初等函数与常数函数经过有限次四则运算所得到的函数为止。

2. 反函数

(1) 反函数概念

定义 1.2.10　设 $y=f(x)$为给定的一个函数，如果对其值域 $\mathbf{R_f}$中的任意一值 y，都可以通过关系式 $y=f(x)$在其定义域 $\mathbf{D_f}$中确定唯一的一个 x 与它对应，则得到一个定义

在 $\mathbf{R_f}$上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数,称此函数为 $y=f(x)$的反函数,记为

$$f^{-1}: \mathbf{R_f} \to \mathbf{D_f} \quad 或 \quad x=f^{-1}(y)$$

习惯上,又把 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$记为 $y=f^{-1}(x)$,此时其定义域 $\mathbf{D}_{\mathbf{f}^{-1}}=\mathbf{R_f}$,值域 $\mathbf{R}_{\mathbf{f}^{-1}}=\mathbf{D_f}$。

$y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称。

(2) 反函数存在定理

定理 1.2.1 若函数 $y=f(x)$是严格单调增加(或减少)的,则存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,且此反函数也是严格单调增加(或减少)的。

例如 $y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$是严格单调增加函数,因此它有反函数 $y=\sqrt[3]{x}, x\in(-\infty,+\infty)$,且 $y=\sqrt[3]{x}$也是严格单调增加函数。

例 1.2.6 求下列函数的反函数。

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ (2) $y=1+\ln(3x+2)$

解 (1) 因为$(x-2)y=x+2\Rightarrow xy-x=2y+2\Rightarrow x=\dfrac{2y+2}{y-1}$

所以反函数为 $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$。

(2) 因为 $\ln(3x+2)=y-1\Rightarrow e^{\ln(3x+2)}=e^{y-1}\Rightarrow 3x+2=e^{y-1}\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}(e^{y-1}-2)$

所以反函数为 $y=\dfrac{1}{3}(e^{x-1}-2)$。

评注 求 $y=f(x)$的反函数:(1)以 x 为未知数解方程 $y=f(x)$得 $x=f^{-1}(y)$;(2)反函数为 $y=f^{-1}(x)$。

例 1.2.7 求下列函数的反函数。

(1) $y=x^2-1, x\geqslant 0$ (2) $y=\sqrt{x}-1, x\geqslant 1$

解 (1) $x^2=y+1\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+1}$,因为 $x\geqslant 0$,所以 $x=\sqrt{y+1}$

又因为 $y=x^2-1, x\geqslant 0$,所以 $y\geqslant -1$

因此反函数为 $y=\sqrt{x+1}, x\geqslant -1$。

(2) $\sqrt{x}=y+1\Rightarrow x=(y+1)^2$,因为 $y=\sqrt{x}-1, x\geqslant 1$,所以 $y\geqslant 0$

因此反函数为 $y=(x+1)^2, x\geqslant 0$。

评注 在某个定义域上求 $y=f(x)$的反函数:(1)以 x 为未知数解方程 $y=f(x)$得 $x=f^{-1}(y)$;(2)由 $y=f(x)$的定义域求出 y 的值域;(3)反函数为 $y=f^{-1}(x)$,x 在某个定义域上。

3. 反三角函数

(1) 反正弦函数

定义 1.2.11 函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的反函数叫作反正弦函数,记为 $y=\arcsin x$,它的定义域是$[-1,1]$,值域是$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$。

定理 1.2.2　① $\sin(\arcsin x)=x, x\in[-1,1], \arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

② $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上是严格单调增加，有界，奇函数。

例 1.2.8　常用的反正弦函数值有：

$$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}\qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}\qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 0=0\qquad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\qquad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$$

（2）反余弦函数

定义 1.2.12　函数 $y=\cos x$ 在$[0,\pi]$上的反函数叫作反余弦函数，记为 $y=\arccos x$，它的定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$。

定理 1.2.3　① $\cos(\arccos x)=x, x\in[-1,1], \arccos x\in[0,\pi]$；

② $y=\arccos x$ 在$[-1,1]$上是严格单调减少且有界函数；

③ $\arccos(-x)=\pi-\arccos x, x\in[-1,1]$。

例 1.2.9　常用的反余弦函数值有：

$$\arccos(-1)=\pi\qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{6}\pi$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}\qquad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}\qquad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}\qquad \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\arccos 1=0$$

（3）反正切函数

定义 1.2.13　函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数叫作反正切函数，记为 $y=\arctan x$，它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$。

定理 1.2.4　① $\tan(\arctan x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

② $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加，有界，奇函数。

例 1.2.10　常用的反正切函数值有：

$$\arctan 1=\frac{\pi}{4}\arctan 0=0$$

$$\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}\quad\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$$

(4) 反余切函数

定义 1.2.14 函数 $y=\cot x$ 在$(0,\pi)$上的反函数叫作反余切函数,记为 $y=\operatorname{arccot}x$,它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,\pi)$。

定理 1.2.5 ① $\cot(\operatorname{arccot}x)=x,x\in(-\infty,+\infty),\operatorname{arccot}x\in(0,\pi)$;

② $y=\operatorname{arccot}x$ 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调减少,有界。

$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot}x,x\in(-\infty,+\infty)$。

例 1.2.11 常用的反余切函数值有:

$$\operatorname{arccot}0=\frac{\pi}{2}\qquad\operatorname{arccot}1=\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}\qquad\operatorname{arccot}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$$

1.2.4 初等函数

1. 基本初等函数

定义 1.2.15 把下列五类函数:

幂函数 $y=x^{a}$(a 为任意实数)

指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$

对数函数 $y=\log a^{x}(a>0,a\neq1)$

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot}x$

统称为基本初等函数。

例 1.2.12 下列函数中是基本初等函数的有(　　)。

(A) $y=\sqrt{x}$　　(B) $y=2x+1$　　(C) $y=\sin e^{x}$　　(D) $y=\ln\sin x$

(E) $y=3^{x}$　　(F) $y=1+x+x^{2}$

解 $y=\sqrt{x}$为幂函数,$y=3^{x}$为指数函数,选(A),(E)。

注意:复合函数不是基本初等函数。

2. 初等函数

定义 1.2.16 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算或复合运算而得到的函数统称为初等函数。

由定义易知,基本初等函数是初等函数。初等函数是能用一个数学表达式表示的函数,一般地,分段函数与绝对值函数往往不是初等函数。

例 1.2.13 下列函数是初等函数的有(　　)。

(A) $y=\ln x+\arctan\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1+\sin x}}$　　(B) $y=x$

(C) $y=C$(C 为常数)　　(D) $y=\sin\ln(x^{2}+1)$

（E）$y=\begin{cases} x^2 & x>0 \\ 2\cos x & x\leqslant 0 \end{cases}$　　　　（G）$y=\ln|x|$

解　依定义，选（A），（B），（C），（D）。

微积分的研究对象是函数，主要是研究初等函数，对于非初等函数，分段函数与绝对值函数是两类重要例子，在学习中要引起足够的重视。

习题 1.2

1．求下列函数的定义域。

（1）$y=e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}$　　（2）$y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

（3）$y=\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}+\ln(x+1)(4-x)$

（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+3^{\arccos x}+\dfrac{1}{x}$

2．求下列函数的定义域。

（1）$f(x)=\begin{cases} 0 & 0\leqslant x<1 \\ x^2+1 & 1<x<2 \\ x-1 & 2\leqslant x<10 \end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x|\leqslant 1 \\ x^2-1 & 1<|x|<4 \end{cases}$

3．设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域。

（1）$f(x^2)$　（2）$f(\sin x)$　（3）$f(x+a)(a>0)$　（4）$f\left(\lg\dfrac{1}{x}\right)$

4．设 $f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2 & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$，求下列函数的定义域。

（1）$f(2x)$　（2）$f(x-2)$　（3）$g(x)=f(2x)+f(x-2)$

5．设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f(-x)$，$f(x+1)$，$f(x)+1$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$，$f\left[f\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$。

6．设 $g(x)=\begin{cases} 2^x & 1<x<0 \\ 2 & 0\leqslant x<1 \\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3 \end{cases}$，求 $g(3)$，$g(2)$，$g(0)$，$g(0.5)$，$g(-0.5)$。

7．设 $f(x)=\begin{cases} |\sin x| & |x|>1 \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}$，求 $f(1)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$。

8．设 $f(x)=\begin{cases} x-3 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2+1 & 1<x\leqslant 5 \end{cases}$，求 $f(x+1)$。

9．将函数 $y=|3x+1|+2$ 用分段函数表示。

10. (1) $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1+x}$,求 $f(x)$;

(2) 设 $f(e^{-x})=-e^{-2x}$,求 $f(x)$;

(3) 设 $f(x+4)=\begin{cases} x^2+4 & 1<x\leqslant 4 \\ \frac{1}{x-2} & 2<x<4 \end{cases}$,求 $f(x)$;

(4) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}\ (x<0)$,求 $f(x)$。

11. 求下列函数的反函数。

(1) $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ (2) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$

(3) $y=1+\lg(x+2)$ (4) $y=3^{2x+5}$

(5) $y=2\sin 3x$ (6) $y=\frac{x+2}{x-2}$

12. 求下列函数的反函数。

(1) $y=x^2,x\leqslant 0$ (2) $y=-\sqrt[3]{x},x\geqslant 0$

(3) $y=\sqrt[3]{x}-1,x\leqslant 0$ (4) $y=\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1$

