

# 第 1 章 绪 论

对有些对象,如化学反应过程等,由于其复杂性,很难用理论分析的方法推导出数学模型,有时只知道数学模型的一般形式及部分参数,有时甚至连数学模型的一般形式都不知道。因此,提出了怎样确定系统的数学模型及参数的问题,这就是所谓的系统辨识问题。

对于许多领域,由于系统比较复杂,不能用理论分析的方法获得数学模型。凡是需要通过实验数据确定数学模型和估计参数的场合都要利用辨识技术,辨识技术已经推广到工程和非工程的许多领域,如化学化工过程、核反应堆、电力系统、航空航天飞行器、生物医学系统、社会经济系统、环境系统、生态系统等。为了实现自适应控制,要不断估计其模型参数,自适应控制系统是辨识与控制相结合的一个范例,也是辨识在控制系统中的应用。

系统辨识是控制论的一个分支,系统辨识、状态估计和控制理论是现代控制理论的三大支柱。这三大支柱是互相渗透的,系统辨识和状态估计离不开控制理论的支持,控制理论的应用不能脱离对象的数学模型和状态估计技术。

系统辨识是根据系统的试验数据来确定系统的数学模型。因此,系统辨识为已经存在的系统建立数学模型提供了有效的方案。

## 1.1 建立数学模型的基本方法

所谓模型,就是把关于实际过程的本质部分的信息简写成有用的描述形式。用数学结构和形式来反映实际过程行为特性的模型就是数学模型。一般来说,建立数学模型有两种基本方法。

### 1. 理论分析法

这种方法主要是通过分析系统的运动规律,运用已知的定律、定理和原理,例如力学原理、生物学定律、牛顿定理、能量平衡方程、传热传质原理等,利用数学方法进行推导,建立系统的数学模型。这种方法也称为机理分析法。

【例 1.1】Vertical Take-Off and Landing (VTOL) 空间飞行器的理论建模。

VTOL 空间飞行器是能够垂直起飞、垂直着陆的具有 3 个空间自由度的系统。如图 1-1 所示为  $X$ - $Y$  平面上的 VTOL 受力图。由于只考虑起飞过程,因此只考虑横向  $X$  轴和垂直方向  $Y$  轴,忽略了前后运动(即  $Z$  方向)。 $X$ - $Y$  为惯性坐标系,  $X_b$ - $Y_b$  为飞行器的机体坐标系。

设状态变量是飞行器质心的  $X, Y$  位置和滚转角  $\theta$ , 相应的速度为  $dX/dt, dY/dt$  和  $d\theta/dt$ , 控制输入  $T, l$  是推力(直接从飞机的底部推动)和滚动力矩。利用牛顿定理, VTOL 空间飞行器的动力学模型表示为

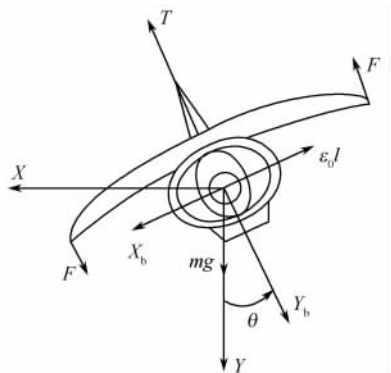


图 1-1 VTOL 空间飞行器坐标示意图

$$-m\ddot{X} = -T\sin\theta + \varepsilon_0 l \cos\theta \quad (1.1)$$

$$-m\ddot{Y} = T\cos\theta + \varepsilon_0 l \sin\theta - mg \quad (1.2)$$

$$I_x \ddot{\theta} = l \quad (1.3)$$

式中,  $g$  是重力加速度;  $\varepsilon_0$  是刻画滚动力矩和横向加速度关系的系数。进一步简化动态方程, 并定义  $x = X/g, y = -Y/g, u_1 = T/(mg), u_2 = l/I_x, \varepsilon = \varepsilon_0 l/(mg)$ , 系统简化为

$$\ddot{x} = -u_1 \sin\theta + \varepsilon u_2 \cos\theta \quad (1.4)$$

$$\ddot{y} = u_1 \cos\theta + \varepsilon u_2 \sin\theta - g \quad (1.5)$$

$$\ddot{\theta} = u_2 \quad (1.6)$$

虽然 VTOL 飞行器的数学模型可以根据力学原理较准确地推导出来, 但要想获得精确的模型参数  $\varepsilon_0, I_x, m$ , 就要进行辨识。

由例 1.1 可知, 理论分析方法只能用于较简单系统的建模, 并且对系统的机理要有较清楚的了解。对于比较复杂的实际系统, 这种建模方法有很大的局限性。这是因为在建模时必须对实际的系统提出合理的简化假设, 然而这些假设未必符合实际情况。另外, 有时实际系统的机理也并非完全可知的。

## 2. 测试法

系统的输入、输出一般总是可以测量的。由于系统的动态特性必然表现于这些输入、输出数据中, 故可以利用输入、输出数据所提供的信息来建立系统的数学模型。这种建模方法就是系统辨识。

