

第一部分 理 论 篇

第 0 章 绪论

第 1 章 离散时间信号与系统

第 2 章 z 变换

第 3 章 离散傅里叶变换

第 4 章 快速傅里叶变换

第 5 章 数字滤波器的基本结构

第 6 章 无限长单位脉冲响应数字滤波器的设计方法

第 7 章 有限长单位脉冲响应数字滤波器的设计方法

第 8 章 多采样率数字信号处理

电子工业出版社版权所有
盗版必究

第0章 绪 论

数字信号处理是研究如何用数字或符号序列来表示信号以及对这些序列进行处理的一门学科。处理的目的是估计信号的特征参数，也可以是把信号变换成某种更符合需要的形式。例如，通过分析和运算，可以估计脑电图或心电图中的某种特征参数，帮助医生查找病因和分析病情的程度，确定合理的治疗方案。数字信号处理起源于17世纪和18世纪的数学，它所采用的各种方法及种种应用已有悠久的历史。但是，它又像数字计算机和集成电路那样，以崭新的面貌出现于世，在生物医学工程、声学、雷达、地层学、语音通信、数据通信、核科学等许多领域充分显示其重要作用。

0.1 信号、系统与信号处理

人们相互问候、发布新闻、传播图像或者传递数据，其目的都是要把某些消息借一定形式的信号传出去。信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。

很久以来，人们曾寻求各种方法，以实现信号的传输。例如，我国古代借助烽火来传送边疆警报，人们借助于声音和文字信号表达自己的思想和感情，医学工作者用生物电信号描述人体器官的功能，经济学家用经济统计数据评价和预测社会经济的发展等。

同一种信号可以从不同角度进行分类。

(1) 确定性信号与随机信号：对于指定的某一时刻 t ，除若干不连续点外，可确定一相应的函数值 $f(t)$ ，这样的信号是确定信号。例如正弦信号。但是实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性，这种信号称为随机信号或不确定信号。

(2) 周期信号与非周期信号：若信号满足 $x(t) = x(t + kT)$ ， k 为整数，或 $x(n) = x(n + kN)$ ， N 为正整数， $k, n + kN$ 为任意整数，则 $x(t)$ 和 $x(n)$ 都是周期信号，周期分别为 T 和 N ，否则就是非周期信号。

(3) 能量信号和功率信号：若信号能量 E 有限，则称为能量信号。若信号平均功率 P 有限，则称为功率信号，这种信号的总能量一般趋于无穷。周期信号及随机信号一般是功率信号，而非周期的绝对可积(和)信号一般是能量信号。

(4) 一维信号与多维信号：信号的变量可以是时间，也可以是频率、空间或其他的物理量。若信号是一个变量(如时间)的函数，则称为一维信号；若信号是两个变量(如空间坐标 x, y) 的函数，则称为二维信号；推而广之，若信号是多个(如 M 个， $M \geq 2$) 变量的函数，则称为多维(M 维)信号。若信号表示成 M 维的矢量

$$\mathbf{x} = [x_1(n), x_2(n), \dots, x_M(n)]^T$$

则称 \mathbf{x} 是一个 M 维的矢量信号。

(5) 连续时间信号与离散时间信号：按照时间函数取值的连续性和离散性，可将信号划分为连续时间信号和离散时间信号(简称为连续信号与离散信号)。

连续时间信号在其存在的时间范围内，任意时刻都有定义(即都可以给出确定的函数值，可以有有限个间断点)。用 t 表示连续时间变量。离散时间信号在时间上是离散的，只在某些

不连续的规定瞬时给出函数值，其他时间没有定义。用 n 表示离散时间变量。图 0.1 给出了连续时间信号和离散时间信号的示例。

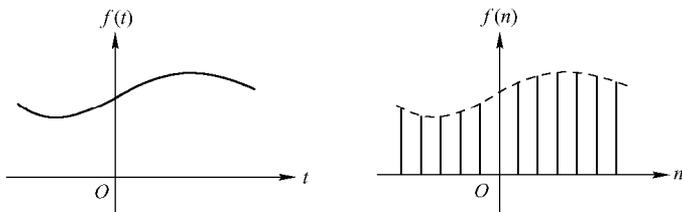
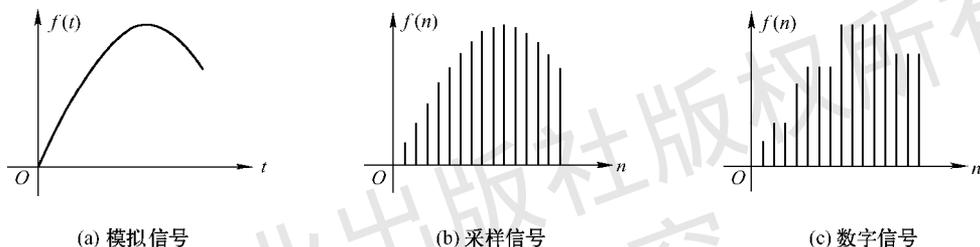


图 0.1 连续时间信号和离散时间信号示例

如果离散时间信号的幅值是连续的，则又可以称为采样信号。另一种情况是，离散时间信号的幅值被限定为某些离散值，即时间与幅值取值都具有离散性，这种信号又称为数字信号。时间和幅值取值都是连续的连续时间信号又可以称为模拟信号。图 0.2 给出了三种形式信号的示例。



(a) 模拟信号

(b) 采样信号

(c) 数字信号

图 0.2 模拟信号、采样信号与数字信号

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。其本质是对输入信号进行处理，并将处理后的信号作为系统的输出，这种输出也称为系统的响应。例如，计算机的显示系统、太阳系、通信系统、控制系统、经济系统、生态系统等。图 0.3 给出了一个通信系统的例子。

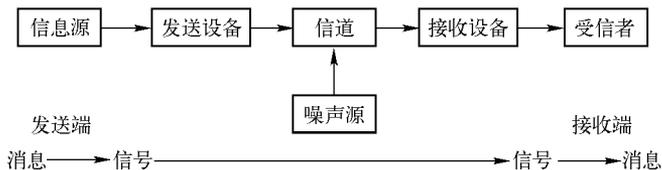


图 0.3 通信系统

信号处理是指对信号的某种加工或变换。加工变换的目的是：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；或者将信号变成容易分析与识别的形式，便于估计和选择它的特征参数。

0.2 数字信号处理系统的基本组成

为了对“数字信号处理”有一个大致的轮廓概念，我们先从模拟信号的数字化处理入手。图 0.4 表示了这样的一个系统的方框图。图 0.5 给出了图 0.4 中各有关信号的波形。此系统首

先把模拟信号变换为数字信号, 然后利用数字技术进行处理, 最后再还原成模拟信号。输入信号 $x_a(t)$ 先经过前置滤波器, 将 $x_a(t)$ 中高于某一频率(折叠频率, 等于采样频率的一半)的分量滤除。然后在模(拟)数(字)变换器(A/D 变换器)中每隔 T 秒(采样周期)取出一次 $x_a(t)$ 的幅度, 采样后的信号称为离散时间信号, 它只表示一些离散时间点 $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ 上的信号值 $x_a(0), x_a(T), \dots, x_a(nT), \dots$, 如图 0.5(b)所示, 采样过程即是对模拟信号的时间离散化的过程; 随之在 A/D 变换器的保持电路中将采样信号变换成数字信号, 因为一般采用有限位二进制码, 所以它所表示的信号幅度是有限的, 例如 8 位码, 只能表示 $2^8 = 256$ 种不同的信号幅度, 这些幅度称为量化电平(当离散时间信号幅度与量化电平不相同, 就要以最接近的一个量化电平来近似它)。所以经 A/D 变换后, 不但时间离散化了, 而且幅度也量化了, 这种信号就称为数字信号, 它是数的序列, 我们用 $x(n)$ 来代表输入信号数字化后的序列, 自变量 n 是整型变量, 表示这个数在序列中的次序, 为了形象起见, 用一个垂直线段来表示 $x(n)$ 的数值大小, 如图 0.5(c)所示。随后, 数字信号序列 $x(n)$ 通过数字信号处理系统的核心部分, 即数字信号处理器, 按照预定的要求进行加工处理, 得到输出数字信号 $y(n)$, 如图 0.5(d)所示。再接下来, $y(n)$ 通过数(字)模(拟)(D/A)变换器, 将数字信号序列反过来变换成模拟信号, 这些信号在时间点 $0, T, 2T, \dots, nT, \dots$ 上的幅度应等于序列 $y(n)$ 中相应数码所代表的数值大小。最后还要通过一个模拟滤波器, 滤除不必要的高频分量, 平滑成所需的模拟输出信号 $y_a(t)$, 如图 0.5(e)所示。

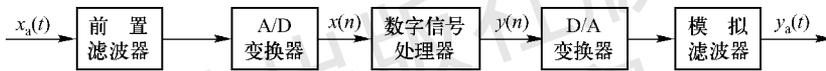


图 0.4 采样信号数字处理系统

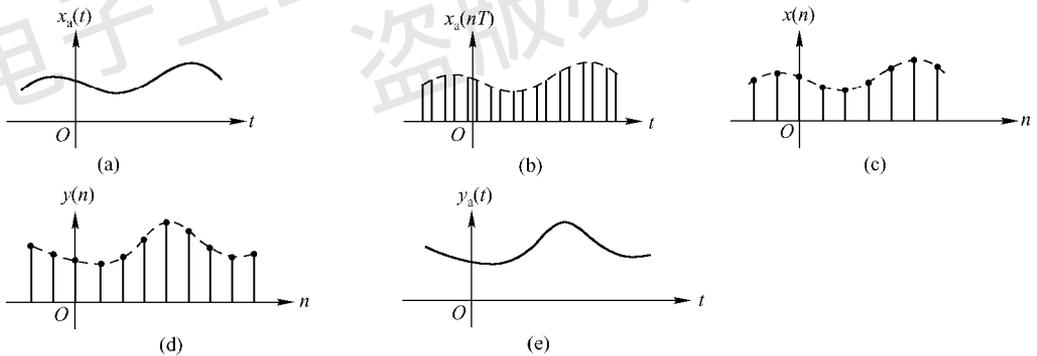


图 0.5 采样信号数字处理系统信号波形

图 0.4 所表示的是模拟信号数字处理系统的方框图, 实际的系统并不一定要包括它的所有功能模块。例如, 有些系统只需数字输出, 可直接以数字形式显示或打印, 就不需要 D/A 变换器; 另一些系统的输入就是数字量, 因而就不需要 A/D 变换器; 纯数字系统则只需要数字信号处理器这一核心部分就行了。