13. 求 $y=\begin{cases} x^2-1 & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2 & -1\leqslant x<0 \end{cases}$ 的反函数。

14. 分别就 $a=2,a=\frac{1}{2},a=-2$ 时讨论 $y=\lg(a-\sin x)$ 是不是复合函数,如果是复合函数,求其定义域。

15. 设 $f(x)=2x^2+x,g(x)=e^{x-1}$,求 $f[g(x)],g[f(x)]$。

16. 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=\sin^3 x^2$ (2) $y=\ln\sin(1-x)$

微积分的研究对象是函数,使用的基本方法是极限的方法。下面几节是整个微积分学的基础,主要讨论极限的概念与性质、极限的计算和函数的连续性。

1.3 数列的极限

1.3.1 数列

1. 数列定义

定义 1.3.1 无穷多个数按照一定的次序排列的一列数

$$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$$

称为数列,记为$\{x_n\}$,或者说,数列是定义在自然数集合上的函数,

$$x_n=f(n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

数列中的每一个数称为数列的项,第 n 项 x_n 也称为数列的通项或一般项。

例 1.3.1 数列的例子。

(1) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$: $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(2) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$：$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

(3) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$：$\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

(4) $\{2n\}$：$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

(5) $\{(-1)^{n-1}\}$：$1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

2. 单调数列

定义 1.3.2　设$\{x_n\}$为数列，若

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots$$

则称$\{x_n\}$为单调增加数列；若

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots$$

则称$\{x_n\}$为单调减少数列。单调增加数列与单调减少数列统称为单调数列。

例如：例 1.3.1 中的(1)和(4)为单调增加数列，(2)和(3)为单调减少数列，(5)不是单调数列。

3. 有界数列

定义 1.3.3　设$\{x_n\}$为数列，若存在 $M>0$，使得对一切自然数 n，有$|x_n|\leqslant M$，则称$\{x_n\}$为有界数列。若这样的 M 不存在，则称$\{x_n\}$为无界数列。

例如：例 1.3.1 中的(1)(2)(3)(5)为有界数列，(4)为无界数列。

若数列$\{x_n\}$既是单调数列，又是有界数列，则称$\{x_n\}$为单调有界数列。例如：例 1.3.1 中的(1)(2)(3)为单调有界数列。

1.3.2　数列的极限

数列一般项 $x_n=f(n)$是随着 n 的变化而变化的，数列的极限就是研究当 n 取自然数无限增大时，x_n的变化趋势是什么。

观察例 1.3.1，我们看出，当 n 取自然数无限增大时，各数列的变化趋势各异：数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$，当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{n}{n+1}$单调增加，无限地接近于常数 1；数列$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$与$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$，当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{1}{n}$与 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$单调减少，无限地接近于常数 0；数列$\{2n\}$，当 n 无限增大时，$x_n=2n$ 单调增加且无限增大；数列$\{(-1)^{n-1}\}$，当 n 无限增大时，$x_n=(-1)^{(n-1)}$总在 1 与-1 两个数上下跳跃，不趋近于一个常数。

纵观例 1.3.1 中的这五个数列，前三个数列，当 n 取自然数无限增大时，x_n无限地趋于某一个确定的常数；后两个数列，当 n 取自然数无限增大时，x_n都不无限地趋于某个确定的常数。前三个数列的这种共同特点就是数列极限的概念。

定义 1.3.4　设$\{x_n\}$为数列，A 为常数。若当 n 取自然数无限增大时，x_n无限地接近于常数 A，则称当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$的极限为 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n = A(n\to\infty)$$

亦称数列$\{x_n\}$收敛，即当 $n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$收敛于 A；否则，就称数列$\{x_n\}$没有极限或发散。

根据数列极限定义,例 1.3.1 中各数列的极限:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}2n$ 不存在,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ 不存在。

例 1.3.2 求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n(|q|<1)$

解 按照定义,易知

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n=0$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$

由(1),(2),(3),容易推出

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n(|q|<1)=0$

例 1.3.3 求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)=1$。

评注 求数列极限时,就是求当 $n\to\infty$ 时,通项 a_n 是否无限趋向于某一个确定的常数 A。

定理 设数列$\{x_n\}$:

$$x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{2n-1},x_{2n},\cdots$$

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=A$ 与$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=B$ 都存在且相等,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=B$;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$与$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}$至少有一个不存在,或虽都存在但不相等,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在。

例 1.3.4 设数列$\{x_n\}$:

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{n},\frac{1}{2^n},\cdots$求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

例 1.3.5 求$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}$。

解 当 n 取奇数时,

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

当 n 取偶数时

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{2n+1}\right)=-\frac{1}{2}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2n+1}$不存在。

1.3.3　收敛数列的主要性质

性质 1（保号性）　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）。

性质 2（不等式性质）　如果数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\geqslant0$（或 $x_n\leqslant0$），且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，那么 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）。

性质 3（有界性）　如果数列 x_n 收敛，那么数列 x_n 必有界。

习题 1.3

1. 下列数列极限存在的有（　　）。

(A) 10,10,10,10,…　　(B) $\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{4}{5}\cdots$

(C) $x_n=\begin{cases}\dfrac{n}{1+n} & n\text{ 是奇数}\\[2mm] \dfrac{n}{1-n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$　　(D) $x_n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n} & n\text{ 是奇数}\\ (-1)^n & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

2. 下列数列收敛的有（　　）。

(A) 0.9,0.99,0.999,0.9999,…

(B) $1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\cdots$

(C) $x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$

(D) $x_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n} & n\text{ 为奇数}\\[2mm] \dfrac{2^n+1}{2^n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

3. 下列数列收敛于 0 的有（　　）。

(A) $\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{8},0,\cdots$

(B) $1,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{4},\frac{1}{9},\cdots$

(C) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$

(D) $x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & n\text{ 为奇数}\\[2mm] \dfrac{1}{n+1} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

4. 数列 1,0,−1,1,0,−1,…（　　）。

(A) 收敛于-1　　(B) 收敛于1　　(C) 收敛于0　　(D) 发散

5. 当$n\to\infty$时，数列极限不存在的是(　　)。

(A) $1,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{4},\cdots$

(B) $1,\frac{3}{2},\frac{1}{3},\frac{5}{4},\frac{1}{5},\frac{7}{6},\frac{1}{7},\cdots$

(C) $1+1,\frac{1}{2}+\frac{3}{4},\frac{1}{3}+\frac{5}{9},\frac{1}{4}+\frac{7}{16},\cdots,\frac{1}{n}+\frac{2n-1}{n^2},\cdots$

(D) $x_n=\begin{cases}\dfrac{2^n-1}{2^n} & n\text{ 为奇数}\\ \dfrac{2^n+1}{2^n} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

1.4　函数的极限

函数$y=f(x)$随着自变量x的变化而变化，函数的极限是研究，当x按照某种给定的方式先变化时，$f(x)$的变化趋势是什么。

按自变量趋于无穷和自变量趋于定数的两类变化方式，函数的极限分为两类，下面分别讨论这两类极限。

1.4.1　自变量趋于无穷时，函数的极限

1. 当$x\to+\infty$时，函数$f(x)$的极限

例 1.4.1　设函数$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

如图1-14所示，考察当x无限增大时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的变化趋势：当$x$无限增大时，即$x$沿着$x$轴一直向右边跑下去时，曲线$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$在$x$轴的右边无限接近子$x$轴，即纵坐标$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$无限地接近于常数0，这时，我们就称当$x\to+\infty$时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的极限为0。

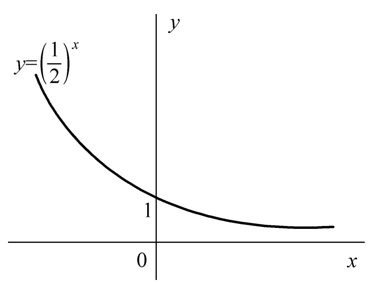


图　1-14

定义 1.4.1　设函数$f(x)$在$(a,+\infty)$内有定义，A为常数。若当x无限增大时，$f(x)$无限地接近于常数A，则称当$x\to+\infty$时，$f(x)$的极限为A，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to +\infty)$$

依定义有 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$。

2. 当 $x \to -\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1.4.2　设函数 $y=2^x$，如图 1-15 所示，考察当 x 无限减小时，$y=2^x$ 的变化趋势：当 x 无限减小时，即 x 沿着 x 轴一直向左边跑下去，曲线 $y=2^x$ 在 x 轴的左边无限地接近于 x 轴，即纵坐标 $y=2^x$ 无限地接近于常数 0。这时，我们就称当 $x \to -\infty$ 时，$y=2^x$ 的极限为 0。

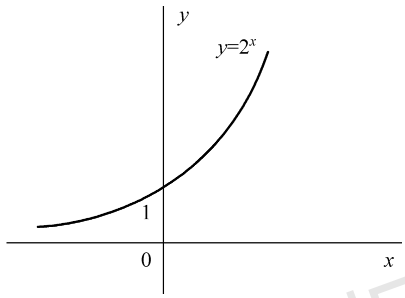


图　1-15

定义 1.4.2　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b)$ 内有定义，A 为常数。若当 x 无限地减小时，$f(x)$ 无限地接近于常数 A，则称当 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A(x \to -\infty)$$