与理论分析方法相比, 测试法的优点是不需要深入了解系统的机理, 不足之处是必须设计一个合理的试验以获取所需要的大量信息, 而设计合理的试验是很困难的。

在实际研究中, 往往将理论分析方法和测试法相结合, 机理已知部分(名义模型)采用理论分析方法, 机理未知部分采用测试方法。

**【例 1.2】** 通过实验确定一个热敏电阻的电阻  $R$  和温度  $t$  的关系, 为此在不同的温度  $t$  下, 对电阻  $R$  进行多次测量获得了一组测量数据  $(t_i, R_i)$ 。由于每次测量中, 不可避免地含有随机测量误差, 因此想寻找一个函数  $R = f(t)$  来真实地表达电阻  $R$  和温度  $t$  之间的关系。

假设模型结构为

$$R = a + bt$$

式中,  $a$  和  $b$  为待估参数。

如果测量没有误差, 只需要两个不同温度下的电阻值, 便可以解出  $a$  和  $b$ 。但是由于每次测量中总存在随机误差, 即

$$y_i = R_i + v_i \quad \text{或} \quad y_i = a + bt + v_i$$

式中,  $y_i$  为测量数据,  $R_i$  为真值,  $v_i$  为随机误差。

显然, 将每次测量误差相加, 可构成总误差

$$\sum_{i=1}^N v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_N$$

如何使测量的总误差最小, 选择不同的评判准则会获得不同的方法, 当采用每次测量误差的平方和为最小时, 即

$$J_{\min} = \sum_{i=1}^N v_i^2 = \sum_{i=1}^N [R_i - (a + bt_i)]^2 \quad (1.7)$$

由于上式中的平方运算又称为“二乘”，而且又是按照  $J$  最小来估计  $a$  和  $b$ ，称这种估计方法为最小二乘估计算法，简称最小二乘法。

利用最小二乘法辨识模型参数，若使得  $J$  最小，利用求极值的方法得

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial J}{\partial a} \right|_{a=a} = -2 \sum_{i=1}^N (R_i - a - bt_i) = 0 \\ \left. \frac{\partial J}{\partial b} \right|_{b=b} = -2 \sum_{i=1}^N (R_i - a - bt_i)t_i = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

对上式进一步整理，则  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  的估计值可由下列方程确定

$$\begin{cases} N\hat{a} + \hat{b} \sum_{i=1}^N t_i = \sum_{i=1}^N R_i \\ \hat{a} \sum_{i=1}^N t_i + \hat{b} \sum_{i=1}^N t_i^2 = \sum_{i=1}^N R_i t_i \end{cases}$$

解方程组，可得

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N R_i \sum_{i=1}^N t_i^2 - \sum_{i=1}^N R_i t_i \sum_{i=1}^N t_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N t_i \right)^2} \\ \hat{b} = \frac{N \sum_{i=1}^N R_i t_i - \sum_{i=1}^N R_i \sum_{i=1}^N t_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N t_i \right)^2} \end{cases} \quad (1.9)$$

由于一定存在  $a$  和  $b$  使  $J$  取极小值，而  $\frac{\partial J}{\partial a}$  和  $\frac{\partial J}{\partial b}$  只有一个根，所以  $\hat{a}$  和  $\hat{b}$  使  $J$  取最小值。

## 1.2 系统辨识的定义

控制理论对系统辨识有多种定义。其通俗含义是根据被控对象或被辨识系统的输入、输出观测信息来估计它的数学模型。目前有几个比较典型的定义。

① L. A. Zadeh 定义(1962年)：辨识就是在输入和输出数据的基础上，从一组给定的模型类中，确定一个与所测系统等价的模型。

② P. Eykhoff 定义(1974年)：辨识问题可以归结为用一个模型来表示客观系统(或将要构造的系统)本质特征的一种演算，并用这个模型把客观系统表示成有用的形式。

③ L. Ljung 定义(1978年)：辨识有3个要素，即数据、模型类和准则。其中，数据是辨识的基础，准则是辨识的依据，模型类是辨识的范围。辨识就是按照一个准则在一组模型类中选择一个对数据拟合得最好的模型。

## 1.3 系统辨识的研究目的

在提出和解决一个辨识问题时，明确最终模型的使用目的是至关重要的。它对模型类(模型结构)、输入信号和等价准则的选择都有很大的影响。通过辨识建立数学模型通常有6个目的。

### (1) 系统仿真

为了研究不同输入情况下系统的输出情况,最直接的方法是对系统本身进行实验,但实际上是很难实现的。例如,利用实际系统进行实验的费用太大;实验过程中系统可能会不稳定,从而导致实验过程带有一定的危险性;系统的时间常数可能会很大,以致实验周期太长。为此,需要建立数学模型,利用模型仿真系统的特性或行为,从而间接地对系统进行仿真研究。