图 0.4 中的数字信号处理器可以是数字计算机或微处理器, 通过软件编程对输入信号进行预期的处理, 这是一种软件实现方法。另一种方法是用基本的数字硬件组成专用处理器或用专用数字信号处理芯片作为数字信号处理器, 这种方法的优点是可以进行实时处理, 但是由于是专用的, 因而只能完成某一具体的加工处理, 而不能完成其他类的加工处理, 这是它

的缺点。第三种数字信号处理器就是现在最为流行的通用数字信号处理芯片，它是专为信号处理设计的芯片，有专门执行信号处理算法的硬件，例如乘法累加器、流水线工作方式、并行处理、多总线、位翻转(倒位序)硬件等，并有专为信号处理用的指令。采用信号处理器既有实时的优点，又有用软件实现的多用性优点，是一种重要的数字信号处理实现方法。实际上，由于近年来信息技术的快速发展，数字信号处理芯片已经应用到各个领域中了。

0.3 数字信号处理的特点

与模拟系统相比，数字系统具有如下的一些突出优点。

(1) 精度高：在模拟网络中，元器件精度要达到 10^{-3} 以上已经不容易了，而数字系统17位字长可以达到 10^{-5} 的精度，这是很平常的。因此，在很多高精密的系统及其测量中，数字技术是很有效的工具。甚至有时只有采用数字技术，才能达到精度的要求。

(2) 可靠性高：模拟系统中各种参数都有一定的温度系数，都随环境条件的变化而变化，并且容易出现感应、杂散效应甚至振荡等。而数字系统受这些因素的影响要小得多。

(3) 灵活性高：一个数字系统的性能主要是由乘法器的各系数决定的，而这些系数是存放在系统存储器中的，只要对这些存储器输入不同的数据，就可以随时改变系统的参数，从而得到不同的系统。

数字系统的一个较大优点是能利用一套计算设备同时处理几路独立的信号，这就是“时分复用”的应用，如图0.6所示，当各路输入信号同时输入序列值时，同步系统控制它们在时间上前后错开，并依次进入处理器，处理器在算完一路的结果以后，再算第二路的结果，在各路输入信号输入第二个序列值以前，处理器已经将各路信号算完一遍，并将结果送给了各路输出。因此，对于每一路信道来说，都好像是单独占用着处理器一样。处理器的运算速度越高，它所能同时处理的信道也越多，因而功能也越灵活。

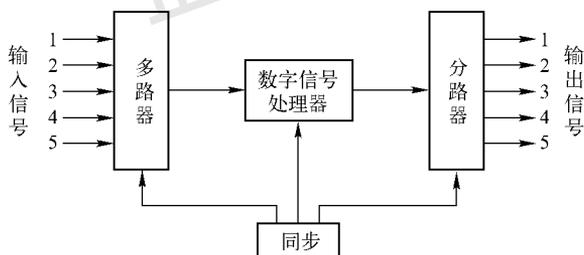


图 0.6 时分多路复用系统

(4) 容易大规模集成：由于数字部件具有高度规范性，便于大规模集成、大规模生产，而对电路参数要求不严，故产品成品率高。尤其是对于低频信号，例如，地震波分析需要过滤几赫到几十赫的信号，用模拟网络处理时，电感器和电容器的数值、体积和重量都非常大，性能也达不到要求。而数字信号处理系统在这个频率却非常优越。

(5) 可以获得高性能指标：例如，对信号进行频谱分析，模拟频谱仪在频率低端只能分析到10 Hz 以上的频率，且难以做到高分辨率(足够窄的带宽)；但在数字谱分析中，已能做到 10^{-3} Hz 的谱分析。又如，有限长单位脉冲响应数字滤波器可实现准确的线性相位特性，这在模拟系统中是很难达到的。

(6) 二维与多维处理: 利用庞大的存储单元可以存储一帧或数帧图像信号, 实现二维甚至多维信号的处理, 包括二维或多维滤波、二维或多维谱分析等。

数字信号处理也有自己的缺点。目前, 一般来说, 数字系统的速度还不算高, 因而还不能处理很高频率的信号, 用微型计算机进行软件处理更是如此。另外, 微处理器(比如数字滤波器)的硬件结构还比较复杂, 价格昂贵。但是随着大规模集成电路的发展, 这些问题将越来越不重要了。

0.4 数字信号处理的应用

数字信号处理系统由于数字计算机的应用而得到广泛使用。数字信号处理技术已广泛应用到数字通信、电子测量、遥感遥测、生物医学工程, 以及数字图像处理、震动分析等领域。

(1) 滤波: 滤波是现代数字信号处理的重要研究内容, 在信号分析、图像处理、模式识别、自动控制等领域得到了广泛应用。

(2) 通信: 数字信号处理在通信领域中发挥着非常重要的作用, 尤其是在蜂窝电话、数字调制解调器和视频音频传输技术方面。包括自适应差分脉码调制、自适应脉码调制、差分脉码调制、增量调制、自适应均衡、数字公用交换、信道复用、移动电话、调制解调器、数据或数字信号的加密、扩频技术、通信制式的转换、卫星通信、TDMA/FDMA/CDMA 等各种通信制式、软件无线电等。

(3) 语音、语言: 包括语音邮件、语音编码、数字录音系统、语音识别、语音合成、语音增强、文本语音变换等。

(4) 图像、图形: 包括图像压缩、图像增强、图像复原、图像重建、图像变换、图像分割、图像校正、边缘检测、计算机视觉等。

(5) 消费电子: 包括数字电视、移动媒体、数字音频、音乐合成器、电子玩具和游戏、CD/VCD/DVD 播放机、数字留言/应答机、汽车电子装置等。

(6) 仪器: 包括频谱分析仪、函数发生器、地震信号处理器、瞬态分析仪、锁相环、模式匹配等。

(7) 工业控制与自动化: 包括机器人控制、激光打印机控制、自动机、电力线监视器、计算机辅助制造、引擎控制、自适应驾驶控制等。

(8) 医疗: 包括健康助理、远程医疗、生物医学、计算机辅助诊断、病人监视、超声仪器、CT 扫描、核磁共振、助听器等。

(9) 军事: 包括雷达处理、声呐处理、遥感遥测、导航、射频调制解调器、全球定位系统(GPS)、侦察卫星、航空航天测试、自适应波束形成、阵列天线信号处理等。

综上所述, 数字信号处理是一门涉及众多学科又应用于众多领域的学科, 它既有较完整的理论体系, 又以最快的速度形成自己的产业。因此这一学科有着极其美好的发展前景, 并将为国民经济的多个领域的发展做出自己的贡献。

第 1 章 离散时间信号与系统

1.1 引言

数字信号处理是应用计算机或通用数字信号处理设备将信号在数字域中计算处理(比如变换、压缩、滤波、估计等),从而达到一定应用目的的学科。

信号通常是一个自变量或几个自变量的函数,如果仅有一个自变量,则为一维信号,如果有两个以上自变量,则为多维信号。关于信号的自变量,可以是时间、距离、温度、电压等多种形式。例如,语音信号可以表示为一个时间变量的函数,静止图像信号可以表示为两个空间变量的亮度函数。以时间为自变量的信号又可以根据其幅度和时间的连续与离散性,分为连续时间信号、离散时间信号和数字信号。本书仅研究以时间为自变量的一维离散时间信号处理的理论与技术。

系统的作用是将信号转换成某种符合要求的形式。根据系统输入和输出信号的不同,可分为连续时间系统、离散时间系统、数字系统及混合系统。本书仅研究输入和输出都是离散时间信号的离散时间系统。

本章主要讨论了时域离散信号的表示方法、典型信号、信号的运算、信号的性质,连续时间信号的采样、采样信号的频谱、采样定理,系统分类及系统性质、系统的输入输出描述法,常系数线性差分方程的求解等内容。

本章是全书的理论基础,读者应联系信号与系统课程的有关知识,认真学好这一章,为后续的深入学习做好准备。

1.2 离散时间信号——序列

离散时间信号只在离散时间上给出函数值,是时间上不连续的一个序列。它既可以是实数,也可以是复数。一个离散时间信号是一个整数值变量 n 的函数,表示为 $x(n)$ 或 $\{x(n)\}$ 。

尽管独立变量 n 不一定表示“时间”(例如, n 可以表示温度或距离),但 $x(n)$ 一般被认为是时间的函数。因为离散时间信号 $x(n)$ 对于非整数值 n 是没有定义的,所以一个实值离散时间信号(即序列)可以用图形来描述,如图 1.1 所示。横轴虽为连续直线,但只在 n 为整数时才有意义。纵轴线段的长短代表各序列值的大小。

离散时间信号常常可以对模拟信号(如语音)进行等间隔采样而得到。例如,对于一个连续时间信号 $x_a(t)$,以每秒 $f_s = 1/T$ 个采样的速率采样而产生采样信号,它与 $x_a(t)$ 的关系如下:

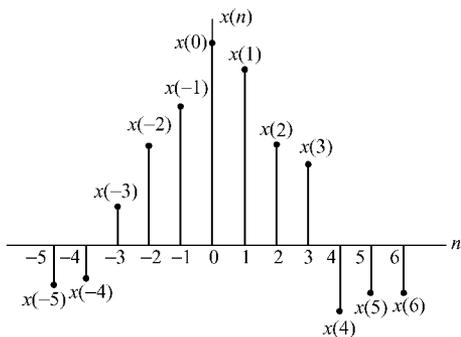


图 1.1 离散时间信号 $x(n)$ 的图形表示

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \quad (1.1)$$

然而，并不是所有的离散时间信号都是这样获得的。一些信号可以认为是自然产生的离散时间序列，如每日股票市场价格、人口统计数和仓库存量等。

1.2.1 几种常用的典型序列

1. 单位脉冲序列(单位冲激序列，单位采样序列) $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

这个序列只在 $n=0$ 处有一个单位值1，其余点上皆为0，因此也称为“单位冲激序列”或“单位采样序列”。单位脉冲序列如图1.2所示。

这是最常用、最重要的一种序列，它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中的单位冲激函数 $\delta(t)$ 。但是，在连续时间系统中， $\delta(t)$ 是 $t=0$ 点脉宽趋于零，幅值趋于无限大，面积为1的信号，是极限概念的信号，并非任何现实的信号。而离散时间系统中的 $\delta(n)$ ，却完全是一个现实的序列，它的脉冲幅度是1，是一个有限值。