依定义有 $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$。

3. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1.4.3　设函数 $y=1+\dfrac{1}{x}$，如图 1-16 所示，考察当 $|x|$ 无限增大时，$y=1+\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势：当 $|x|$ 无限增大时，即 x 沿着 x 轴，向左、右两边跑下去时，曲线 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 在直线 $y=1$ 的两边都无限地接近于直线 $y=1$，即纵坐标 $y=1+\dfrac{1}{x}$ 无限接近于常数 1。这时，我们称当 $x \to \infty$ 时，$y=1+\dfrac{1}{x}$ 的极限为 1。

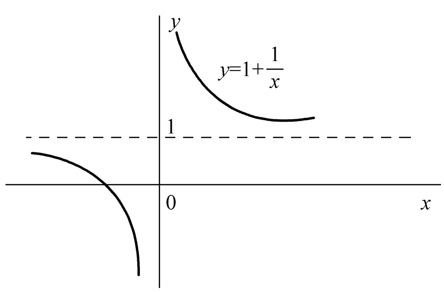


图　1-16

定义 1.4.3 设函数 $f(x)$在$(-\infty,b)\cup(a,+\infty)$内有定义,$A$ 为常数。若当$|x|$无限增大时,$f(x)$无限地接近于常数 A,则称当 $x\to\infty$时,$f(x)$的极限为 A,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

依定义有$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$。

4. 三种极限的关系

当 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$时 $f(x)$的极限称为单边极限,当 $x\to\infty$时 $f(x)$的极限为双边极限,依定义,容易得到双边极限与单边极限的关系。

定理 1.4.1 设 A 为常数,则有

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$$

推论 1 若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$都存在但不相等,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在。

推论 2 若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$至少有一个不存在,则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在。

根据三种极限的关系,我们可以用单边极限确定双边极限。

例 1.4.4 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

解 如图 1-17 所示,因为 $y=\arctan x$ 严格单调增加,且

$$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2},\quad -\infty<x<+\infty$$

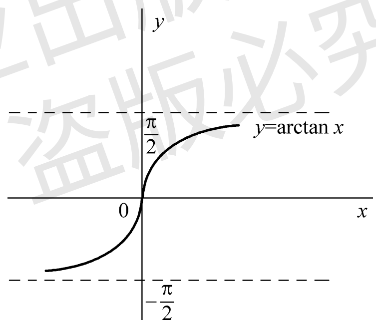


图 1-17

所以当 $x\to+\infty$时,$y=\arctan x\to\dfrac{\pi}{2}$,

当 $x\to-\infty$时,$y=\arctan x\to-\dfrac{\pi}{2}$,

依定义:(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$。

依推论 1,(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在。

例 1.4.5 依定义,易得

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}x$ 不存在。

例 1.4.6　依定义，易知下列极限均不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x$　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x$　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$

例 1.4.7　设 C 为常数，依定义，易得

$$\lim_{x\to-\infty}C=C,\ \lim_{x\to+\infty}C=C,\ \lim_{x\to\infty}C=C$$

1.4.2　自变量趋于常数时，函数的极限

1. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限

例 1.4.8　设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，考察当 x 从 1 的两侧无限地接近于 1 且不等于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势，见表 1-2。

表　1-2

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.9999	……1.000001	1.01	1.25	1.5
$f(x)$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.9999	……2.000001	2.01	2.25	2.5

从表中看出，当 x 趋近于 1 时，$f(x)$ 无限地趋近于 2。这时，我们就称当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限为 2。

定义 1.4.4　设 $f(x)$ 在 x_0 的两侧有定义，A 为常数。若当 x 从 x_0 的两侧无限地接近于 x_0 且不等于 x_0 时，$f(x)$ 无限地接近于常数 A，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad\text{或}\quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

上面极限称为双侧极限。

依定义有 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

例 1.4.9　设 $f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & x>0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

解　由图 1-18，容易观察到，当 x 从 0 的左侧趋于 0 时，$f(x)$ 趋于 1；当 x 从 0 的右侧趋于 0 时，$f(x)$ 趋于 0，因此，当 x 从 0 的两侧趋于 0 时，$f(x)$ 不能趋于一个常数，依定义 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在。

在例 1.4.9 中，当 x 从 0 的左侧趋于 0 时，$f(x)$ 无限地接近 1，这时，我们说当 $x\to0^-$ 时，$f(x)$ 的左极限为 1；当 x 从 0 的右侧趋于 0 时，$f(x)$ 无限接近于 0，这时，我们说当 $x\to0^+$ 时，$f(x)$ 的右极限为 0。

2. 当 $x\to x_0^-$（或 $x\to x_0^+$）时，$f(x)$ 的左（或右）极限

定义 1.4.5　设 $f(x)$ 在 x_0 的左侧有定义，A 为常数，若当 x 从 x_0 的左侧无限地接近于 x_0 且不等于 x_0 时，$f(x)$ 无限地接近于常数 A，则称当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 的左极限为 A，记为

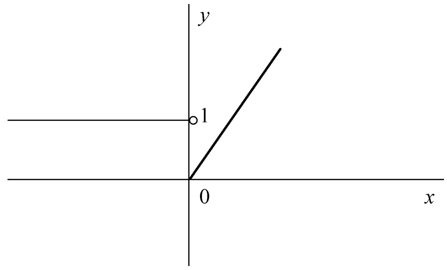


图 1-18

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A,\quad f(x) \to A(x \to x_0^-) \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

定义 1.4.6 设 $f(x)$在 x_0 的右侧有定义,A 为常数,若当 x 从 x_0 的右侧无限地接近于 x_0 且不等于 x_0 时,$f(x)$无限地接近于常数 A,则称当 $x \to x_0^+$ 时,$f(x)$的右极限为 A,记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A,\quad f(x) \to A(x \to x_0^+) \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

左极限与右极限统称为单侧极限。

3. 三种极限的关系

依定义,易知双侧极限与单侧极限的关系如下面定理与推论所示。

定理 1.4.2 设 A 为常数,则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A$$

推论 1 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$都存在但不相等,则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

推论 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$至少有一个不存在,则$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

由三种极限的关系,我们可以利用单侧极限研究双侧极限。

例 1.4.10 (1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x<0 \\ \sqrt{2x+1} & x>0 \end{cases}$,求$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x\leqslant 0 \\ x^2 & x>0 \end{cases}$,求$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$。

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{2x+1}=1$,$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-} e^x=1$,所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=1$。

(2) 因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-} (x-1)=-1$,$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} x^2=0$,因此 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$,所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在。

评注 求分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\leqslant x_0 \\ h(x) & x>x_0 \end{cases}$或 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x<x_0 \\ h(x) & x\geqslant x_0 \end{cases}$或 $f(x)=\begin{cases} g(x) & x<x_0 \\ A & x=x_0 \\ h(x) & x\geqslant x_0 \end{cases}$在分界点 x_0 的极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,则有如下步骤:

(1) 求左、右极限 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^-} g(x)$,$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} h(x)$;

(2) 利用双侧极限存在与单侧极限的关系,确定极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$。

例 1.4.11　(1) 已知 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$；(2) 已知 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$。

解　(1) 设 $f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$，则

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

(2) 设 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}=\begin{cases}-\frac{\sin x}{x} & -\pi<x<0\\ \frac{\sin x}{x} & 0<x<\pi\end{cases}$，则

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

评注　求绝对值函数的极限，(1)化绝对值函数为分段函数；(2)按分段函数的极限求极限。

1.4.3　极限的性质

性质 1(局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则存在 x_0 的某个邻域，当 x 在该领域内($x\neq x_0$)时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)。

性质 2(不等式性质)　如果 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$)。

性质 3(有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则存在 x_0 的某个邻域，$f(x)$ 在这个邻域($x\neq x_0$)内有界。

记“$n\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$”为“$\cdot$”，则七种极限可记为

$$\lim_{\cdot}f(x)=A$$

习题 1.4

1. $f(x)$ 在 x_0 点有定义，是 $f(x)$ 在 x_0 点有极限的(　　)。
   (A) 必要条件　(B) 充分条件　(C) 充要条件　(D) 无关条件
2. $f(x)$ 在 x_0 点的左、右极限都存在且相等，是 $f(x)$ 在 x_0 点有极限的(　　)。
   (A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件
   (C) 充分必要条件　(D) 无关条件
3. 当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{x_n\}$ 有极限，是数列 $\{x_n\}$ 有界的(　　)。
   (A) 必要条件　(B) 充分条件　(C) 充要条件　(D) 无关条件

4. 下列极限不存在的有(　　)。

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$　　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan x$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arccot} x$

1.5　无穷小量与无穷大量

1.5.1　无穷小量

1. 无穷小量定义

定义 1.5.1　若$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$则称当·时,$f(x)$是无穷小量,简称为无穷小,即以零为极限的函数称为无穷小量。

例如:(1) ∵$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$

∴当 $n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n}$是无穷小量。

(2) ∵$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$

∴当 $x\to+\infty$时,$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$是无穷小量。

(3) ∵$\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

∴当 $x\to 0$ 时,x^2 是无穷小量。

(4) ∵$\lim\limits_{x\to 1}x^2\neq 0$

∴当 $x\to 1$ 时,x^2 不是无穷小量。

2. 无穷小量与有极限变量的关系

定理 1.5.1　设 A 为常数,则有

$$\lim_{\bullet} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{\bullet}[f(x)-A]=0$$