### (2) 系统预测

无论在自然科学领域还是在社会科学领域,往往需要研究系统未来发展的规律和变化趋势,才能预先作出决策和采取措施。科学的定量预测大多需要采用模型预测方法,即首先建立所预测系统的数学模型,根据模型对系统中的某些变量的未来状态进行预测。

### (3) 系统设计和控制

在工程设计中,必须掌握系统中所包括的所有部件的特性或者子系统的特性,一项完善的设计,必须使系统各部件的特性与系统的总体设计要求(如产量指标、误差、稳定性、安全性和可靠性等)相适应。为此,需要建立数学模型,在设计中分析、考察系统各部分的特性以及各部分之间的相互作用和它们对总体系统特性的影响。

### (4) 系统分析

根据试验数据建立起系统的数学模型之后,可以将所研究的系统的主要特征及其主要变化规律表达出来,将所要研究的系统中主要变量之间的关系比较集中地揭示出来,从而为分析该系统提供线索和依据。

### (5) 故障诊断

许多复杂的系统,如导弹、飞机、核反应堆、大型化工和动力装置以及大型传动机械等,需要经常监视和检测可能出现的故障,以便及时排除故障。这就要求必须不断地收集系统运行过程中的信息,通过建立数学模型,推断过程动态特性的变化情况。然后,根据动态特性的变化情况判断故障是否已经发生、何时发生、故障大小及故障的位置等。

### (6) 验证机理模型

根据试验数据建立起系统的数学模型之后,将非常有利于理解所获得的试验数据,从而可以探索和分析不同的输入条件对该系统输出变量的影响,以检验所提出的理论,更全面地理解系统的动态行为。

## 1.4 数学模型的分类

数学模型的分类方法有很多,常见的是按连续与离散、定常与时变、线性与非线性分类。

### (1) 按提供的实验信息分为:黑箱、灰箱和白箱

如果系统的结构、组成和运动规律是已知的,适合用机理分析法进行建模,则系统称为“白箱”。如果对系统的客观规律不清楚,只能根据试验中测量系统的响应数据,应用辨识方法建立系统的数学模型,则称系统为“黑箱”。如果已知系统的某些基本规律,但又有些机理还不清楚,则称系统为“灰箱”。

### (2) 按概率角度分为:确定性模型和随机性模型

确定性模型所描述的系统,当状态确定后,其输出响应是唯一确定的。而随机性模型所描述的系统,当状态确定后,其输出响应是不确定的。

(3) 按模型与时间的关系分为:静态模型和动态模型

静态模型用于描述系统处于稳态时(各状态变量的各阶导数为零)的各状态变量之间的关系,一般不是时间的函数。动态模型用于描述系统处于过渡过程时的各状态变量之间的关系,一般为时间的函数。

(4) 按时间刻度分为:连续模型和离散模型

用来描述连续系统的模型有微分方程、传递函数等,用来描述离散系统的模型有差分方程、状态方程等。

(5) 按参数与时间的关系分为:定常模型和时变模型

定常系统的模型参数不随时间的变化而改变,而时变系统的模型参数随时间的变化而改变。

(6) 按参数与输入/输出关系分为:线性模型和非线性模型

线性模型用来描述线性系统,其显著特点是满足叠加原理和均匀性,而非线性模型用来描述非线性系统,一般不满足叠加原理。

(7) 按模型的表达形式分为:参数模型和非参数模型

非参数模型是指从一个实际系统的实验过程中,直接或间接地所获得的响应,是确定性的模型,例如阶跃响应、脉冲响应、频率响应都属于反映该系统特性的非参数模型。采用推理的方法所建立的模型则为参数模型,它可以由非参数模型转化而来,例如状态方程和差分方程。

(8) 按参数的性质分为:分布参数模型和集中参数模型

当系统的状态参数仅是时间的函数时,描述系统特性的状态方程组为常微分方程组,系统称为集中参数系统。当系统的状态参数是时间和空间的函数时,描述系统特性的状态方程组为偏微分方程组,则系统称为分布参数系统。

(9) 按输入/输出个数分为:单输入单输出(SISO)模型和多输入多输出(MIMO)模型

(10) 按模型的使用形式分为:离线模型和在线模型

对系统进行试验,获取全部数据后,运用辨识算法对数据进行集中处理,以得到模型参数的估计值,这种方法称为离线辨识。而在线辨识需要知道模型的结构和阶次,当获得新的输入、输出数据之后,采用递推辨识法对原来的参数估计值进行修正,得到新的参数估计值。

## 1.5 几种常见的数学模型的数学表示

在控制理论中,数学模型有多种形式。时域中常用的数学模型有微分方程、差分方程和状态方程;复数域中有传递函数和结构图;频域中有频率特性等。这里仅介绍系统辨识中常用的数学模型:离散脉冲响应函数、线性差分方程和状态空间模型。