2. 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

如图1.3所示。它类似于连续时间信号与系统中的单位阶跃函数 $u(t)$ 。

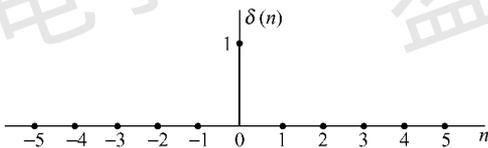


图 1.2 $\delta(n)$ 序列

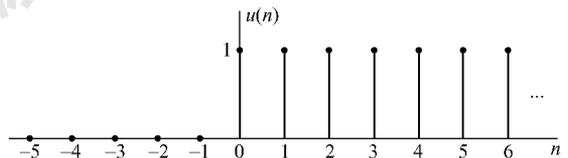


图 1.3 $u(n)$ 序列

$\delta(n)$ 和 $u(n)$ 间的关系为

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.4)$$

这就是 $u(n)$ 的后向差分。而

$$u(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(n-m) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots \quad (1.5)$$

令 $n-m=k$ ，代入式(1.5)可得

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k) \quad (1.6)$$

这里就用到了累加的概念。

3. 矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.7)$$

矩形序列 $R_N(n)$ 如图1.4所示。

$R_N(n)$ 和 $\delta(n)$ 、 $u(n)$ 间的关系为

$$R_N(n) = u(n) - u(n - N) \quad (1.8)$$

$$R_N(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \delta(n - m) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \cdots + \delta[n - (N - 1)] \quad (1.9)$$

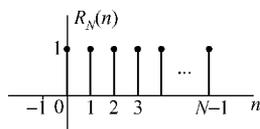


图 1.4 矩形序列 $R_N(n)$

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \quad (1.10)$$

式中, a 为实数。当 $|a| < 1$ 时, 序列是收敛的; 而当 $|a| > 1$ 时, 序列是发散的。当 a 为负数时, 序列是摆动的, 如图1.5所示。

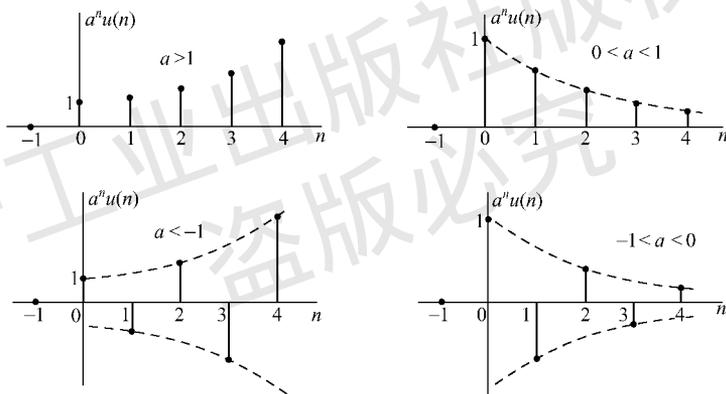


图 1.5 实指数序列

5. 正弦型序列

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi) \quad (1.11)$$

式中, A 为幅度; ϕ 为起始相位; ω_0 为数字域的角频率, 它反映了序列变化的速率。如果正弦序列由模拟信号 $x_a(t)$ 采样得到, 那么

$$x_a(t) = \sin(\Omega t)$$

$$x_a(t) \Big|_{t=nT} = \sin(\Omega nT) = x(n)$$

$$x(n) = \sin(\omega n)$$

因为在数值上, 序列值与采样信号值相等, 因此得到数字域角频率 ω 与模拟域角频率 Ω 之间的关系为

$$\omega = \Omega T \quad (1.12)$$

式(1.12)具有普遍意义,它表示凡是由模拟信号采样得到的序列,模拟域角频率与数字域角频率之间的关系。由于采样频率 f_s 与采样周期 T 互为倒数,也可以表示成

$$\omega = \frac{\Omega}{f_s} \quad (1.13)$$

式(1.13)表示数字域角频率是模拟域角频率对采样频率的归一化频率。本书中均用 ω 表示数字域频率, Ω 和 f 表示模拟域角频率和模拟域频率。

6. 复指数序列

序列值为复数的序列称为复指数序列。复指数序列的每个值具有实部和虚部两部分。

复指数序列是最常用的一种复序列:

$$x(n) = Ae^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.14)$$

或设 $\sigma = 0$,

$$x(n) = Ae^{j\omega_0 n} \quad (1.15)$$

式中, ω_0 是复正弦的数字域角频率。

对第二种表示,序列的实部、虚部分别为

$$x(n) = A(\cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n) = A \cos \omega_0 n + jA \sin \omega_0 n$$

如果用极坐标表示,则

$$x(n) = |x(n)|e^{j\arg[x(n)]} = Ae^{j\omega_0 n}$$

因此有

$$\begin{aligned} |x(n)| &= A \\ \arg[x(n)] &= \omega_0 n \end{aligned}$$

1.2.2 序列的运算

序列的运算包括移位、翻褶、和、积、累加、差分、时间尺度变换、卷积和等。

1. 移位

序列 $x(n]$,其移位序列 $w(n)$ 为

$$w(n) = x(n - m) \quad (1.16)$$

当 m 为正时, $x(n - m)$ 是指序列 $x(n)$ 逐项依次延时(右移) m 位而给出的一个新序列;当 m 为负时, $x(n - m)$ 是指 $x(n)$ 依次超前(左移) m 位。图 1.6 显示了图 1.1 的 $x(n)$ 序列的移位序列 $w(n) = x(n - 2)$,即 $m = 2$ 时的情况。

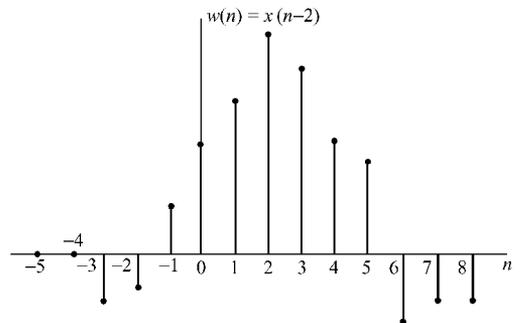


图 1.6 图 1.1 序列 $x(n)$ 的移位

2. 序列的翻褶

如果序列为 $x(n)$,则 $x(-n)$ 是以 $n = 0$ 的纵轴为对称轴将序列 $x(n)$ 加以翻褶。 $x(n)$ 及 $x(-n)$ 如图 1.7(a)和图 1.7(b)所示。

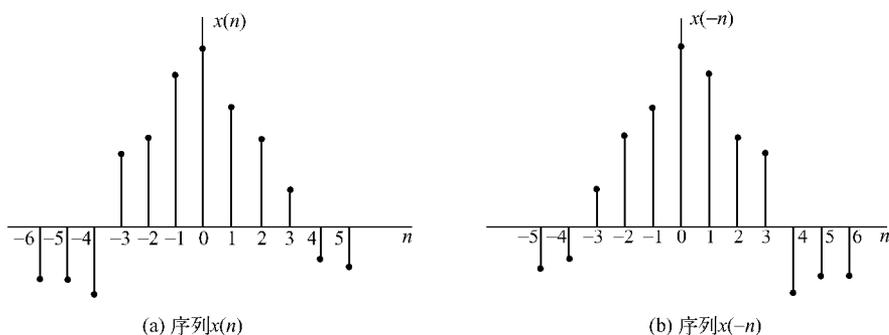


图 1.7 序列的翻褶

3. 序列的和

两序列的和是指同序号 n 的序列值逐项对应相加而构成的一个新序列。和序列 $z(n)$ 可表示为

$$z(n) = x(n) + y(n) \quad (1.17)$$

4. 序列的乘积

两序列相乘是指同序号 n 的序列值逐项对应相乘。乘积序列 $f(n)$ 可表示为

$$f(n) = x(n)y(n) \quad (1.18)$$

5. 序列的标乘

序列 $x(n)$ 的标乘是指 $x(n)$ 的每个序列值乘以常数 c 。标乘序列 $f(n)$ 可表示为

$$f(n) = cx(n) \quad (1.19)$$

6. 累加

设某序列为 $x(n)$ ，则 $x(n)$ 的累加序列 $y(n)$ 定义为

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.20)$$

它表示 $y(n)$ 在某一个 n_0 上的值 $y(n_0)$ 等于在这一个 n_0 上的 $x(n_0)$ 值与 n_0 以前所有 n 上的 $x(n)$ 之和。

7. 差分运算

$$\text{前向差分} \quad \Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

$$\text{后向差分} \quad \nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$\text{由此得出} \quad \nabla x(n) = \Delta x(n-1)$$

8. 序列的时间尺度(比例)变换

对某序列 $x(n]$ ，其时间尺度变换序列为 $x(mn)$ 或 $x\left(\frac{n}{m}\right)$ ，其中 m 为正整数。

注意：有时需去除某些点或补足相应的零值。

例 1.1 已知 $x(n]$ 波形(见图 1.8), 试画出 $x(2n]$ 和 $x\left(\frac{n}{2}\right]$ 的波形。

解 见图 1.9 和图 1.10。

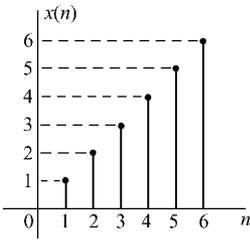


图 1.8 序列 $x(n]$

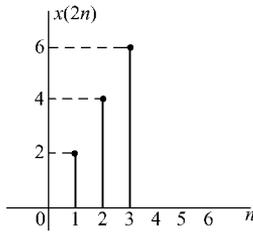


图 1.9 序列 $x(2n]$

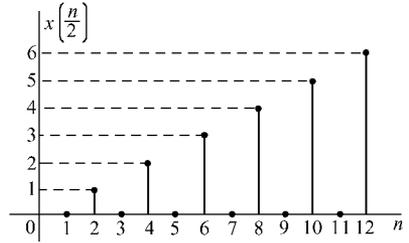


图 1.10 序列 $x\left(\frac{n}{2}\right]$

9. 卷积和

我们知道卷积积分是求连续线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。同样,对离散系统,“卷积和”也是求离散线性时不变系统输出响应(零状态响应)的主要方法。