3. 无穷小量的性质

性质 1　无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量。即:若$\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$,$g(x)$有界,则有

$$\lim_{\bullet}[f(x)g(x)]=0$$

例如(1) ∵$\lim\limits_{x\to 0}x=0$,$\sin\dfrac{1}{x}$有界,

∴$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$。

(2) ∵$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,$\sin x$ 有界,

∴$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\sin x\right)=0$。

性质 2　两个无穷小量的代数和仍为无穷小量。即，若 $\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x)=0$，则 $\lim\limits_{\bullet}[f(x)\pm g(x)]=0$。

性质 3　两个无穷小量的乘积仍为无穷小量。即，若 $\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x)=0$，则 $\lim\limits_{\bullet}[f(x)g(x)]=0$。

4. 无穷小量的阶

无穷小量虽然都是趋于 0 的变量，但不同的无穷小量趋于 0 的速度却不一定相同，有时可能差别很大。

首先比较三个无穷小量 x，$2x$，x^2 $(x\to 0)$ 趋于 0 的速度，见表 1-3。

表　1-3

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	…	→	0
$2x$	2	1	0.2	0.02	0.002	…	→	0
x^2	1	0.25	0.01	0.0001	0.000001	…	→	0

由表 1-3 可以看出，这三个无穷小量趋于 0 的速度有显著差异，x^2 比 $2x$ 和 x 趋于 0 的速度快，x 与 $2x$ 趋于 0 的速度差不多。这只是直观描述，何谓“快”，何谓“差不多”，需要给出定量的定义。

定义 1.5.2　设 $\lim\limits_{\bullet} f(x)=0$，$\lim\limits_{\bullet} g(x)=0$ 且 $g(x)\neq 0$，$\lim\limits_{\bullet}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k$，

(1) 若 $k\neq 0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小；

(2) 若 $k=0$，则称 $f(x)$ 比 $g(x)$ 是高阶无穷小，记为 $f(x)=o\,(g(x))$；

(3) 若 $k=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小，记为 $f(x)\sim g(x)$；

(4) 若 $k=\infty$，则称 $f(x)$ 比 $g(x)$ 是低阶无穷小。

例如：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以，当 $x\to 0$ 时，x^2 比 x 是高价无穷小，可记为 $x^2=o(x)$；反之，当 $x\to 0$，x 比 x^2 是低阶无穷小。

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2=2\neq 0$，所以，当 $x\to 0$ 时，$2x$ 与 x 是同阶无穷小。

1.5.2　无穷大量

1. 正无穷大量

例 1.5.1　观察函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}$ 无限地增大，我们称当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}$ 的极限为正无穷大；或称当 $x\to 0$ 时，$y=\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷大量。

定义 1.5.3　设 $f(x)$ 在 x_0 点的两侧有定义，若当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无限地增大，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限为正无穷大，或称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是正无穷大量，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

这时,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

2. 负无穷大量

例 1.5.2 观察函数 $y=-\dfrac{1}{x^2}$,当 $x \to 0$ 时,$y=-\dfrac{1}{x^2}$无限地减小,我们称当 $x \to 0$ 时,$y=-\dfrac{1}{x^2}$的极限为负无穷大;或称当 $x \to 0$ 时,$y=-\dfrac{1}{x^2}$为负无穷大量。

定义 1.5.4 设 $f(x)$在 x_0 的两侧有定义,若当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$无限地减小,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$的极限为负无穷大;或称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$为负无穷大量,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

这时,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

3. 无穷大量

例 1.5.3 观察函数 $y=\dfrac{1}{x^3}$,当 $x \to 0$ 时,$|y|=\left|\dfrac{1}{x^3}\right|$无限地增大,我们称当 $x \to 0$ 时,$y=\dfrac{1}{x^3}$的极限为无穷大;或称当 $x \to 0$ 时,$y=\dfrac{1}{x^3}$为无穷大量。

定义 1.5.5 设 $f(x)$在 x_0 的两侧有定义,若当 $x \to x_0$ 时,$|f(x)|$无限地增大,则称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$的极限为无穷大;或称当 $x \to x_0$ 时,$f(x)$为无穷大量,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

这时,极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在。

依定义有

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = \infty$$

对于其他的极限过程,我们有类似的定义,用记号表示如下:

(1) $\lim\limits_{\bullet} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$当 • 时,$f(x)$无限地增大;

(2) $\lim\limits_{\bullet} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$当 • 时,$f(x)$无限地减小;

(3) $\lim\limits_{\bullet} f(x)=\infty \Leftrightarrow$当 • 时,$|f(x)|$无限地增大。

依定义易知,若 $f(x)$为负无穷大量或无穷大量,则 $f(x)$一定是无穷大量。

例 1.5.4 (1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}=\infty$

如图 1-19 所示。

例 1.5.5 设 $a>1$,则有

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x=0$

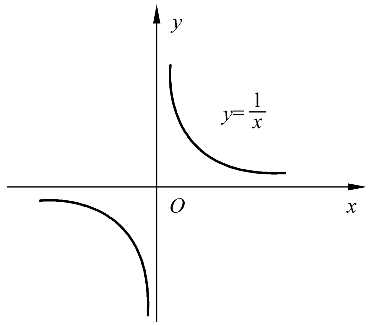


图　1-19

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}$不存在

例 1.5.6　设 $0<a<1$,则有

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^{x}=+\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{x}=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} a^{x}$不存在

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x}=+\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x}$不存在

如图 1-20 所示。

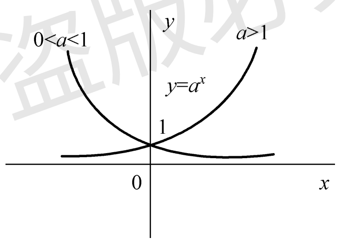


图　1-20

例 1.5.7　设 $a>1$,则有

(1) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \log a^{x}=-\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log a^{x}=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \ln x=-\infty$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \lg x=-\infty$　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \lg x=+\infty$

例 1.5.8　设 $0<a<1$,则有

(1) $\lim\limits_{x\to0^{+}} \log a^{x}=+\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log a^{x}=-\infty$

如图 1-21 所示。

例 1.5.9　设 $k\in\mathbf{Z}$,则

(1) $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}^{-}} \tan x=+\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}^{+}} \tan x=-\infty$

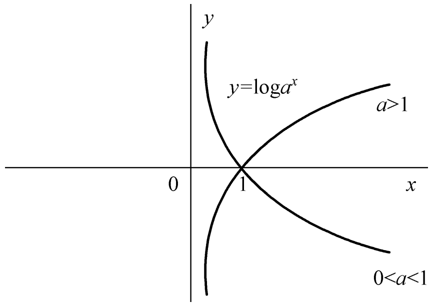


图　1-21

(3) $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$

如图 1-22 所示。

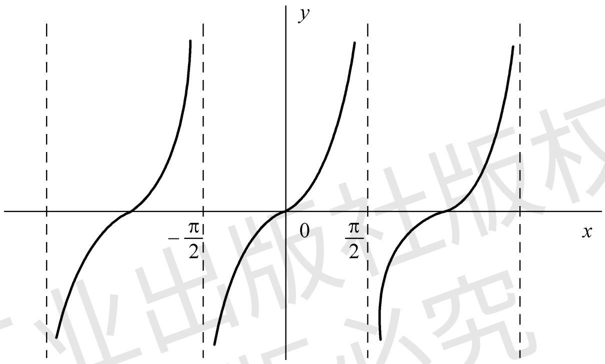


图　1-22

例 1.5.10　设 $k\in\mathbf{Z}$,则

(1) $\lim\limits_{x\to k\pi^-}\cot x=-\infty$　　(2) $\lim\limits_{x\to k\pi^+}\cot x=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to k\pi}\cot x=\infty$

如图 1-23 所示。

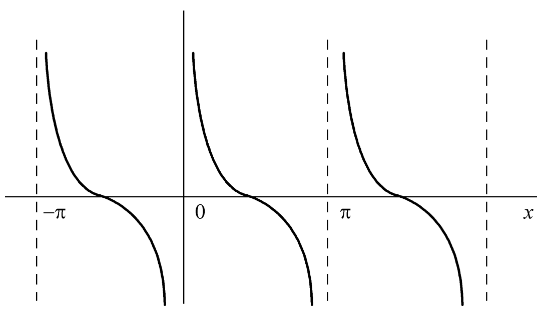


图　1-23

例 1.5.11　求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{1}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan^{\frac{1}{x}}$　　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\ln\tan x$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\cot x$　　(8) $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to -\infty}\mathrm{e}^u=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to +\infty}\mathrm{e}^u=+\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to \infty}\mathrm{e}^u$ 不存在

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln^{\frac{1}{x}}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to +\infty}\arctan u=\dfrac{\pi}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\ln\tan x\xlongequal{u=\tan x}\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\cot x\xlongequal{u=\cot x}\lim\limits_{u\to +\infty}\ln u=+\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim\limits_{u\to -\infty}\operatorname{arccot}u=\pi$

4. 无穷小与无穷大的关系

定理 1.5.2　设 $\lim\limits_{\bullet} f(x)=0,\lim\limits_{\bullet} g(x)=\infty$，则

(1) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{1}{f(x)}=\infty\quad(f(x)\neq 0)$

(2) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{1}{g(x)}=0$

(3) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

(4) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty(f(x)\neq 0)$

例 1.5.12　(1) $\because\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{1}{x}=+\infty$

$\therefore\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{x}}=0$

(2) $\because\lim\limits_{x\to 0}x^5=0\quad\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^5}=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\ln\dfrac{1}{x}}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\dfrac{1}{x}}{x^3}=\infty$