### 1. 离散脉冲响应函数

SISO 系统的离散脉冲响应函数是指当初始条件为零时,线性系统对于单位脉冲序列产生的输出响应,记为  $\{g(k)\}$ ,  $k=0,1,2,\dots$ 。则在任意输入  $u(k)$  的作用下,系统的输出表示为

$$y(k) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} g(i)z^{-i} \right) u(k)$$

式中,  $z$  为时延因子,  $z^{-1}u(k) = u(k-1)$ 。

对于稳态系统,有

$$y(k) = \left( \sum_{i=0}^{N_s} g(i)z^{-i} \right) u(k) \quad (1.10)$$

上式称为移动平均(Moving Average)模型,简称 MA 模型。记

$$B(z^{-1}) = \sum_{i=0}^{N_s} g(i)z^{-i}$$

对于随机系统,考虑噪声项的影响,则

$$y(k) = B(z^{-1}) \cdot u(k) + e(k) \quad (1.11)$$

式中, $e(k)$ 为噪声项。

## 2. 线性差分方程

差分方程是离散系统最基本的一种模型,动态的离散系统输入、输出采样值序列  $u(k)$  和  $y(k)$  之间的关系可表示成如下的  $n$  阶线性差分方程

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (1.12)$$

该方程称为自回归滑动平均(Auto-Regressive Moving Average)模型,简称 ARMA 模型。

## 3. 状态空间模型

线性时不变连续系统的状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1.13)$$

式中, $\mathbf{x}(t) \in R^n$  为系统的状态变量, $\mathbf{u}(k) \in R^m$  为系统的输入量, $\mathbf{y}(k) \in R^r$  是系统的输出量, $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$  为系统矩阵, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$  为输入矩阵, $\mathbf{C} \in R^{r \times n}$  为输出矩阵。

线性时不变离散系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \quad (1.14)$$

式中, $\mathbf{x}(k) \in R^n$ , $\mathbf{y}(k) \in R^r$ , $\mathbf{u}(k) \in R^m$ ;  $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ , $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ , $\mathbf{C} \in R^{r \times n}$ ; 系数矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$  的维数分别为  $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $r \times n$ 。

# 1.6 系统辨识常用的误差准则

辨识时所采用的误差准则是辨识问题的 3 个要素之一,是用来衡量模型接近实际系统的标准。

误差准则常被表示为误差的泛函数,即

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N f(\epsilon(k)) \quad (1.15)$$

式中, $f(\cdot)$  为  $\epsilon(k)$  的函数, $\epsilon(k)$  是定义在区间  $(0, N)$  上的误差函数,一般指模型与实际系统的误差。其中

$$f(\epsilon(k)) = \epsilon^2(k)$$

误差  $\epsilon(k)$  的确定分为输出误差准则、输入误差准则和广义误差准则。系统辨识中一般采用输出误差准则,如图 1-2 所示,当实际系统的输出和模型的输出分别为  $y(k)$  和  $y_m(k)$  时,输出误差为

$$\epsilon(k) = y(k) - y_m(k) \quad (1.16)$$

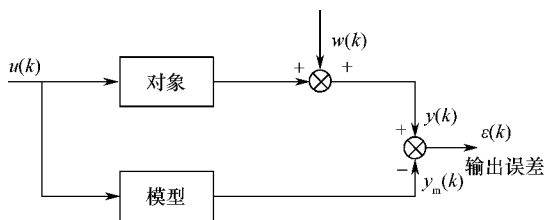


图 1-2 输出误差示意图

## 1.7 系统辨识的分类

系统辨识的分类方法很多,根据描述系统数学模型的不同可分为线性系统辨识和非线性系统辨识、集中参数系统辨识和分布参数系统辨识;根据系统的结构可分为开环系统辨识与闭环系统辨识;根据参数估计方法可分为离线辨识和在线辨识等。另外,还有经典系统辨识和近代系统辨识、系统结构辨识和系统参数辨识等分类。其中,离线辨识与在线辨识是系统辨识中常用的两个基本概念。

### 1.7.1 离线辨识

如图 1-3 所示,离线辨识要求把被辨识对象从整个系统中分离出来,然后将大量输入、输出数据存储起来,并按照一定的辨识算法进行数据处理。如果系统的模型结构已经选好,阶数也已确定,在获得全部数据之后,用最小二乘法、极大似然法或其他估计方法,对数据进行集中处理后,得到模型参数的估计值,这种方法称为离线辨识。

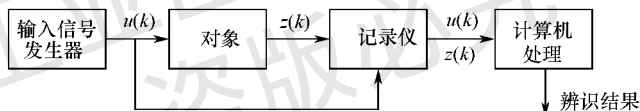


图 1-3 离线辨识

离线辨识的优点是参数估计值的精度较高,对于计算时间没有苛刻的限制;缺点是需要存储大量数据,运算量也大。

### 1.7.2 在线辨识

有些对象,为了进行离线辨识而中断系统的正常运行,会造成人力和生产线上的极大损耗。另外,有些对象根本不允许离线辨识。例如自适应控制系统和某些不允许中断正常运行的工业系统中的被控对象。这时,就必须采用在线辨识,如图 1-4 所示。