这里我们一般性地讨论卷积和的定义及运算方法。

设两序列为 $x(n]$ 和 $h(n]$, 则 $x(n]$ 和 $h(n]$ 的卷积和定义为

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1.21)$$

其中,卷积和用*来表示。卷积和的运算在图形表示上可分为四步:翻褶、移位、相乘、相加,如图 1.11 所示。

(1) 翻褶:先在哑变量坐标 m 上做出序列 $x(m]$ 和 $h(m]$, 将 $h(m]$ 以 $m=0$ 的垂直轴为对称轴翻褶成 $h(-m]$ 。

(2) 移位:将 $h(-m]$ 移位 n , 即得 $h(n-m]$ 。当 n 为正整数时,右移 n 位,当 n 为负整数时,左移 n 位。

(3) 相乘:再将 $h(n-m]$ 和 $x(m]$ 的相同 m 值的对应点值相乘。

(4) 相加:把以上所有对应点的乘积叠加起来,即得 $y(n]$ 值。

依上法,取 $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ 各值,即可得全部 $y(n]$ 值。

卷积和的常用计算方法有:解析式法、图解法、对位相乘求和法、利用性质等。

例 1.2 已知 $x(n) = \alpha^n u(n) (0 < \alpha < 1)$, $h(n) = u(n)$, 求卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 。

解

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m) u(n-m) \\ &= \left(\sum_{m=0}^n \alpha^m \right) \cdot u(n) \\ &= \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u(n) \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $y(n) = \frac{1}{1 - \alpha}$

波形如图 1.11 所示。

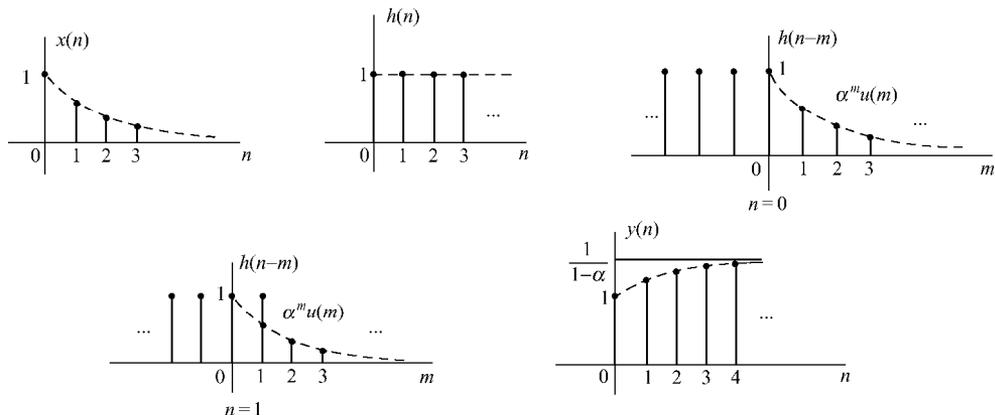


图 1.11 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的卷积和

卷积和与两序列的先后次序无关, 证明如下。

令 $n-m=m'$, 代入式 (1.21), 然后再将 m' 换成 m , 即得

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

因此 $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$ 。

1.2.3 序列的周期性

如果对所有 n 存在一个最小的正整数 N , 满足

$$x(n+N) = x(n) \quad (1.22)$$

则称序列 $x(n)$ 是周期性序列, 周期为 N 。

现在讨论正弦序列的周期性。

若 $x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$

则 $x(n+N) = A \sin[\omega_0(n+N) + \phi] = A \sin(\omega_0 N + \omega_0 n + \phi)$

若 $N\omega_0 = 2\pi k$, 当 k 为正整数时, 则

$$x(n+N) = x(n)$$

即 $A \sin(\omega_0 n + \phi) = A \sin[\omega_0(n+N) + \phi]$

这时的正弦序列就是周期性序列, 其周期满足 $N = 2\pi k / \omega_0$ 。可分几种情况讨论如下。

(1) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0} = N$ 即二者比值为正整数时, 序列是周期性的, 周期为 N 。

例 1.3 正弦序列 $x(n) = \sin(\omega_0 n)$ (其波形如图 1.12 所示), 设 $N=10$, 说明正弦序列的包络线每隔 10 个样值重复一次, 周期为 10。

解 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{10} = 0.2\pi$

表示相邻两个序列值间的弧度数为 0.2π 。

ω_0 反映每个序列值出现的速率, ω_0 越小, 两个序列值间的弧度也就越小。

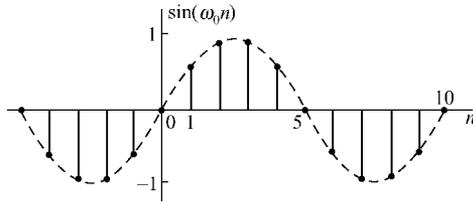


图 1.12 当 $\phi=0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{10}$, $A=1$ 时的正弦序列(周期性序列, 周期 $N=10$)

(2) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k}$, $\frac{N}{k}$ 为有理数, N 和 k 互素时, 序列仍是周期性的, 周期 $N = k \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

例 1.4 已知: 正弦序列 $x(n) = \sin \frac{4\pi}{11} n$ (其波形如图 1.13 所示), 求其周期。

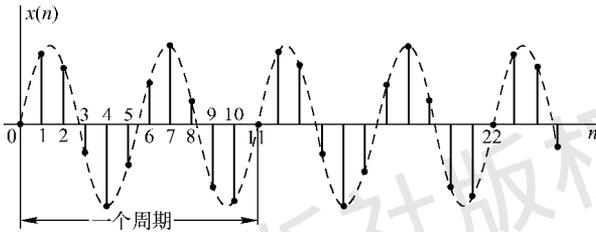


图 1.13 当 $\phi=0$, $\omega_0 = \frac{4\pi}{11}$, $A=1$ 时的正弦序列(周期性序列, 周期 $N=11$)

解 $\omega_0 = \frac{4\pi}{11}$, 则有 $\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{11}{4\pi} = \frac{11}{2} = \frac{N}{k}$

所以 $N=11$, 即周期为 11 (2π 中有 5.5 个 ω_0)。

(3) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数时, 找不到满足 $x(n+N) = x(n)$ 的 N 值, 此时序列为非周期的。

例 1.5 判断信号 $x(n) = \sin(0.4n)$ 是否为周期信号。

解 $\omega_0 = 0.4$, $\frac{2\pi}{\omega_0} = 5\pi$ 是无理数, 所以为非周期的序列。

同样, 余弦序列和复指数序列的周期性与正弦序列的情况相同。

下面我们来进一步讨论。如果一个正弦序列是由一个连续信号采样而得到的, 那么, 采样时间间隔 T 和连续正弦信号的周期 T_0 之间应该是什么关系才能使得到的采样序列仍然是周期序列呢?

设连续正弦信号 $x_a(t)$ 为

$$x_a(t) = A \sin(\Omega_0 t + \phi)$$

这一信号的频率为 f_0 , 角频率 $\Omega_0 = 2\pi f_0$, 信号的周期为 $T_0 = 1/f_0 = 2\pi/\Omega_0$ 。

如果对连续周期信号 $x_a(t)$ 进行采样, 其采样时间间隔为 T , 采样后的信号以 $x(n)$ 表示, 则有

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT} = A \sin(\Omega_0 nT + \phi)$$

如果令 ω 为数字域频率, 满足

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{f_s} = 2\pi \frac{f_0}{f_s}$$

式中, f_s 是采样频率。用 ω_0 代替 $\Omega_0 T$, 可得

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n + \phi)$$

这就是前面讨论的正弦序列。

下面来看 $2\pi/\omega_0$ 与 T 及 T_0 的关系, 从而讨论前述正弦序列的周期性的条件意味着什么。

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{1}{\Omega_0 T} = 2\pi \frac{1}{2\pi f_0 T} = \frac{1}{f_0 T} = \frac{T_0}{T}$$

这表明, 若 $2\pi/\omega_0$ 为整数, 就表示连续正弦信号的周期 T_0 应为采样时间间隔 T 的整数倍; 若 $2\pi/\omega_0$ 为有理数, 就表示 T_0 与 T 是互素的整数, 且有

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k} = \frac{T_0}{T}$$

式中, k 和 N 皆为正整数, 从而有

$$NT = kT_0$$

即 N 个采样间隔应等于 k 个连续正弦信号的周期。

1.2.4 用单位脉冲序列来表示任意序列

用单位脉冲序列来表示任意序列对分析线性时不变系统是很有用的。

设 $\{x(n)\}$ 是一个序列值的集合, 其中的任意一个 $x(n)$ 值可以表示成单位脉冲序列的移位加权, 即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.23)$$

由于

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

则

$$x(m)\delta(n-m) = \begin{cases} x(n), & m = n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此, 式(1.23)成立, 这种表达式提供了一种信号分析工具。

例 1.6 用单位脉冲序列表示如图 1.14 所示的序列 $f(n)$ 。

解 根据式(1.23), 可以将序列 $f(n)$ 表示为

$$f(n) = \left\{ \begin{matrix} 1, 1.5, 0, -3, 0, 0 \\ \uparrow \\ n=0 \end{matrix} \right\} = \delta(n+1) + 1.5\delta(n) - 3\delta(n-2)$$

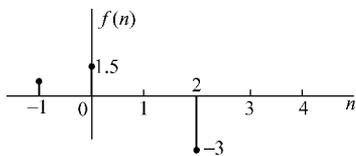


图 1.14 序列 $f(n)$

1.2.5 序列的能量

序列 $x(n)$ 的能量 E 定义为序列各采样样本模值的平方和, 即

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (1.24)$$

1.3 连续时间信号的采样

在某些合理条件限制下,一个连续时间信号能用其采样序列来完全表示,连续时间信号的处理往往是通过对其采样得到的离散时间序列的处理来完成的。本节将详细讨论采样过程,包括信号采样后,信号的频谱将发生怎样的变换,信号内容会不会丢失,以及由离散信号恢复成连续信号应该具备哪些条件等。采样的这些性质对离散信号和系统的分析都是十分重要的。要了解这些性质,让我们首先从采样过程的分析开始。