习题 1.5

1. 求极限。

(1) $l\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}5^x$　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}5^x$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}5^x$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}3^n$　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{5^n}$　(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(2^n+2\sin n!)$

2. 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\arctan\dfrac{1}{x}$　(2) $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}$　(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{x}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sin n}{n}$　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{3x}$　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{243\sin x}{x^3}$

3. 求极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n^2+1)$　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}e^{x^{\frac{1}{3}}}$　(3) $\lim\limits_{x\to0^-}e^{x^{\frac{1}{3}}}$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x^3}$　(5) $\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x^3}$　(6) $\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x^3}$

(7) $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2}$　(8) $\lim\limits_{x\to0}\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2}$　(9) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\sin x$

4. 下列函数在所给过程中为无穷大量的是(　　)。

(A) $\ln x(x\to0^+)$　(B) $\ln\ln\dfrac{1}{x}(x\to0^+)$

(C) $3^{-x}(x\to-\infty)$　(D) $e^{-x}(x\to+\infty)$

5. 下列函数在所给过程中为无穷小量的是(　　)。

(A) $e^{\frac{1}{x}}(x\to0^-)$　(B) $3^{\frac{1}{x}}(x\to0^+)$

(C) $5^{\frac{1}{x}}(x\to0^-)$　(D) $5^{\frac{1}{x}}(x\to\infty)$

6. 下列极限不存在的有(　　)。

(A) $3^x(x\to\infty)$　(B) $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x}(x\to0)$

(C) $\sin\dfrac{1}{x}(x\to0)$　(D) $\ln\tan x(x\to0^+)$

(E) $2x+\sin x(x\to\infty)$　(F) $\cos3x-x^2(x\to\infty)$

1.6　极限的运算法则

本节将讨论极限的运算法则,极限存在的准则和求极限的一些基本方法。

1.6.1　极限的四则运算法则

定理　设$\lim f(x)=A$与$\lim g(x)=B$都存在,则有

(1) $\lim\limits_{\bullet}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\bullet}f(x)\pm\lim\limits_{\bullet}g(x)=A\pm B$

(2) $\lim\limits_{\bullet}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{\bullet}f(x)\cdot\lim\limits_{\bullet}g(x)=AB$

(3) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\bullet}f(x)}{\lim\limits_{\bullet}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

(4) $\lim\limits_{\bullet}Cf(x)=C\cdot\lim\limits_{\bullet}f(x)=CA$（$C$ 为常数）

(5) $\lim\limits_{\bullet}[f(x)]^n=[\lim\limits_{\bullet}f(x)]^n(n\in\mathbf{N})$

(6) $\lim\limits_{\bullet}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{\bullet}f(x)}(n\in\mathbf{N})$

其中法则(1),(2)对有限个函数同样成立。

例 1.6.1　求极限$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+1)$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(3x^2-2x+1)&=\lim_{x\to 2}3x^2-\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}1=3\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x+1\\&=3(\lim_{x\to 2}x)^2-2\times 2+1=3\times 2^2-2\times 2+1=9\end{aligned}$$

例 1.6.2　求极限 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{7x^2+2x-6}{3x+5}$。

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -4}\frac{7x^2+2x-6}{3x+5}&=\frac{\lim\limits_{x\to -4}7x^2+2x-6}{\lim\limits_{x\to -4}(3x+5)}\\&=\frac{7\times(-4)^2+2\times(-4)-6}{3\times(-4)+5}=\frac{98}{-7}=-14\end{aligned}$$

设 $f(x)$为初等函数且在 x_0 有定义,则有下面求极限公式:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

例 1.6.3　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3\sin x+2\tan x+\cos x+3}$。

解　$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{3\sin x+2\tan x+\cos x+3}=\sqrt{3\sin 0+2\tan 0+\cos 0+3}=\sqrt{4}=2$

例 1.6.4　求极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x-3}$。

解　$\because\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+1}=\dfrac{0}{19}=0$

$\therefore\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+1}{x^2-2x-3}=\infty$

可以推出下列公式:若$\lim\limits_{\bullet}g(x)=c\neq 0$,$\lim\limits_{\bullet}f(x)=0$,则有$\lim\limits_{\bullet}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$。

例 1.6.5　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$。

解　不难看出,此题分子、分母的极限均为 0(称为$\dfrac{0}{0}$型未定式),不能直接使用商的极限运算法则。可以采取对分子和分母分别分解因式后,再约去分母中极限为 0 的因子$(x-1)$,然后求极限。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1+1}{2\times 1+1}=\frac{2}{3}$$

评注 一般地，求有理分式$\frac{0}{0}$型未定式的极限，可以采取对分子和分母分别分解因式后，再约去分母中极限为0的因子，然后求极限。

例 1.6.6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3\sin x}{3x+\sin x}$。

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3\sin x}{3x+\sin x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}\cdot 3\sin x}{3+\frac{1}{x}\cdot\sin x}\text{（分子分母同除以 }x\text{）}$$
$$=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

例 1.6.7 求下列各极限。

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2-7}$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-7}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{2x^2-7}$

解 这三个题目的分子、分母的极限均为$\infty$$\left(\text{称为}\frac{\infty}{\infty}\text{型未定式}\right)$，不能直接使用商的极限运算法则，

(1) 分子、分母同除以分母的最高次幂x^2，得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x^2}}{2-\frac{7}{x^2}}=\frac{1+0}{2-0}=\frac{1}{2}$$

(2) 与(1)类似，分子、分母同除以分母的最高次幂x^3，得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^3-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}{2-\frac{7}{x^3}}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

(3) 由于$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-7}{x^3+5}=0$，从而由无穷小与无穷大的关系知
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{2x^2-7}=\infty$$

评注 设$P_n(x)$和$Q_m(x)$分别为n次和m次多项式，即
$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad Q_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0,$$
其中$a_0\neq0, b_0\neq0$，则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & m=n\\ 0 & m>n\\ \infty & m<n\end{cases}$$
特别地，若$Q_m(x)=1$，则$\lim\limits_{x\to\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\infty$。

例 1.6.8 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$。

解 由于分子、分母的极限均为0，故不能直接用商的极限运算法则。但是可以通过分子有理化的方法约0因子x，然后求极限。

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$$

评注　一般地，求无理分式$\frac{0}{0}$型未定式的极限：(1)分子或分母有理化，找到公因式$(x-x_0)^n$；(2)约分；(3)代入。此法称为有理化法。

例 1.6.9　求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$。

解　$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\overset{\text{通分}}{=\!=}\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{-(1+x+x^2)}=-1$$

评注　这是两个无穷大之差的极限问题(记为$\infty-\infty$型)，一般采用化差为商的方法。

例 1.6.10　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$。

解　这是无穷项和的极限，先求和，后取极限。

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1-0=1$$

例 1.6.11　设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

解　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

例 1.6.12　设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\leqslant0\\ 2x & 0<x\leqslant1\\ x^2+1 & 1<x\end{cases}$。

求：(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$　(2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$　(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$　(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

解　(1) ∵
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x-1}=-1$$
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}2x=0$$

∴
$$\lim_{x\to0}f(x)\text{不存在}$$

(2) ∵
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}2x=2$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+1)=2$$

∴ $$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 2x=1$

(4) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x-1}=0$

(5) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)=+\infty$

例 1.6.13 求极限$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}[3-|2x-1|]$。

解 $f(x)=3-|2x-1|=\begin{cases} 2+2x & x<\dfrac{1}{2} \\ 4-2x & x\geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} (2+2x) = 3$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} (4-2x) = 3$$

∴$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}[3-|2x-1|]=3$

1.6.2 极限存在的两个准则

准则 1 设 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有

$$\lim_{\bullet} g(x) = \lim_{\bullet} h(x) = A$$

则有

$$\lim_{\bullet} f(x)=A$$

准则 2 单调有界数列必有极限。

例 1.6.14 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$

解 ∵$\dfrac{n+1}{(n+n)^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\leqslant\dfrac{n+1}{n^2}$

且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(n+n)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n^2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}=0$

∴$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+12)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]=0$

习题 1.6

1. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{x-3}$ (2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-1}$ (4) $\lim\limits_{n\to \sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x^2-3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{x^2-2}$ (6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)$　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$　　(10) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

2. 设 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$,求:

(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

3. 设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$,求:

(1) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

4. 设 $f(x)=\sqrt{x}$,$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x+4 & x<1\\ 2x-1 & x\geqslant1\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$,$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\leqslant x\leqslant1\\ 1 & 1<x<2\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to1}f(x)$。

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arcsin\dfrac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$,求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$。

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}x^3 & x\leqslant0\\ 5x^2-4x & 0<x\leqslant1\\ \dfrac{4x}{x+2} & x>1\end{cases}$,求:(1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$;(2) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$;(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$。

9. 求:(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x-|x|}$

10. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}=4$,求 a 的值。

1.7　两个重要极限

1.7.1　重要极限 I

(1) 标准形$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) 变形 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$。