在线辨识时,系统的模型结构和阶数是事先确定好的。当获得一部分新的输入、输出数据后,在线估计采用递推方法进行处理,从而得到模型新的估计值。在线辨识不要求存储从过去到现在的全部输入、输出信息,而是在某个初值下,不断利用新信息进行递推运算从而不断修正模型参数的估计值。这就要求计算机在一个采样周期内,能够完成一次递推运算,要求递推算法有足够快的收敛速度。

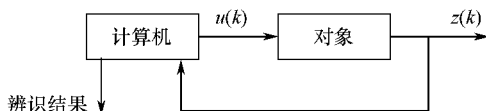
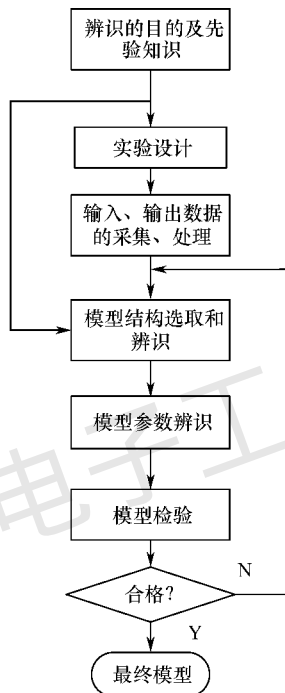


图 1-4 在线辨识

在线辨识的优点是所要求的计算机存储量较小,辨识计算时运算量较小,适合于实时控制;缺点是参数估计的精度较差,要求足够高的计算速度,相应地会增加设备费用。

## 1.8 辨识的内容和步骤

简单地说,辨识就是从一组观测到的含有噪声的输入、输出数据中提取数学模型的方法。然而,辨识具体应用到一个实际对象时,就需要做很多辅助工作。明确模型应用的最终目的是至关重要的,这将决定模型的类型、精度要求及采用什么辨识方法等问题。另外,系统辨识还应当解决一些问题,例如,如何选定和预测系统的数学模型,用什么输入信号及怎样产生这种信号,如何在系统的输出受噪声的污染的情况下进行数据处理和参数估计及如何验证建立的模型是否符合实际等。虽然系统辨识在数据、模型种类和准则的选择上有相当大的自由度,但在进行辨识时,一般遵循下面的步骤,如图 1-5 所示。



① 明确辨识的目的。它决定模型的类型、精度要求和所采用的辨识方法。

② 掌握先验知识。如系统的非线性程度、时变或非时变、比例或积分特性、时间常数、过渡过程时间、截止频率、时滞特性、静态放大倍数、噪声特性等,这些先验知识对预选系统数学模型种类和辨识试验设计将起到指导性的作用。

③ 利用先验知识。选定和预测被辨识系统的数学模型种类,确定验前假定模型。

④ 试验设计。选择试验信号、采样间隔、数据长度等,记录输入和输出数据。

⑤ 数据预处理。输入和输出数据中常含有的低频成分和高频成分对辨识精度都有不利的影响,需要采用滤波器等方法进行去除。

⑥ 模型结构选取和辨识。在假定模型结构的前提下,利用辨识方法确定模型结构参数,如差分方程中的阶次、纯延迟等。

⑦ 模型参数辨识。在假定模型结构确定之后,选择估计方法,利用测量数据估计模型中的未知参数。

⑧ 模型检验。从不同的侧面检验模型是否可靠,检验模型的标准是模型的实际应用效果,最后验证所确定的模型是否恰当地表示了被辨识的系统。工程中常用的模型验证方法有以下 4 种。

图 1-5 辨识的一般步骤

i. 用不同时间段内采集的数据分别建模,如果模型基本符合,则认为模型是可靠的。

ii. 用采集到的部分数据进行建模,用其余的试验数据进行预测。然后与相同条件下实际测量到的数据进行比较,如果相差较小,可认为模型正确。

iii. 利用不同试验方法得到的结果相互验证。例如,气动力参数可以从飞行数据中辨识出来,也可以通过数值模拟和风洞试验获得,如果几种手段较为一致,也可验证模型的正确性。

iv. 利用模型和实测数据的残差进行验证。正确的模型对应的残差序列应该是零均值的白噪声,否则表明模型与系统有偏差。

如果所确定的系统模型合适,则辨识结束。否则,则必须改变系统的实验前模型结构,并重新执行辨识过程,即执行第④步至第⑧步,直到获得一个满意的模型为止。



## 1.9 系统辨识方法

以飞行器的系统辨识为例,其系统辨识方法包括4个方面,即信号激励、信号测量、辨识模型的建立和系统辨识方法。信号激励是指在飞行试验中对飞行器施加的激励。由于系统辨识建模是通过飞行试验数据反推系统的数学模型,所以要得到高精度的飞行动力学模型,就需要输入能够充分激励出飞行器的运动模态以保证产生的飞行试验数据能充分地反映飞行器的物理特性。