采样器可以视为一个电子开关,它的工作原理可由图1.15(a)来说明。设开关每隔 T 秒短暂地闭合一次,将连续信号接通,实现一次采样。如果开关每次闭合的时间为 τ 秒,那么采样器的输出将是一串周期为 T ,宽度为 τ 的脉冲。脉冲的幅度与这段 τ 时间内信号的幅度一致。如果以 $x_a(t)$ 代表输入的连续信号,如图1.15(b)所示,以 $x_p(t)$ 表示采样输出信号,如图1.15(d)所示。显然,这个过程可以视为一个脉冲调幅过程。被调制的脉冲载波是一串周期为 T ,宽度为 τ 的矩形脉冲信号,如图1.15(c)所示,并以 $p(t)$ 表示,而调制信号就是输入的连续信号。因而有

$$x_p(t) = x_a(t)p(t)$$

一般开关闭合时间都是很短的,而且 τ 越小,采样输出脉冲的幅度就越准确地反映输入信号在离散时间点上的瞬时值。当 $\tau \ll T$ 时,采样脉冲就接近于 δ 函数性质。

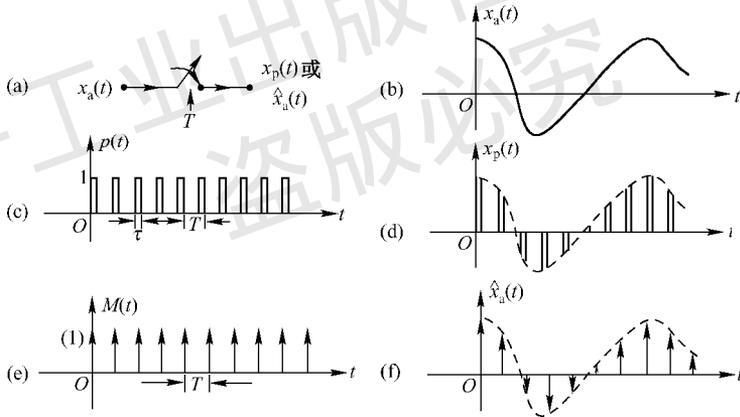


图 1.15 连续时间信号的采样过程

1.3.1 理想采样

理想采样就是假设采样开关闭合时间无限短,即 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况。此时,采样脉冲序列 $p(t)$ 变成冲激函数序列 $M(t)$,如图1.15(e)所示。这些冲激函数准确地出现在采样瞬间,面积为 1。采样后,输出理想采样信号的面积(即积分幅度)则准确地等于输入信号 $x_a(t)$ 在采样瞬间的幅度。理想采样过程如图 1.15(f)所示。以 $\hat{x}_a(t)$ 表示理想采样的输出[以后我们都以下标 a 表示连续信号(或称模拟信号),如 $x_a(t)$,而以它的顶部符号“ $\hat{}$ ”表示它的理想采样,如 $\hat{x}_a(t)$],冲激函数序列 $M(t)$ 为

$$M(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1.25)$$

这样我们就可将理想采样表示为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)M(t) \quad (1.26)$$

将式(1.25)代入式(1.26)可得

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT) \quad (1.27)$$

由于 $\delta(t-nT)$ 只在 $t=nT$ 时不为零,

$$x_a(t)\delta(t-nT) = x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$\text{故} \quad \hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) \quad (1.28)$$

在实际采样器中,任何开关都不能达到宽度为零的极限情况。但是当 τ 远远小于 T 时,实际采样器就很接近于一个理想采样器了。理想采样可以视为实际采样的一种科学本质的抽象,它可以更集中地反映采样过程的一切本质的特性。在以后的叙述中,还将看到,理想采样的概念对于 z 变换来说,是相当重要的。

1.3.2 理想采样信号的频谱

我们首先看看通过理想采样后信号频谱发生了什么变化。在连续时间信号与系统中已学过,式(1.26)表示时域相乘,则其频域(傅里叶变换域)表示为卷积运算。若式(1.26)中各个信号的傅里叶变换分别表示为

$$X_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1.29)$$

$$M(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} M(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1.30)$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (1.31)$$

则应满足

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * M(j\Omega) \quad (1.32)$$

现在来求 $M(j\Omega) = F[M(t)]$ 。由于 $M(t)$ 是以采样周期重复的冲激脉冲,因此是一个周期函数,可以用傅里叶级数表示,即

$$M(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_s t}$$

此级数的基频为采样频率,即

$$f_s = \frac{1}{T}, \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s$$

一般用符号 f 表示频率,单位为赫兹(Hz),用 Ω 表示角频率,单位为弧度/秒;有时统称为“频率”。

根据傅里叶级数的知识,系数 a_k 可以通过以下运算求得:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} M(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

以上结果的得出是考虑到在 $|t| \leq T/2$ 的积分区间内, 只有一个冲激脉冲 $\delta(t)$, 其他冲激 $\delta(t-nT)$ ($n \neq 0$) 时, 都在积分区间之外, 且利用了以下关系:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt$$

$$\text{因而} \quad M(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} \quad (1.33)$$

由此得出

$$M(j\Omega) = F[M(t)] = F\left[\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}\right] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F[e^{jk\Omega_s t}]$$

由于

$$F[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1.34)$$

所以

$$M(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1.35)$$

将式(1.35)代入式(1.32)可得

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) * X_a(j\Omega) \right]$$

根据冲激函数的性质, 可得

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \quad (1.36)$$

$$\text{或} \quad \hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\Omega - jk \frac{2\pi}{T}\right) \quad (1.37)$$

由此看出, 一个连续时间信号经过理想采样后, 其频谱将沿着频率轴以采样角频率 $\Omega_s = 2\pi/T$ 为间隔而重复, 这就是说频谱产生了周期性延拓, 如图 1.16 所示。也就是说, 理想采样信号的频谱, 是 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓函数, 其周期为 Ω_s , 而频谱的幅度则受 $1/T$ 加权, 由于 T 是常数, 所以除了一个常数因子外, 每一个延拓的谱分量都和原频谱分量相同。因此只要各延拓分量与原频谱分量不发生频率混叠, 则有可能恢复出原信号。因此, 如果 $x_a(t)$ 是带限信号, 其频谱如图 1.16(a) 所示, 且最高频谱分量 Ω_h 不超过 $\Omega_s/2$, 即

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases} \quad (1.38)$$

那么原信号的频谱和各次延拓分量的频谱彼此不重叠, 如图 1.16(c) 所示。这时采用一个截止

频率为 $\Omega_s/2$ 的理想低通滤波器, 就可以得到不失真的原信号频谱, 也就可以不失真地还原出原来的连续信号。

如果信号的最高频谱 Ω_h 超过 $\Omega_s/2$, 则各周期延拓分量产生频谱的交叠, 称为频谱混叠现象, 如图 1.16 (d) 所示。由于 $X_a(j\Omega)$ 一般是复数, 所以混叠也是复数相加。为了简明起见, 在图 1.16 中将 $X_a(j\Omega)$ 作为标量来处理。

我们将采样频率之半 ($\Omega_s/2$) 称为折叠频率, 即

$$\frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} \quad (1.39)$$

它如同一面镜子, 当信号频谱超过它时, 就会被折叠回来, 造成频谱的混叠。

图 1.17 说明了在简单余弦信号情况下频谱混叠的情况。在图 1.17 (a) 中, 给出该余弦信号

$$x_a(t) = \cos \Omega_0 t \quad (1.40)$$

的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 。

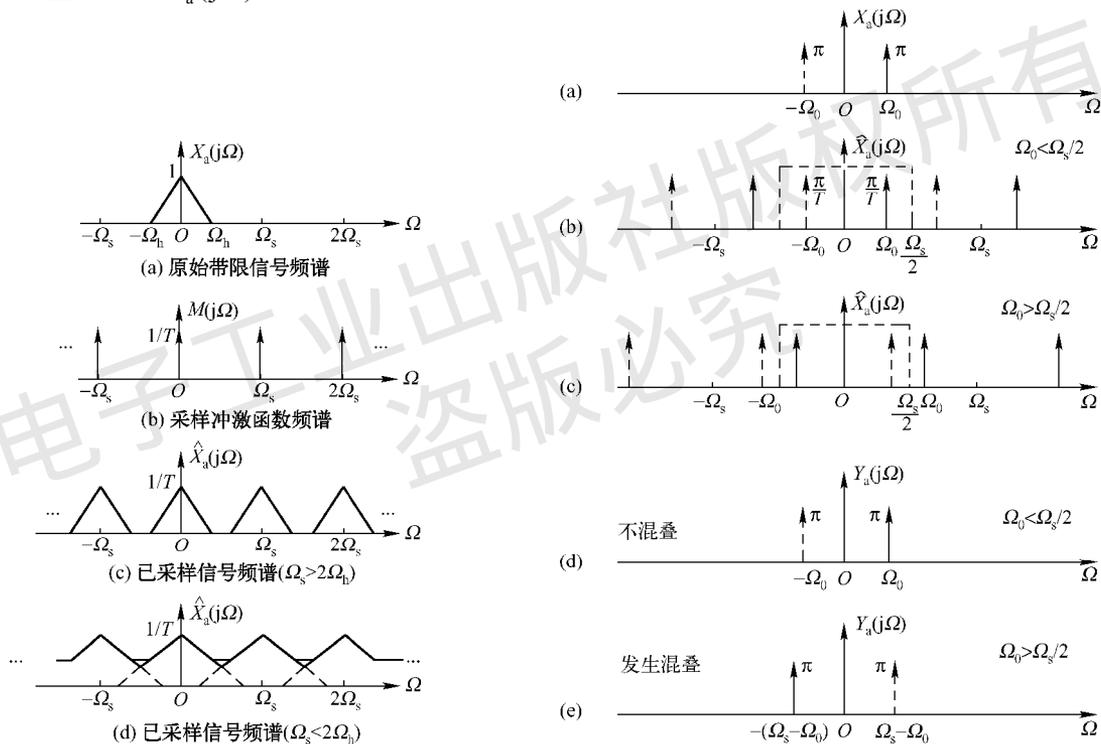


图 1.16 时域采样后, 频谱的周期延拓

图 1.17 一个余弦信号采样中的混叠效果

图 1.17 (b) 是在 $\Omega_0 < \Omega_s/2$ 时, $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换。图 1.17 (c) 是在 $\Omega_0 > \Omega_s/2$ 时, $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换。图 1.17 (d) 和图 1.17 (e) 则分别对应于 $\Omega_0 < \Omega_s/2$ 和 $\Omega_0 > \Omega_s/2$ 时低通滤波器输出的傅里叶变换, 在没有混叠时图 1.17 (d) 恢复出的输出为 $y_a(t) = \cos \Omega_0 t$, 在有混叠时图 1.17 (e) 中的输出则是 $y_a(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t$, 这就是说, 作为采样和恢复的结果, 高频信号 $\cos \Omega_0 t$ 被低频信号 $\cos(\Omega_s - \Omega_0)t$ 冒名顶替了。这个讨论就是奈奎斯特采样定理的基础。