证明:作单位圆,如图 1-24 所示。

设圆心角$\angle AOB=x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,则

$\triangle AOB$ 的面积<扇形 AOB 的面积<$\triangle AOD$ 的面积,因为

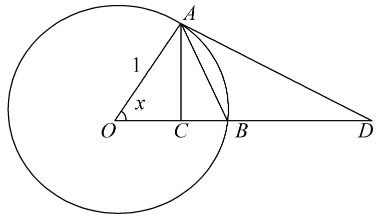


图 1-24

$\triangle AOB$ 的面积$=\frac{1}{2}OB\cdot AC=\frac{1}{2}\times 1\cdot\sin x$

扇形 AOB 的面积$=\frac{1}{2}\times 1^2\cdot x$

$\triangle AOD$ 的面积$=\frac{1}{2}AO\cdot AD=\frac{1}{2}\times 1\cdot\tan x$

所以$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$

即

$$\sin x < x < \tan x$$

同除以 $\sin x$,得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

上面不等式当$-\frac{\pi}{2}<x<0$ 时仍成立。

由$\lim\limits_{x\to 0}1=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,依极限存在准则 1,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

从而有

$$\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$$

例 1.7.1 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot(x+2)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x+2)$

$=1\times(2+2)=4$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

评注　求 $\dfrac{0}{0}$ 型的三角函数的极限问题，通常要用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，方法为：

（1）化为正弦函数；

（2）化为标准型（角度为 x）或化为变形（角度为 $g(x)$）；

（3）验证条件，使用公式。

例 1.7.2　求极限。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$　　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$

解　（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1\times\dfrac{1}{1}=1$

（2）令 $y=\arcsin x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$

（3）令 $y=\arctan x$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=1$

评注　例 1.7.2 中的结果都可作为公式使用。

1.7.2　重要极限 Ⅱ

1.（1）标准形　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

（2）变形　$\lim\limits_{\varphi(n)\to\infty}[1+\varphi(n)]^{\varphi(n)}=\mathrm{e}$

例 1.7.3　求极限。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{bn}$（$a\neq 0,b\neq 0$）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{3n^2}$

分析：以上两题都是 1^∞ 型的极限。

解　（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{bn}$　（1^∞ 型）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n}{a}}\right)^{bn}$　（把底变形）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot ab}$　（把指数变形）

$=\mathrm{e}^{ab}$　（分别取极限）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)^{3n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^{3n^2}$（$1^\infty$ 型）

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^{(n^2-1)\cdot\frac{3n^2}{n^2-1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-1}}=\mathrm{e}^3$

把上面的公式,推广到函数极限,类似的有下面公式。

2.(1)标准形 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

(2)变形 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$

例 1.7.4 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)[\ln(2x+3)-\ln(2x+1)]$

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$($1^{\infty}$ 型)

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}=\mathrm{e}^{-2}$$

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(3x+1)[\ln(2x+3)-\ln(2x+1)]&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{3x+1}\\&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2(3x+1)}{2x+1}}=\ln\mathrm{e}^{3}=3\end{aligned}$$

把第 2 组公式变成等价形式,有下面公式。

3.(1)标准形 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

(2)变形 $\lim\limits_{\varphi(x)\to0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$

例 1.7.5 求极限。

(1) $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan3x)^{\frac{1}{x}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{2\tan x}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\tan3x)^{\frac{1}{\tan3x}\cdot\frac{\tan3x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{x}}=\mathrm{e}^{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1-3x}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}\cdot(-3)}=\mathrm{e}^{-3}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot3}=\ln\mathrm{e}^{3}=3$

(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{2\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cot x)^{\frac{1}{\cot x}\cdot2}=\mathrm{e}^{2}$

重要极限Ⅱ是求幂指函数 1^{∞} 型不定式 $\lim f(x)^{g(x)}$ 的极限的重要公式。解题时,应先检验是否为 1^{∞} 型,再化为公式的形状,检查条件,套用公式。

例 1.7.6 当 $x\to0$ 时,下列无穷小量与 x 相比是什么阶的无穷小量。

(1) $x+\tan x^{2}$　　(2) $\sqrt{x}+\sin x$

(3) $\sin x+\tan x$　　(4) $\ln(1+2x)$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\tan x^2}{x^2}\cdot x\right)=1+1\times 0=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{\tan x}{x}\right)=1-1=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\ln e^2=2$

∴当 $x\to 0$ 时，$x+\tan x^2$ 比 x 的等价无穷小，$\sqrt{x}+\sin x$ 比 x 是低阶无穷小，$\sin x-\tan x$ 比 x 是高阶无穷小，$\ln(1+2x)$与 x 是同阶不等价无穷小。

1.7.3　利用等价无穷小替换法求极限

定理 1.7.1　设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则有$\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$。

证明：$\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\bullet}\left(\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right)=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta}{\beta'}\cdot\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta'}{\alpha'}\cdot\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\alpha'}{\alpha}=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$

例 1.7.7　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$。

解　因为当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$$

推论　(1) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta'}{\alpha}=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{\beta}{\alpha'}$

(2) $\lim\limits_{\bullet}\dfrac{1}{\alpha}\cdot\beta=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{1}{\alpha'}\cdot\beta'=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{1}{\alpha}\cdot\beta'=\lim\limits_{\bullet}\dfrac{1}{\alpha'}\cdot\beta$

注：可以证明当 $x\to 0$ 时，有 $\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$。

例 1.7.8　求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^3+3x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2+3}=\dfrac{2}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan x(1-\cos x)}{\dfrac{x^2}{3}\cdot\dfrac{\sin x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{\dfrac{x^2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}x}=-3$

习题 1.7

1. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{3x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

2. 求下列极限。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$ (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(x+1)-\ln x]$ (8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\cot x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{2}{x}}$ (10) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{2}{x}}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{\sin x}}$ (12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{2}{x}}$ (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x-2)-\ln(x+1)]$ (16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{\sqrt{x}}$

3. 证明：当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{4x}-2$ 与 $\sqrt{9x}-3$ 是同阶无穷小量。

4. 证明：$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{x}{2}\quad(x\to 0)$。

5. 证明：$\arctan x-\arcsin x=o(x)\quad(x\to 0)$。

1.8 函数的连续性

本章前两节讨论了微积分的研究对象——函数，之后的五节又给出了研究函数的方法——极限。这就为我们用分析的方法研究函数奠定了基础。但是，函数的种类极为复杂，那么应从研究什么类型的函数开始呢？微积分的发展史告诉我们，无论在理论上或在实践中都应从连续函数开始。这是因为，在现实世界中许多变量的变化是连续的。如流体的连续流动，气温的连续上升，压力的连续增加等，这种现象反映到数学上就是函数的连续性；另外，我们常常直接或间接地借助于连续函数讨论一些不连续函数。于是连续

函数就成为微积分这门课程的主要研究对象。

1.8.1　函数连续的概念

1. 函数的增量(或改变量)

在函数 $y=f(x)$ 的定义域内，设自变量 x 由始值 x_0 变到终值 x，相应的函数值由始值 $f(x_0)$ 变到终值 $f(x)$，则把差 $\Delta x=x-x_0$ 叫作自变量 x 在 x_0 点的增量或改变量，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 叫作函数 y 在 x_0 点相应的增量或改变量，依定义有

$$x=x_0+\Delta x,\quad f(x)=f(x_0)+\Delta y$$

于是，有 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

当自变量由 x 变到 $x+\Delta x$ 时，函数 $y=f(x)$ 的增量为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

注意，Δx 与 Δy 都是表示增量的完整记号，Δx 与 Δy 可正可负也可为 0。

例 1.8.1　求函数 $y=x^2$ 当 $x=2,\Delta x=0.1$ 时的增量。

解　$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=4\Delta x+(\Delta x)^2=4\times 0.1+0.1^2=0.41$

例 1.8.2　求 $y=\sqrt{x}$ 当 $x=3,\Delta x=-0.2$ 时的增量。

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f(3-0.2)-f(3)$

$=f(2.8)-f(3)=\sqrt{2.8}-\sqrt{3}=-0.05$

例 1.8.3　当在某点处自变量有增量 Δx 时，求函数 $y=3x^2$ 的增量。

解　$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=3(x+\Delta x)^2-3x^2$

$=3[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]-3x^2=6x\Delta x+3(\Delta x)^2$

2. 函数在一点连续的定义

凡属连续变化的运动，在数量上有共同的特点。拿气温的变化来说，气温随着时间的变化而变化，气温是时间的函数，当时间的增量很小时，气温的增量也很少。因此，连续变化的概念反映在数学上，就是当自变量的增量很微小时，函数的增量也很微小。

定义 1.8.1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

由于 $0=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]\xlongequal{x=x_0+\Delta x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)-f(x_0)]$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(x_0)$

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义可用下面方式叙述。

定义 1.8.2　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个领域内有定义，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，或称 x_0 是 $f(x)$ 的连续点。

3. 函数在一点连续的三个条件

$$f(x)\text{在 }x_0\text{ 处连续}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\text{在 }x_0\text{ 点有定义}\\(2)\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\text{存在}\\(3)\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=f(x_0)\end{cases}$$

4. 左连续与右连续

定义 1.8.3 设 $f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义,若

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(x_0)\text{(或}\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(x_0)\text{)}$$

则列 $f(x)$在点 x_0 处左(或右)连续。

由连续定义及双侧极限与单侧极限的关系,我们有下面定理。

定理 1.8.1 $f(x)$在 x_0 处连续的充要条件是,$f(x)$在 x_0 左连续且右连续。

5. 在区间上连续的定义

定义 1.8.4 若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内的每一点都连续,则称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续;若函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续,在 $x=a$ 处右连续,在 $x=b$ 处左连续,则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

下面,我们再给出函数在一点不连续或间断的定义。

6. 函数在一点间断

定义 1.8.5 如果函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的三个条件至少有一条不成立,则称函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续(或间断),称 x_0 为 $f(x)$的不连续点(或间断点)。