信号测量包括两个部分:一是试验数据的采集,二是试验数据的处理。试验数据的采集主要是通过各种传感器等测量设备记录飞行器的响应如速度、加速度、角速度等参数。所记录的飞行试验数据由于存在漂移、跳点、噪声等因素,并不能直接用于模型的辨识,需要通过试验数据的处理,主要包括数据野值的剔除与补正、低通滤波、传感器位置校正及数据相容性检查与数据重建等。

辨识模型的建立是指建立参数化形式的辨识模型。以直升机飞行动力学模型为例<sup>[1]</sup>,可以分为纵、横向分离模型和耦合模型、六自由度刚体模型与包含旋翼运动的高阶模型等。飞行器从其物理本质上来说是一个耦合严重的、高阶的系统,简单的模型往往与物理实质不符,复杂的模型要求更先进的辨识方法。在实际应用中,应根据不同的应用情况来选择最恰当的结构。

系统辨识方法指的是根据试验数据辨识出系统数学模型的具体手段,如最常用的最小二乘法、极大似然方法等。飞行器辨识模型的参数众多,灵敏度差异大,辨识方法的选取与设计是能否得到高精度飞行动力学模型的关键。

## 1.10 系统辨识方法分类

系统辨识方法包括经典系统辨识方法和现代系统辨识方法。

### 1.10.1 经典系统辨识方法

该方法发展已经比较成熟和完善,包括阶跃响应法、脉冲响应法、频率响应法、相关分析法、谱分析法、最小二乘法和极大似然法等。其中,最小二乘法是一种经典的和最基本的方法,也是应用最广泛的方法。但是,最小二乘估计是有偏差的,为了克服最小二乘估计的缺陷,形成了一些以最小二乘法为基础的系统辨识方法,包括广义最小二乘法、辅助变量法、增广最小二乘法和广义最小二乘法,以及将一般的最小二乘法与其他方法相结合的方法,如最小二乘两步法和随机逼近算法等。

实际系统很多都是具有不确定性的复杂系统,经典的系统辨识方法还存在着一定的不足:利用最小二乘法的系统辨识法一般要求输入信号已知,并且必须具有较丰富的变化,而在某些动态系统中,系统的输入常常无法保证;极大似然法计算耗费大,可能得到的是损失函数的局部极小值;经典的辨识方法对于某些复杂系统在一些情况下无能为力。

### 1.10.2 现代系统辨识方法

随着智能控制理论研究的不断深入及其在控制领域的广泛应用,从逼近理论和模型研究的发展来看,非线性系统建模已从用线性模型逼近发展到用非线性模型逼近的阶段。由于非

线性系统本身所包含的现象非常复杂,很难推导出能适应各种非线性系统的辨识方法,因此非线性系统的辨识还没有构成完整的科学体系。下面简要介绍几种方法。

### 1. 集员系统辨识法

在 1979 年集员辨识首先出现于 Fogel<sup>[2]</sup> 撰写的文献中,1982 年 Fogel 和 Huang 又对其做了进一步的改进<sup>[3]</sup>。集员辨识是假设在噪声或噪声功率未知但有界的情况下,利用数据提供的信息给参数或传递函数确定一个总是包含真参数或传递函数的成员集(如椭球体、多面体、平行六边体等)。

飞行器系统是一个较复杂的非线性系统,噪声统计分布特性难以确定,要较好地描述未知参数的可行解,用统计类的辨识方法辨识飞行器运动参数很难达到理想效果。采用集员辨识可解决这个问题。首先用递推法给出参数的中心估计,然后对参数进行集员估计(即区间估计)。这种方法能处理一般非线性系统参数的集员辨识,已经成功地应用于飞行器运动参数的辨识<sup>[4]</sup>。集员辨识作为系统辨识的一种新的方法,给系统辨识带来了巨大的方便。

### 2. 神经网络系统辨识法

神经网络是 20 世纪末迅速发展起来的一门学科,已经在各个领域得到了广泛的应用,尤其是在智能系统中的非线性建模及控制器的设计、模式分类与模式识别、联想记忆和优化计算等方面引起了人们极大的兴趣。

由于神经网络具有良好的非线性映射能力、自学习适应能力和并行信息处理能力,为解决未知不确定非线性系统的辨识问题提供了一条新的思路。在辨识非线性系统时,可根据非线性系统的神经网络辨识结构,利用神经网络所具有的对任意非线性映射的任意逼近能力来模拟实际系统的输入和输出关系,利用神经网络的自学习和自适应能力,经过学习训练可得到系统的正向模型或逆向模型。神经网络被广泛应用于非线性动态系统辨识<sup>[5,6]</sup>和参数辨识<sup>[7,8]</sup>。在神经网络辨识中,神经网络将确定某一非线性映射的问题转化为求解优化问题,而优化过程可根据某种学习算法,通过调整网络的权值矩阵来实现。神经网络也可以与模糊系统相结合,实现非线性系统的建模<sup>[9]</sup>。