由此得出结论: 要想采样后能够不失真地恢复出原信号, 采样频率必须大于两倍信号频谱的最高频率 ($\Omega_s > 2\Omega_h$), 这就是奈奎斯特采样定理。即

$$f_s > 2f_h$$

在实际工作中,为了避免频谱混淆现象发生,采样频率总是选得比奈奎斯特采样定理规定的下限频率更大些,例如选到 Ω_h 的3~4倍。同时为了避免高于折叠频率的杂散频谱进入采样器而造成频谱混淆,一般在采样器前加入一个保护性的前置低通滤波器,称为防混叠滤波器,其截止频率为 $\Omega_s/2$,以便滤除掉高于 $\Omega_s/2$ 的频率分量。

用同样的方法可以证明[也可将 $j\Omega = s$ 代入式(1.36)],理想采样后,信号的拉普拉斯变换在 s 平面上沿虚轴周期延拓。也就是说, $\hat{X}_a(s)$ 在 s 平面虚轴上是周期函数。即有

$$\hat{X}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(s - jk\Omega_s) \quad (1.41)$$

式中

$$X_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-st} dt$$

$$\hat{X}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(t) e^{-st} dt$$

式中, $X_a(s)$ 和 $\hat{X}_a(s)$ 分别是 $x_a(t)$ 和 $\hat{x}_a(t)$ 的双边拉普拉斯变换。

1.3.3 采样的恢复

如果理想采样满足奈奎斯特定理,即模拟信号频谱的最高频率小于折叠频率

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} X_a(j\Omega), & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

则采样后不会产生频谱混叠,由式(1.37)可知

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega), \quad |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2}$$

故将 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 通过一个理想低通滤波器,这个理想低通滤波器应该只让基带频谱通过,因而其带宽应该等于折叠频率,它的特性如图1.18所示。

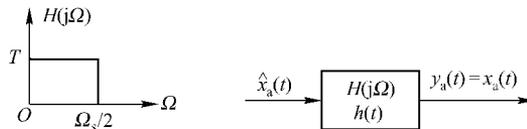


图 1.18 采样的恢复

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \frac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geq \frac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

采样信号通过这个滤波器后,就可滤出原模拟信号的频谱

$$Y_a(j\Omega) = \hat{X}_a(j\Omega)H(j\Omega) = X_a(j\Omega)$$

因此,在输出端可以得到原模拟信号

$$y_a(t) = x_a(t)$$

理想低通滤波器虽不可实现,但是在一定精度范围内,可用一个可实现的滤波器来逼近它。

1.3.4 由采样信号序列重构带限信号

理想低通滤波器的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2} = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \end{aligned}$$

由 $\hat{x}_a(t)$ 与 $h(t)$ 的卷积积分, 可以得到理想低通滤波器的输出为

$$\begin{aligned} y_a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(\tau) \delta(\tau-nT) \right] h(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h(t-\tau) \delta(\tau-nT) d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) h(t-nT) \end{aligned}$$

其中, $h(t-nT)$ 称为内插函数,

$$h(t-nT) = \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1.42)$$

其波形见图 1.19, 其特点为: 在采样点 nT 上, 函数值为 1; 在其余采样点上, 函数值都为零。

由于 $y_a(t) = x_a(t)$, 因此以上卷积结果也可以表示为

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \quad (1.43)$$

式(1.43)称为采样内插公式, 即信号的采样值 $x_a(nT)$ 经此公式而得到连续信号 $x_a(t)$ 。也就是说, $x_a(t)$ 等于各 $x_a(nT)$ 乘以对应的内插函数的总和。在每一采样点上, 只有该点所对应的内插函数不为零, 这使得各采样点上信号值不变, 而采样点之间的信号则由加权内插函数波形的延伸叠加而成, 如图 1.20 所示。这个公式说明只要采样频率高于两倍信号最高频率, 整个连续信号就可以完全用它的采样值来代表, 而不会丢掉任何信息。这就是奈奎斯特采样定理的意义。由上面的讨论可看出采样内插公式只限于使用到带限(频带有限)信号上。

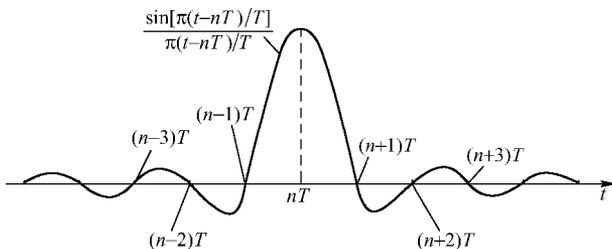


图 1.19 内插函数

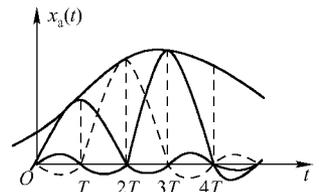
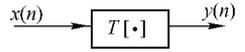


图 1.20 采样内插恢复

1.4 离散时间系统的时域分析

一个离散时间系统是将输入序列变换成输出序列的一种运算。若以 $T[\cdot]$ 来表示这种运算, 则一个离散时间系统可由图 1.21 来表示, 即

$$y(n) = T[x(n)] \quad (1.44)$$



离散时间系统中最重要、最常用的是“线性时不变系统”。

图 1.21 离散时间系统

1.4.1 线性系统

满足叠加性和齐次性的系统称为线性系统, 即若某一输入由 N 个信号的加权和组成, 则输出就由系统对这 N 个信号中每一个的响应的同样加权和组成。

如果系统在 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 单独输入时的输出分别为 $y_1(n)$ 和 $y_2(n)$, 即

$$y_1(n) = T[x_1(n)]$$

$$y_2(n) = T[x_2(n)]$$

那么当且仅当式 (1.45a) 和式 (1.45b) 成立时, 该系统是线性的,

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = y_1(n) + y_2(n) \quad (1.45a)$$

$$T[ax(n)] = aT[x(n)] = ay(n) \quad (1.45b)$$

式中, a 为任意常数。上述第一个性质称为叠加性, 第二个性质称为齐次性或比例性。这两个性质合在一起就成为叠加原理, 写成

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] = a_1y_1(n) + a_2y_2(n) \quad (1.46)$$

式 (1.46) 对任意常数 a_1 和 a_2 都成立。该式还可推广到多个输入的叠加, 即

$$T\left[\sum_k a_k x_k(n)\right] = \sum_k a_k T[x_k(n)] = \sum_k a_k y_k(n) \quad (1.47)$$

式中, $y_k(n)$ 就是系统对输入 $x_k(n)$ 的响应。

在证明一个系统是线性系统时, 必须证明此系统同时满足叠加性和比例性, 而且信号以及任何比例常数都可以是复数。

例 1.7 判断以下系统是否为线性系统。

$$y(n) = 2x(n) + 3$$

解 很容易证明这个系统不是线性的, 因为此系统不满足叠加原理。

$$\begin{aligned} T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] &= 2[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] + 3 \\ a_1y_1(n) + a_2y_2(n) &= a_1[2x_1(n) + 3] + a_2[2x_2(n) + 3] \\ &= 2[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] + 3a_1 + 3a_2 \end{aligned}$$

很明显, 在一般情况下

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] \neq a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$$

所以此系统不满足叠加性, 故不是线性系统。

同样可以证明, $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$ 和 $y(n) = x(n)\sin\left(\frac{2\pi}{9}n + \frac{\pi}{7}\right)$ 都是线性系统。

1.4.2 时不变系统

系统的运算关系 $T[\cdot]$ 在整个运算过程中不随时间(也即不随序列的移位)而变化, 这种系统称为时不变系统(或称移不变系统)。这个性质可用以下关系表达: 若输入 $x(n]$ 时的输出为 $y(n]$, 则将输入序列移动任意位后, 其输出序列除了跟着移位外, 数值应该保持不变, 即若

$$T[x(n)] = y(n)$$

$$\text{则} \quad T[x(n-m)] = y(n-m) \quad (m \text{ 为任意整数}) \quad (1.48)$$

满足以上关系的系统就称为时不变系统。

例 1.8 证明 $y(n) = x(n) \sin\left(\frac{2\pi n}{9} + \frac{\pi}{7}\right)$ 不是时不变系统。

$$\begin{aligned} \text{证明} \quad T[x(n-m)] &= x(n-m) \sin\left(\frac{2\pi n}{9} + \frac{\pi}{7}\right) \\ y(n-m) &= x(n-m) \sin\left(\frac{2\pi(n-m)}{9} + \frac{\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

由于二者不相等, 故不是时不变系统。

同时具有线性和时不变性的离散时间系统称为线性时不变(LTI)离散时间系统, 简称 LTI 系统。除非特殊说明, 本书都是研究 LTI 系统的。

1.4.3 单位脉冲响应与系统的输入输出关系

线性时不变系统可用它的单位脉冲响应来表征。单位脉冲响应是指输入为单位脉冲序列时系统的输出。一般用 $h(n]$ 表示单位脉冲响应, 即

$$h(n) = T[\delta(n)]$$

有了 $h(n]$ 就可以得到此线性时不变系统对任意输入的输出。下面讨论这个问题。

设系统输入序列为 $x(n]$, 输出序列为 $y(n]$ 。从前面已经知道, 任一序列 $x(n]$ 可以写成 $\delta(n]$ 的移位加权, 即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)$$

$$\text{则系统的输出为} \quad y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)\right]$$

由于系统是线性的, 可利用叠加原理, 则

$$T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) T[\delta(n-m)]$$

又由于系统的时不变性, 对移位的单位脉冲序列的响应就是单位脉冲响应的移位, 即

$$T[\delta(n-m)] = h(n-m)$$

$$\text{因此} \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) = x(n) * h(n) \quad (1.49)$$

如图1.22所示。上式称为序列 $x(n]$ 与 $h(n]$ 的离散卷积, 为了与以后的圆周卷积相区别, 又将这种离散卷积称为“线性卷积”或“直接卷积”, 或简称为“卷积”, 并以“*”表示之。