定义 1.8.6 间断点的分类

若函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时,左右极限都存在但不相等,则称点 x_0 为 $f(x)$的第一类跳跃间断点;若函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时,左右极限都存在且相等,即极限存在,但不等于函数 $f(x)$在 x_0 点的函数值(或 $f(x)$在 x_0 点无定义),则称 x_0 为 $f(x)$的第一类可去间断点。

除了第一类间断点外,其他间断点都称为第二类间断点。

例 1.8.4 求下列函数的间断点,并指明类型。

(1) $f(x)=\begin{cases} x-2 & x<0 \\ \mathrm{e}^x & x\geqslant 0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2-2x}$

(3) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x-x}}}$

解 (1) 它是分段函数,当 $x<0$ 时,$x-2$ 是连续的;当 $x\geqslant 0$ 时,e^x 也是连续的。因此考察分段点 $x=0$ 处的情形,由于

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x-2) = -2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^x = 1$$

可见,左右极限都存在但不相等,所以 $x=0$ 是 $f(x)$的第一类跳跃间断点。

(2) 它是初等函数,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$。

在 $x=0$ 处,因为

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(x-2)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x-2}\right) = -\frac{1}{2}$$

所以,$x=0$ 是第一类可去间断点。

在 $x=2$ 处,因为

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sin x}{(x-2)} = \infty$$

所以，$x=2$ 是第二类间断点。由于 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$，我们也把这样的间断点称为无穷间断点。

(3) 函数 $f(x)$ 是初等函数，定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。在 $x=1$ 处，由于

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/(x-1)}} = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/(x-1)}} = 1$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类跳跃间断点。

例 1.8.5　讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性。

解　因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处没有定义，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以此点是 $f(x)$ 的第二类间断点。这种间断点称为振荡间断点，如图 1-25 所示。

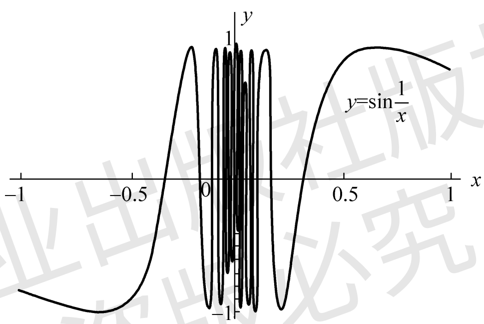


图　1-25

1.8.2　连续函数的有关定理

定理 1.8.2(四则运算)　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处都连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 与 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处都连续。

定理 1.8.3(复合函数的连续性)　若 $u=g(x)$ 在 x_0 处连续，$y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x_0 处连续。

由定理 1.8.3，有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x\to x_0} g(x)]$$

从而知道，求复合函数的极限时，如果 $u=g(x)$ 在 x_0 处有极限，且 $y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续，则极限符号与函数符号 f 可以交换。

定理 1.8.4(反函数的连续性)　若函数 $y=f(x)$ 在某区间上严格单调且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应区间上严格单调且连续。

定理 1.8.5(初等函数的连续性)　初等函数在定义区间上连续。

由定理 1.8.5，可得到，若 $f(x)$ 是初等函数，且在 x_0 处有定义，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

例 1.8.6 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leqslant 0 \\ 2x^2+1 & 0 < x \leqslant 3 \\ x^3-8x+16 & 3 < x < 5 \end{cases}$$

在点 $x=0$，$x=3$ 的连续性。

解 依连续性定义的三个条件，逐条讨论。

① 在 $x=0$ 处。

$f(x)$在 $x=0$ 有定义，$f(0)=1$

$\because \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(3x+1)=1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(2x^2+1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} f(x)=1=f(0)$，$f(x)$在 $x=0$ 处连续。

② 在 $x=3$ 处。

$f(x)$在 $x=3$ 有定义，$f(3)=19$

$\because \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-}(2x^2+1)=19$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+}(x^3-8x+16)=19$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x)=19=f(3)$，从而 $f(x)$在 $x=3$ 连续。

例 1.8.7 试补充定义 $f(0)$的值，使得 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$在 $x=0$ 处连续。

解
$$\because \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x \to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

$\therefore$ 令 $f(0)=1$，则 $f(x)$在 $x=0$ 处连续。

例 1.8.8 求下列函数的间断点和连续区间。

(1) $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$　　　(2) $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x<0 \\ 3x+1 & 0<x<1 \\ 3 & 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

解 (1) 先求定义域。令

$$\begin{cases} 2x+1 \geqslant 0 \\ 2x^2-x-1 \neq 0 \end{cases} \quad 得 \begin{cases} x \geqslant -\dfrac{1}{2} \\ x \neq -\dfrac{1}{2} \text{ 且 } x \neq 1 \end{cases}$$

$\therefore D_f = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

因为 $y=\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2x^2-x-1}$是初等函数，所以，连续区间为$\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$。

(2) 当 $x<0$ 时，$y=\dfrac{1}{x-1}$为初等函数，且有定义，从而连续；

当 $0<x<1$ 时，$y=3x+1$ 为初等函数，且有定义，从而连续；

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$y=3$ 为初等函数，且有定义，从而连续；

当 $x=0$ 时，y 无定义，从而不连续；

当 $x=1$ 时，$f(x)$有定义，$f(1)=3$。

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+1)=4,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}3=3$$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在，所以 $f(x)$在 $x=1$ 不连续。

$\because \mathbf{D}_{\mathrm{f}}=(-\infty,0)\cup(0,4]$

$\therefore$间断点为 $x=0$，$x=1$，连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,4]$。

例 1.8.9　设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[x]{1+2x} & x\neq 0\\ a+1 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 的值。

解　$f(0)=a+1$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^2$

因为 $f(x)$在 $x=0$ 连续，所以有 $a+1=\mathrm{e}^2$，$a=\mathrm{e}^2-1$。

1.8.3　闭区间上连续函数的性质

下面介绍定义在闭区间上的连续函数四个基本性质。这些性质在几何上是很直观的，然而严格的证明是很困难的，因此，要求结合图形理解这些性质，并会应用就可以了。

定理 1.8.6(有界性)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上有界。

定理 1.8.7(最大值与最小值性质)　若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则 $f(x)$在$[a,b]$上一定存在最大值与最小值。

例如在图 1-26 中，$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。曲线 $y=f(x)$是由 A 到 B 的一条连续曲线；最高点处的函数值 $f(x_2)$为最大值 M，最低点处的函数值 $f(x_1)$为最小值 m，且曲线在水平直线 $y=M$ 与 $y=m$ 之间，$f(x)$在$[a,b]$上有界。

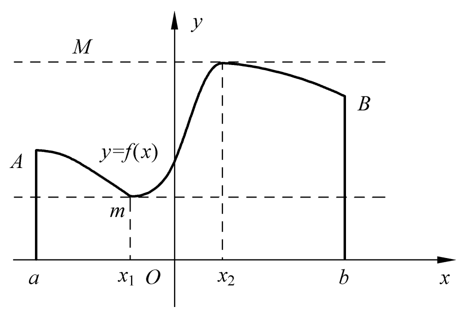


图　1-26

定理 1.8.8(介值性) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对介于 m 与 M 之间的任一实数 $c(m<c<M)$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$。

例如，在图 1-27 中，连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=c$ 相交于三点，其横坐标分别为 ξ_1，ξ_2，ξ_3，所以有 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=c$。

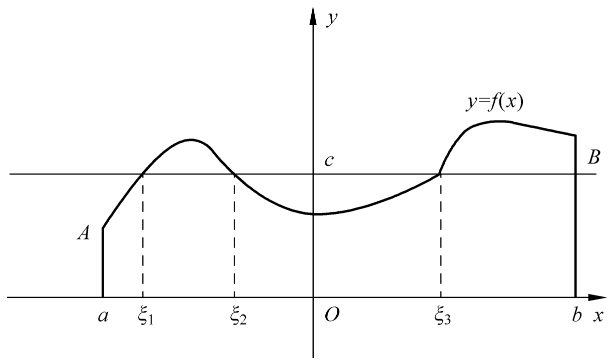


图 1-27

定理 1.8.9(零点性质) 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

例如，在图 1-28 中，由于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，A 与 B 在 x 轴的两侧，则连续曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴至少有一个交点 $(\xi,0)$，所以有 $f(\xi)=0$。

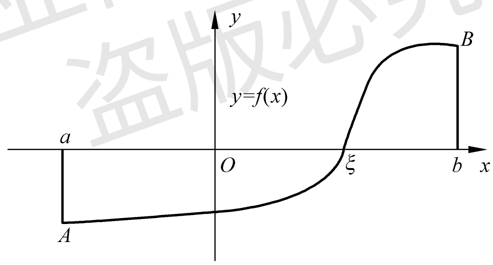


图 1-28

例 1.8.10 证明 方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 在 $(-2,0)$，$(0,2)$，$(2,4)$ 内各有一个实数根。

证明：由于 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ 在任意区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(-2)<0$，$f(0)>0$，$f(2)<0$，$f(4)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-2,0)$，$(0,2)$，$(2,4)$ 上分别满足零点性质条件，由零点性质知，存在 $\xi_1\in(-2,0)$，$\xi_2\in(0,2)$，$\xi_3\in(2,4)$，使得 $f(\xi_1)=0$，$f(\xi_2)=0$，$f(\xi_3)=0$，这说明，ξ_1，ξ_2，ξ_3 都是方程 $x^3-3x^2-x+3=0$ 的实根。