与传统的基于算法的辨识方法相比较,神经网络用于系统辨识具有以下优点:不要求建立实际系统的辨识格式,可以省去对系统建模这一步骤;可以对本质非线性系统进行辨识;辨识的收敛速度仅与神经网络的本身及所采用的学习算法有关;通过调节神经元之间的连接权即可使网络的输出来逼近系统的输出;神经网络辨识可用于系统的在线控制。

神经网络在非线性系统辨识中的应用具有很重要的研究价值和广泛的应用前景。

### 3. 模糊逻辑系统辨识法

模糊逻辑理论用模糊集合理论,从系统输入和输出的测量值来辨识系统的模糊模型,也是系统辨识的一个有效的方法,在非线性系统辨识领域中有十分广泛的应用。模糊逻辑辨识具有独特的优越性:能够有效地辨识复杂和病态结构的系统;能够有效地辨识具有大时延、时变、多输入单输出的非线性复杂系统;可以辨识性能优越的人类控制器;可以得到被控对象的定性与定量相结合的模型。模糊逻辑建模方法的主要内容可分为两个层次:一是模型结构的辨识,另一个是模型参数的估计。1985 年 Takagi 和 Sugeno 提出了 T-S 模糊模型<sup>[10]</sup>,该模糊模型是以局部线性化为基础,通过模糊推理的方法实现了全局的非线性<sup>[11]</sup>,并且可以克服以往模型的高维问题,具有结构简单、逼近能力强等特点,已成为模糊辨识中常用模型<sup>[12,13]</sup>。

典型的模糊结构辨识方法有:模糊网格法、自适应模糊网格法、模糊聚类法及模糊搜索树法等。其中,针对 T-S 模糊模型的模糊聚类法是目前最常用的模糊系统结构辨识方法<sup>[14,15]</sup>,

其中心问题是设定合理的聚类指标,根据该指标所确定的聚类中心可以使模糊输入空间划分最优。

#### 4. 智能算法系统辨识法

随着优化理论的发展,智能算法得到了迅速发展和广泛应用,成为解决传统系统辨识问题的新方法,如遗传算法、蚁群算法、粒子群算法等。这些算法丰富了系统辨识技术,这些优化算法都是通过模拟揭示自然现象和过程来实现的,其优点和机制的独特,为具有非线性系统的辨识问题提供了切实可行的解决方案。

20世纪70年代初,美国密西根大学的霍兰教授和他的学生提出并创立了一种新型的优化算法——遗传算法<sup>[16]</sup>。遗传算法的基本思想来源于达尔文的进化论,该算法将待求的问题表示成串(或称染色体),即为二进制码或者整数码串,从而构成一群串,并将它们置于问题的求解环境中。根据适者生存的原则,从中选择出适应环境的串进行复制,并且通过交换、变异两种基因操作产生出新的一代更加适应环境的串群。经过一代代的不断变化,最后收敛到一个最适应环境的串上,即求得问题的最优解。

粒子群优化算法也是一种进化计算技术,1995年由 Eberhart 博士和 Kennedy 博士提出<sup>[17]</sup>,该算法源于对鸟群捕食的行为研究。与遗传算法相似,粒子群算法也是从随机解出发,通过迭代寻找最优解,它也是通过适应度来评价解的品质,但它比遗传算法规则更为简单,没有遗传算法的“交叉”和“变异”操作,通过追随当前搜索到的最优值来寻找全局最优。这种算法以其实现容易、精度高、收敛快等优点引起了学术界的重视,并且在解决系统辨识问题中展示了其特殊的优越性。

文献<sup>[18]</sup>利用遗传算法设计了一种辨识系统参数的方法,获得了伺服系统摩擦参数的高精度估计。文献<sup>[19]</sup>中采用适应值比例法与最优保留策略相结合的方法进行繁殖操作,同时又自适应地改变了交叉和变异的概率,成功地辨识了非线性系统模型。文献<sup>[20]</sup>利用粒子群算法设计了一种辨识非线性系统物理参数的方法,有效地实现了 RX-60 机械手中 16 个物理参数的辨识。

差分进化算法是一种新兴的进化计算技术,它是由 Storn 等人于 1995 年提出的<sup>[21]</sup>。该算法保留了基于种群的全局搜索策略,采用实数编码、基于差分的简单变异操作和一对一的竞争生存策略,降低了遗传操作的复杂性。同时,差分进化算法特有的记忆能力使其可以动态跟踪当前的搜索情况,以调整其搜索策略,具有较强的全局收敛能力和鲁棒性,且不需要借助问题的特征信息,适于求解一些利用常规的数学规划方法所无法求解的复杂环境中的优化问题。采用差分进化算法可实现复杂系统的参数辨识<sup>[22,23]</sup>。