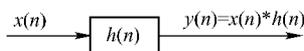


图 1.22 线性时不变系统

1.4.4 线性时不变系统的性质

1. 交换律

由于卷积运算与进行卷积的两序列的次序无关, 即卷积服从交换律, 故

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) \quad (1.50)$$

这就是说, 如果把单位脉冲响应 $h(n)$ 改为输入, 而把输入 $x(n)$ 改为系统的单位脉冲响应, 则输出 $y(n)$ 不变。

2. 结合律

可以证明卷积运算服从结合律, 即

$$\begin{aligned} x(n) * h_1(n) * h_2(n) &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned} \quad (1.51)$$

这就是说, 两个线性时不变系统级联后仍构成一个线性时不变系统, 其单位脉冲响应为两系统各自单位脉冲响应的卷积, 且线性时不变系统的单位脉冲响应与它们的级联次序无关, 如图1.23所示。

3. 分配律

卷积运算也服从加法分配律:

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1.52)$$

也就是说, 两个线性时不变系统的并联等效系统的单位脉冲响应等于两系统各自单位脉冲响应之和, 如图1.24所示。

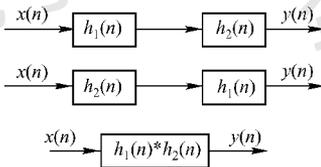


图 1.23 具有相同单位脉冲响应的三个线性时不变系统

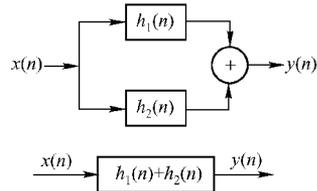


图 1.24 线性时不变系统的并联组合及其等效系统

交换律已经证明了以上三个性质, 另外两个性质由卷积的定义也可以很容易地加以证明。

1.4.5 因果系统

所谓因果系统, 就是系统在任何时刻的输出 $y(n)$ 只取决于该时刻以及该时刻以前的输入, 即 $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots$ 。如果系统的输出 $y(n)$ 还取决于 $x(n+1), x(n+2), \dots$, 也即系统的输出还取决于未来的输入, 这样在时间上就违背了因果关系, 因而是非因果系统, 即物理不可实现的系统。根据上述定义, 可以知道, $y(n) = nx(n)$ 的系统是因果系统, 而 $y(n) = x(n+2) + ax(n)$ 的系统是非因果系统。

从式(1.49)的卷积公式, 我们可以看到线性时不变系统是因果系统的充分必要条件是

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1.53)$$

依照此定义, 我们将 $n < 0$ 时 $x(n) = 0$ 的序列称为因果序列, 表示这个因果序列可以作为一个

因果系统的单位脉冲响应。我们知道,许多重要的网络,如频率特性为理想矩形的理想低通滤波器及理想微分器等都是非因果的不可实现的系统。但是数字信号处理往往是非实时的,即使是实时处理,也允许有很大延时。这时对于某一个输出 $y(n)$ 来说,已有大量的“未来”输入 $x(n+1), x(n+2), \dots$, 记录在存储器中可以被调用,因而可以很接近于实现这些非因果系统。也就是说,可以用具有很大延时的因果系统去逼近非因果系统。这个概念在以后讲解有限长单位脉冲响应滤波器设计时经常会用到,这也是数字系统优于模拟系统的特点之一。因而数字系统比模拟系统更能获得接近理想的特性。

1.4.6 稳定系统

稳定系统是指有界输入产生有界输出(BIBO)的系统。如果对于输入序列 $x(n)$, 存在一个不变的正有限值 B_x , 对于所有 n 值满足

$$|x(n)| \leq B_x < \infty \quad (1.54)$$

则称该输入序列是有界的。稳定性要求对于每个有界输入存在一个不变的正有限值 B_y , 对于所有 n 值, 输出序列 $y(n)$ 满足

$$|y(n)| \leq B_y < \infty \quad (1.55)$$

一个线性时不变系统是稳定系统的充分必要条件是单位脉冲响应绝对可和, 即

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (1.56)$$

证明 充分条件:

若

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

如果输入信号 $x(n)$ 有界, 即对于所有 n 皆有 $|x(n)| \leq B_x < \infty$, 则

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(m)| \cdot |h(n-m)| \\ &\leq B_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(n-m)| = B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = B_x S < \infty \end{aligned}$$

即输出信号 $y(n)$ 有界, 故原条件是充分条件。

必要条件: 利用反证法。已知系统稳定, 假设

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty$$

可以找到一个有界的输入

$$x(n) = \begin{cases} 1, & h(-n) \geq 0 \\ -1, & h(-n) < 0 \end{cases}$$

输出 $y(n)$ 在 $n=0$ 这一点上的值为

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(0-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(-m)| \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h(m)| = \infty \end{aligned}$$

也即 $y(0)$ 是无界的, 这不符合稳定的条件, 因而假设不成立。所以 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 是稳定的必要条件。

要证明一个系统不稳定, 只需找一个特别的有界输入, 如果此时能得到一个无界的输出, 那么就一定能判定一个系统是不稳定的。但是, 要证明一个系统是稳定的, 就不能只用某一个特定的输入作用来证明, 而要利用在所有有界输入下都产生有界输出的办法来证明系统的稳定性。

显然, 既满足稳定条件又满足因果条件的系统, 即稳定的因果系统是最主要的系统。这种线性时不变系统的单位脉冲响应应该既是因果的(单边的)又是绝对可和的, 即

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

$$\left. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \right\}$$

这种稳定因果系统既是可实现的, 又是稳定工作的, 因而这种系统正是一切数字系统设计的目标。

例 1.9 判断单位脉冲响应为 $h(n) = a^n u(n)$ 的线性时不变系统是否具有因果性和稳定性。

解

(1) 判断因果性: 当 $h(n) < 0$ 时, $h(n) = 0$, 故此系统是因果系统。

(2) 判断稳定性: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \begin{cases} \frac{1}{1-|a|}, & |a| < 1 \\ \infty, & |a| \geq 1 \end{cases}$

所以, 当 $|a| < 1$ 时, 系统是稳定的, 当 $|a| \geq 1$ 时, 系统是不稳定的。

例 1.10 判断单位脉冲响应为 $h(n) = -a^n u(-n-1)$ 的线性时不变系统是否具有因果性和稳定性。

解

(1) 判断因果性: 当 $h(n) < 0$ 时, $h(n) \neq 0$, 故此系统是非因果系统。

(2) 判断稳定性:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} |a^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a|^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a|^n} = \begin{cases} \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \\ 1 - \frac{1}{|a|}, & |a| > 1 \\ \infty, & |a| \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{|a|-1}, & |a| > 1 \\ \infty, & |a| \leq 1 \end{cases}$$

所以, 当 $|a| > 1$ 时, 系统是稳定的; 当 $|a| \leq 1$ 时, 系统是不稳定的。

1.5 常系数线性差分方程

连续时间线性时不变系统的输入输出关系常用常系数线性微分方程表示, 而离散时间线性时不变系统的输入输出关系除了用式(1.49)表示外, 常用以下形式的常系数线性差分方程表

示, 即

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) \quad (1.58)$$

所谓常系数是指决定系统特征的 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N, b_0, b_1, b_2, \dots, b_M$ 都是常数。若系数中含有 n , 则称为“变系数”线性差分方程。差分方程的阶数等于未知序列 [指 $y(n)$] 变量序号的最高值与最低值之差。例如, 式(1.58)即为 N 阶差分方程。

所谓线性是指各 $y(n-k)$ 及各 $x(n-m)$ 项都只有一次幂且不存在它们的相乘项(这和线性微分方程是一样的), 否则就是非线性的。

离散系统的差分方程表示法有两个主要的用途, 一是从差分方程表达式比较容易直接得到系统的结构, 二是便于求解系统的瞬态响应。

求解常系数线性差分方程可以用离散时域求解法, 也可以用变换域求解法。

离散时域求解法有两种:

- (1) 迭代法, 此法较简单, 但是只能得到数值解, 不易直接得到闭合形式(公式)解答。
- (2) 卷积计算法, 用于系统起始状态为零时的求解。

变换域求解法与连续时间系统的拉普拉斯变换法类似, 它采用 z 变换方法来求解差分方程, 这在实际使用上是简单而有效的。卷积方法, 前面已经讨论过了, 只要知道系统单位脉冲响应就能得知任意输入时的输出响应。 z 变换方法将在后面讨论。这里仅简单讨论离散时域的迭代解法。

差分方程在给定的输入和给定的初始条件下, 可用递推迭代的办法求系统的响应。如果输入是 $\delta(n)$ 这一特定情况, 则输出响应就是单位脉冲响应 $h(n)$ 。例如, 利用 $\delta(n)$ 只在 $n=0$ 取值为 1 的特点, 可用迭代法求出其单位脉冲响应 $h(0), h(1), \dots, h(n)$ 的值, 下面举例说明。

例 1.11 常系数线性差分方程

$$y(n] = x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

输入为 $x(n) = \delta(n)$, 初始条件为 $y(n) = 0, n < 0$, 试给出系统的实现结构并求其单位脉冲响应。

解 系统的实现结构如图 1.25 所示。图中 \oplus 代表加法器, \otimes 代表乘法器, z^{-1} 代表一阶延迟。

由于初始条件已给定了 $n=0$ 以前的输出, 所以系统的输出响应只要从 $n=0$ 开始求起。又因为输入 $x(n) = \delta(n)$, 所以系统的输出 $y(n)$ 即为系统的单位脉冲响应 $h(n)$ 。先由初始条件及输入求 $h(0)$ 值:

$$h(0) = \frac{1}{2}h(-1) + \delta(0) = 0 + 1 = 1$$

再由 $h(0)$ 值及输入推导 $h(1)$, 并依次推导得 $h(2), h(3), \dots$ 因而有

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{1}{2}h(0) + \delta(1) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} \\ h(2) &= \frac{1}{2}h(1) + \delta(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\vdots \\ h(n) &= \frac{1}{2}h(n-1) + \delta(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