由于三次方程至多有三个实根，所以 ξ_1，ξ_2，ξ_3 是该方程的全部实根，即每个区间内各有一个实根。

习题 1.8

1. 求函数 $f(x)=-x^2+\frac{1}{2}x$ 当 $x=1,\Delta x=0.5$ 时的增量。

2. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，当自变量由 x 变到 $x+\Delta x$ 时，求函数的增量 Δy。

3. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性。

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x\arcsin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x>0 \end{cases}$

(6) $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$

4. 给 $f(0)$ 补充定义一个数值，使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

(1) $f(x)=\sin x\cos\frac{1}{x}$　　(2) $f(x)=\ln(1+ax)^{\frac{b}{x}}$

5. 求下列函数的间断点和连续区间，并判断间断点的类型。

(1) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$　　(2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$

(3) $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & x>0 \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} |x| & |x|\leqslant 1 \\ \frac{x}{|x|} & 1<|x|\leqslant 3 \end{cases}$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$，讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

7. 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}\sin x & x<0 \\ k & x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & x>0 \end{cases}$，问 k 为何值时 $f(x)$ 是连续函数，为什么？

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x} & x>0,\text{且 } x\neq 1\\ A & x=1\end{cases}$,求 A 的值,使 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续。

9. 证明方程 $x^4-3x^2+7x=10$ 在区间$(1,2)$内至少有一个实数根。

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+a & x\leqslant 0\\ x^2+1 & 0<x<1\\ \dfrac{b}{x} & x\geqslant 1\end{cases}$,若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,求 a,b 的值。

11. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & x\geqslant 0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & x<0(a>0)\end{cases}$

(1) 当 a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的连续点。

(2) 当 a 为何值时,$x=0$ 是 $f(x)$的间断点。

(3) 当 $a=2$ 时,求 $f(x)$的连续区间。

12. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(a)<a$,$f(b)>b$,试证在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$。

第 1 章习题参考答案

习题 1.1

1. (1) $\{3,4\}$ (2) $\{(0,0),(1,1)\}$ (3) $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

2. (1) $\{x|x>5\}$ (2) $\{(x,y)|x^2+y^2<25\}$ (3) $\{(x,y)|y=x^2$ 且 $x+y=0\}$

3. **B**,**C**,**E**

4. 对的有:$1\in \mathbf{A}$,$0\notin \mathbf{B}$,$\{1\}\subset \mathbf{A}$,$A\supset \mathbf{B}$,$\varnothing\subset \mathbf{A}$,$A\subset \mathbf{A}$。其余不对。

5. 不对的有:$\mathbf{A}\cap\mathbf{A}=\varnothing$,$\mathbf{A}\cup\varnothing=\varnothing$,$\mathbf{A}\cap\varnothing=\mathbf{A}$,$\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{A}$,$\mathbf{A}^{C}=\mathbf{U}$。其余对。

6. (1) $\{\mathrm{x}|-4<\mathrm{x}\leqslant 1$ 或 $3\leqslant \mathrm{x}<4\}$ (2) $\mathbf{R}$

(3) $(-\infty,-4)\cup[4,+\infty)$ (4) $(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$

(5) $(1,3)$ (6) $[(-\infty,-4]\cup(1,3)\cup[4,+\infty]$

7. $\mathbf{A}\cup\mathbf{B}=\{a,b,c,e,f\}$,$\mathbf{B}\cap\mathbf{C}=\{f\}$,$\mathbf{A}\cap\mathbf{C}=\{a,c\}$;$(\mathbf{A}\cup\mathbf{B})\cap\mathbf{C}=\{a,c,f\}=c$,$(\mathbf{B}\cap\mathbf{C})\cup(\mathbf{A}\cap\mathbf{C})=\{a,c,f\}=c$。

习题 1.2

1. (1) $(-1,0)\cup(0,1)$ (2) $[-2,1)$ (3) $(2,4)$ (4) $[-1,0)\cup(0,1]$

2. (1) $[0,1)\cup(1,10)$ (2) $-4,4$

3. (1) $[-1,1]$ (2) $2k\pi,(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}$

(3) $[-a,1-a]$ (4) $\left[\dfrac{1}{10},1\right]$

4. (1) $[0,1]$ (2) $[2,4]$ (3) $\varnothing$

5. $f(0)=1$,$f(-x)=\dfrac{1+x}{1-x}$,$f(x+1)=-\dfrac{x}{x+2}$,$f(x)+1=\dfrac{2}{x+1}$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x-1}{x+1}$,

$f[f(x)]=x, f\left[f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]=1$

6. $g(3)=2, g(2)=1, g(0)=2, g(0.5)=2, g(-0.5)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. $f(1)=0, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

8. $f(x+1)=\begin{cases} x-2 & 1\leqslant x\leqslant 0 \\ x^2+2x-2 & 0<x\leqslant 4 \end{cases}$

9. $y=\begin{cases} 1-3x & x<\frac{1}{3} \\ 3+3x & x\geqslant\frac{1}{3} \end{cases}$

10. (1) $f(x)=\frac{1}{x+1}$　(2) $f(x)=-x^2, f(0)=0$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+20 & 5<x\leqslant 6 \\ \frac{1}{x-6} & 6<x<8 \end{cases}$

(4) $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$

11. (1) $y=\ln\frac{x}{1-x}$　(2) $y=\frac{1-\arcsin\frac{x-1}{2}}{-1+\arcsin\frac{x-1}{2}}$

(3) $y=10^{x-1}-2$　(4) $y=\frac{1}{2}[\log_3 x-5]$

(5) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$　(6) $y=\frac{2(x+1)}{x-1}$

12. (1) $y=-\sqrt{x}, x\geqslant 0$　(2) $y=-x^3, x\leqslant 0$

(3) $y=(x+1)^3, x\leqslant -1$　(4) $y=\sqrt{1-x^2}, 0\leqslant x\leqslant 1$

13. $y=\begin{cases} \sqrt{x+1} & 1\leqslant x\leqslant 0 \\ \sqrt{x} & 0<x\leqslant 1 \end{cases}$

14. (1) $a=2$,是复合函数,$\mathbf{D}_f=(-\infty,+\infty)$

(2) $a=\frac{1}{2}$,是复合函数

$$\mathbf{D}_f=\left\{x \mid 2k\pi-\frac{7}{6}\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}\right\}$$

(3) $a=-2$,不是复合函数。

15. $f[g(x)]=e^{x-1}(2e^{x-1}+1), g[f(x)]=e^{2x^2+x-1}$

16. (1) $y=u^3, u=\sin v, v=x^2$

(2) $y=\ln u, u=\sin v, v=1-x$

习题 1.3

1. (A,B)　2. (A,D)　3. (A,B,C,D)　4. (D)　5. (B)

习题 1.4

1. (D)　2. (C)　3. (B)　4. (A,B,C,D)

习题 1.5

1. (1) $+\infty$　(2) 0　(3) 不存在　(4) 0　(5) $+\infty$　(6) 不存在　(7) $+\infty$　(8) 0　(9) $+\infty$

2. (1) 0　(2) 0　(3) 0　(4) 0　(5) 0　(6) 0

3. (1) $+\infty$　(2) $+\infty$　(3) 0　(4) $\frac{\pi}{2}$　(5) $-\pi$　(6) 不存在　(7) 0　(8) 0　(9) $-\infty$

4. (A,B,C)

5. (A,C)

6. (A,B,C,D,E,F)

习题 1.6

1. (1) -8　(2) 1　(3) ∞　(4) ∞　(5) $\frac{3}{4}$　(6) $\frac{2}{3}$　(7) $-\frac{1}{2}$　(8) $\frac{5}{2}$　(9) $\frac{1}{2}$　(10) $-\frac{1}{2}$

2. (1) -1(2) 1

3. (1) $\sqrt{2}-1$(2) $\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. (1) 不存在　(2) 4

6. 不存在

7. 0

8. (1) 0　(2) 不存在　(3) 4

9. (1) 不存在　(2) 不存在

10. $a=-3$

习题 1.7

1. (1) 3　(2) $\frac{5}{3}$　(3) 1　(4) $\frac{1}{2}$　(5) 2　(6) $\frac{2}{3}$　(7) $\alpha-\beta$　(8) $\frac{1}{2}$

2. (1) e　(2) e^{-2}　(3) e^{-3}　(4) 2　(5) e^2　(6) e^2　(7) 1　(8) e　(9) e^2　(10) e^{-2}　(11) e　(12) e^2　(13) e^4　(14) e^2　(15) -3　(16) $\sqrt{e}$　(17) 1

习题 1.8

1. -1

2. $\Delta y=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$

3.（1）连续　（2）连续　（3）不连续　（4）连续　（5）不连续　（6）连续

4.（1）0　（2）e^{ab}

5.（1）$x=-1$，$x=1$，$[-2,-1]\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$，第一类可去间断点。

（2）$x=2$，$x=3$，$(-\infty)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$，第一类可去间断点。

（3）$x=0$，$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，第一类跳跃间断点。

（4）$x=-1$，$[-3,-1]\cup(-1,3)$，第一类可去间断点。

6. 不连续

7. $k=1$

8. $A=-1$

10. $a=1$，$b=2$

11.（1）$a=1$，$f(x)$在 $x=0$ 处连续。

（2）$a\neq1$，$a>0$，$f(x)$在 $x=0$ 处不连续。

（3）$a=2$ 时，连续区间为$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$。