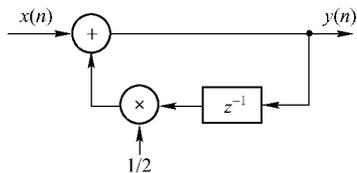


图 1.25 例 1.11 常系数线性差分方程的方框图

故系统的单位脉冲响应为

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

即
$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

这样的系统相当于因果系统，而且系统是稳定的。

一个常系数线性差分方程并不一定代表因果系统，初始条件不同，则可能得到非因果系统。利用同一例子，分析如下。

例 1.12 设 $x(n] = \delta(n)$ ，但假设初始条件为 $y(n) = 0$ ， $n > 0$ ，可得 $n > 0$ 时， $h(n) = y(n) = 0$ ，将 $y(n) = x(n) + \frac{1}{2}y(n-1)$ 改写为另一种递推关系

$$y(n-1) = 2[y(n) - x(n)]$$

或

$$y(n) = 2[y(n+1) - x(n+1)]$$

又利用已得出的结果 $h(n) = 0$ ， $n > 0$ ，则有

$$h(0) = 2[h(1) - \delta(1)] = 0$$

$$h(-1) = 2[h(0) - \delta(0)] = -2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$h(-2) = 2[h(-1) - \delta(-1)] = -2^2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

⋮

$$h(n) = 2h(n+1) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

所以

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n < 0 \end{cases}$$

也可表示为

$$h(n) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

这样的系统是非因果系统，而且是非稳定的。

1.6 实例分析——语音信号基音周期轨迹的平滑

基音周期是语音最重要的参数之一，根据加窗语音来估计基音周期，在语音编码、语音合成、语音识别、说话人识别等领域都很重要。无论采用哪一种算法求得的基音周期轨迹与真实的基音周期轨迹都不可能完全吻合。实际情况是大部分段落是吻合的，而在一些局部段落或区域中有一个或几个基音周期估值偏离了正常轨迹（通常是偏离到正常值的 2 倍或 1/2 倍），此种情况下称基音周期轨迹产生了若干“野点”。

去除野点的方法有很多，滑动平均滤波器就是其中之一。一种非因果的滑动平均滤波器的数学模型为

$$y(n) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x(n-k)$$

对于待处理的数据 $x(n)$ ，可以在 n 点附近取 $\pm M$ 点的数据求平均，即取和以后再除以 $(2M+1)$ ，如图 1.26 所示。

图 1.27 是一段语音信号的基音周期轨迹图，对该基音周期轨迹进行三项滑动平均滤波，三项滑动平均滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = \frac{1}{3} [\delta(n-1) + \delta(n) + \delta(n+1)]$$

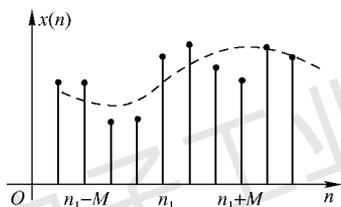


图 1.26 滑动平均滤波器

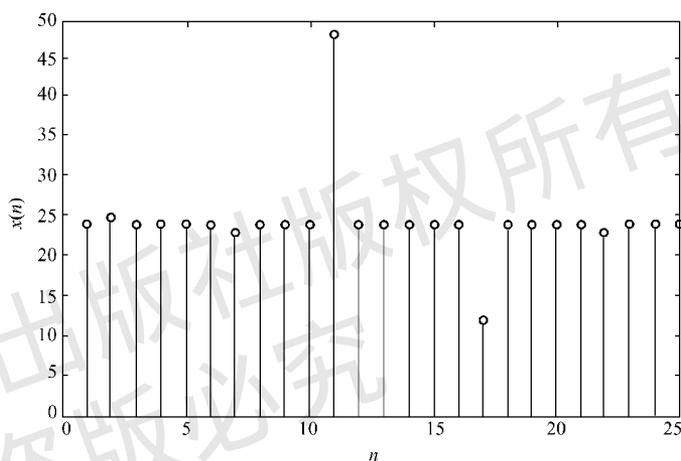


图 1.27 语音信号基音周期轨迹

滤波的结果如图 1.28 所示。该图说明滑动平均滤波器可以消除信号中的快速变化，使波形变化缓慢。

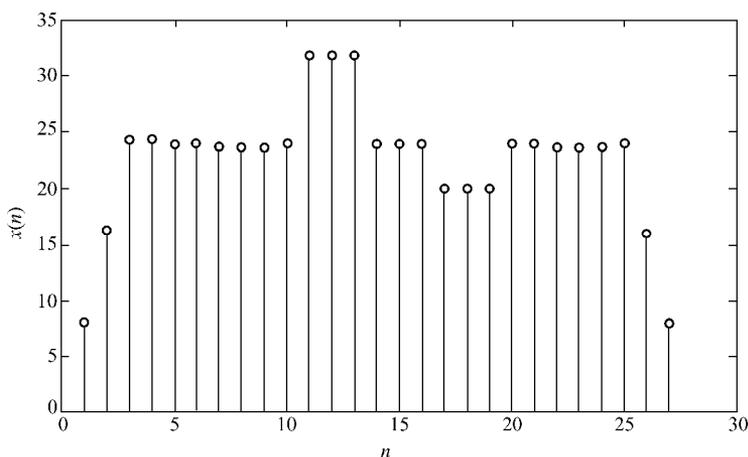


图 1.28 语音基音周期轨迹三项滑动平均滤波的结果

本章提要

1. 介绍了常见的离散时间信号, 包括单位脉冲序列、单位阶跃序列、矩形序列、实指数序列、正弦型序列和复指数序列, 重点要求掌握序列之间的关系及各序列的特点。

2. 序列的基本运算包括移位、翻褶、和、积、累加、差分、时间尺度变换、卷积和等, 其中的重点是卷积和的计算, 它是求解离散时间系统响应的重要方法。卷积和的常用计算方法有: 解析式法、图解法、对位相乘求和法、利用性质等。

3. 正弦序列的周期性判断包括 3 种情况:

(1) $\frac{2\pi}{\omega_0} = N$, 即二者比值为正整数, 序列是周期性的, 周期为 N 。

(2) $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{k}$, $\frac{N}{k}$ 为有理数, N 和 k 互素, 序列仍是周期性的, 周期 $N = k \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

(3) 当 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数, 找不到满足 $x(n+N) = x(n)$ 的 N 值, 此时序列是非周期性的。

4. 连续时间信号的采样是数字信号处理的基础, 重点是理想采样, 包括理想采样信号的频谱、采样定理、采样的恢复、由采样信号序列重构带限信号等。

5. 一个离散时间系统是将输入序列变换成输出序列的一种运算, 同时具有线性和时不变性的离散时间系统称为线性时不变(LTI)离散时间系统, 其输入输出关系可以由单位脉冲响应表示 $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = x(n) * h(n)$ 。系统具有因果性要求 $h(n) = 0, n < 0$, 系统具有稳定性要求 $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 。

6. 离散时间线性时不变系统的输入输出关系常用常系数线性差分方程来表示, 差分方程的时域求解有迭代法和卷积法, 变换域求解有 z 变换法等。

习 题

1. 对三个正弦信号 $x_{a1}(t) = \cos 2\pi t$, $x_{a2}(t) = -\cos 6\pi t$, $x_{a3}(t) = \cos 10\pi t$ 进行理想采样, 采样频率为 $\Omega_s = 8\pi$ 。求三个采样输出序列, 比较这三个结果。画出 $x_{a1}(t)$, $x_{a2}(t)$ 和 $x_{a3}(t)$ 的波形及采样点位置, 并解释频谱混叠现象。

2. 以下序列是系统的单位脉冲响应 $h(n)$, 试指出系统的因果性及稳定性。

(1) $0.3^n u(n)$ (2) $\frac{1}{n^2} u(n)$ (3) $\frac{1}{n!} u(n)$ (4) $\delta(n+4)$

(5) $\sin(n), n \geq 0$ (6) $\delta(n+1) + \delta(n) + 3\delta(n-1)$

(7) $u(5-n)$ (8) $2^n R_N(n)$

3. 判断下列信号是否为周期的, 并对周期信号求其基本周期。

(1) $x(n) = \cos(0.125\pi n)$ (2) $x(n) = \operatorname{Re} \left\{ e^{j\frac{n\pi}{12}} \right\} + \operatorname{Im} \left\{ e^{j\frac{n\pi}{18}} \right\}$

(3) $x(n) = A \cos \left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8} \right)$ (4) $x(n) = e^{j\left(\frac{n}{6} - \pi\right)}$

4. 判断下列系统是否为线性、时不变、因果、稳定系统，说明其理由。其中， $x(n]$ 与 $y(n]$ 分别为系统的输入与输出。

$$(1) y(n) = nx(n) \quad (2) y(n) = x(n) \sin\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(3) y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m) \quad (4) y(n) = x(n+1) - x(n-1)$$

5. 已知线性时不变系统的输入为 $x(n]$ ，系统的单位脉冲响应为 $h(n]$ ，试求系统的输出 $y(n]$ 。

$$(1) x(n) = 2^n u(n), h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$(2) x(n) = R_4(n), h(n) = R_4(n)$$

$$(3) x(n) = a^n u(n), 0 < a < 1, h(n) = b^n u(n), 0 < b < 1, a \neq b$$

$$(4) x(n) = u(n), h(n) = \delta(n-2) - \delta(n-3)$$

6. 写出图1.29所示系统的差分方程，并按初始条件 $y(n) = 0, n < 0$ 求输入为 $x(n) = R_3(n]$ 时的输出响应。

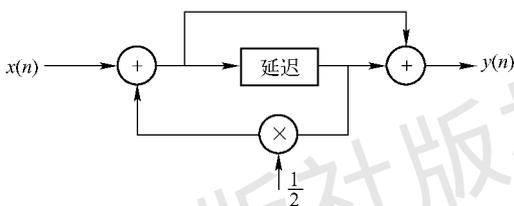


图 1.29 习题 6 的图示

7. 已知一系统的差分方程为

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$$

其输入序列 $x(n) = k\delta(n]$ ，初始条件为 $y(-1) = a$ ，求系统的输出 $y(n]$ 。

8. 设有一系统，其输入输出关系由以下差分方程确定：

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果性的。试求：

(1) 该系统的单位脉冲响应；

(2) 由(1)的结果，利用卷积和求输入 $x(n) = e^{j\omega n} u(n]$ 的响应。

9. 有一理想采样系统，采样频率为 $\Omega_s = 6\pi$ ，采样后经理想低通滤波器 $H_a(j\Omega)$ 还原，其中

$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\Omega| < 3\pi \\ 0, & |\Omega| \geq 3\pi \end{cases}$$

有两个输入信号 $x_{a1}(t) = \cos 2\pi t$ ， $x_{a2}(t) = \cos 5\pi t$ ，问输出信号 $y_{a1}(t)$ 和 $y_{a2}(t)$ 是否有失真？