智能算法不依赖于问题模型本身的特性,能够快速有效地搜索复杂、高度非线性和多维空间,非常适合于辨识系统参数,为系统辨识的研究与应用开辟一条新的途径。

近几十年来,系统辨识获得了长足的发展,已经成为控制理论的一个十分活跃而又重要的分支。由于系统辨识具有很好的工程应用价值,近年来在国内外出版了许多关于系统辨识理论及应用研究的著作,有代表性的主要有文献<sup>[24~35]</sup>,这些教材和著作的出版,有力地促进了该学科的发展。

从线性系统的研究过渡到非线性系统的研究是科学发展的必然结果,这不仅是对研究人员的一种新的挑战,而且也是人类社会向更高级形式演化的一种必然。随着智能算法理论等的不断成熟,逐渐形成了形式多样的现代的系统辨识方法,并且已在实际问题应用中取得了较好的使用效果。

系统辨识未来的发展趋势将是经典系统辨识方法理论的逐步完善,同时随着一些新型学科的产生,有可能形成与之相关的系统辨识方法,使系统辨识成为综合性多学科理论的科学。

## 思考题与习题 1

- 1.1 根据系统辨识的定义,阐述辨识的原理。
- 1.2 阐述系统辨识的 3 个要素以及它们在辨识中的重要性。
- 1.3 请结合身边的实际控制对象,阐述系统辨识的过程。
- 1.4 辨识中常用的误差准则是什么?在自动控制领域中还有哪些误差准则?它们之间有何异同?
- 1.5 简述辨识的内容和步骤。

电子工业出版社版权所有  
盗版必究

## 第 2 章 系统辨识常用输入信号

合理地选用或设计辨识用输入信号,是确保较好辨识性能的前提。本章在分析系统辨识对输入信号要求的基础上,介绍辨识常用的白噪声、M 序列等输入信号及其性质。

### 2.1 系统辨识对输入信号的要求

离线辨识对于输入信号(即辨识试验信号)具有一定的要求,最低要求是在整个观测周期内,系统所有模态必须被输入信号持续激励。更进一步,要求输入信号应能使给定系统的辨识模型精度最高,这就引出了最优输入信号设计问题,包括输入信号类型的选择、信号幅值、带宽等参数的调整。对于在线辨识,如果不直接利用被辨识对象的正常运行信号,而是采用在正常运行信号基础上外加辨识输入信号,则必须防止外加输入信号对被辨识系统正常运行产生严重干扰。

#### 1. 持续激励条件

所谓持续激励,即输入信号能够充分激励被辨识系统的所有模态。满足持续激励条件则要求输入信号相对被辨识系统具有足够宽的频带,至少能覆盖被辨识系统的频带,这是系统辨识对输入信号的基本要求。以连续的非参数模型辨识为例,如果系统通频带的上下限为  $\omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}$ ,则持续激励条件要求输入信号的功率谱密度在  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  范围内不等于零。

#### 2. 最优输入信号条件

为了使最优输入信号的设计与参数估计的有效性联系起来,大多最优输入信号设计准则中,都采用 Fisher 信息矩阵逆的标量函数作为指标函数  $J$

$$J = \phi(\mathbf{M}^{-1}) \quad (2.1)$$

其中,  $\mathbf{M}$  为 Fisher 信息矩阵,即

$$\mathbf{M} = \mathbf{E}_{y|\theta} \left\{ \left[ \frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] \left[ \frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T \right\}$$

因此,使 Fisher 信息矩阵逆的一个标量函数达到最小的输入信号即为最优输入信号。标量函数  $\phi(\cdot)$  可以作为评价模型辨识精度的度量函数,常用的形式有

$$\text{A-最优准则:} \quad J = \text{Tr}(\mathbf{M}^{-1}) \quad \text{或} \quad J = \text{Tr}(\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}) \quad (2.2)$$

$$\text{D-最优准则:} \quad J = \det(\mathbf{M}^{-1}) \quad \text{或} \quad J = \log[\det(\mathbf{M}^{-1})] \quad (2.3)$$

其中,  $\mathbf{W}$  为非负定矩阵。

结合被辨识系统,选择最优输入信号准则后就可以进行最优输入信号的设计。下面以一线性定常离散单输入单输出系统为例,介绍最优输入信号的设计方法。

设含有噪声的单输入单输出系统为

$$y(k) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) + v(k) \quad (2.4)$$

其中,  $\{u(k)\}, \{y(k)\}$  为系统的输入、输出序列,  $\{v(k)\}$  为零均值独立同分布正态随机噪声序列,其协方差为  $\Sigma$ 。

根据最优输入信号准则,首先需要推导信息矩阵  $\mathbf{M}$  与输入序列  $\{u(k)\}$  之间的关系。设

$$\boldsymbol{\beta}^T = [b_1, b_2, \dots, b_n, \Sigma] \triangleq [\boldsymbol{\theta}^T, \Sigma] \quad (2.5)$$

$$v(k) = y(k) - \boldsymbol{\Psi}^T(k)\boldsymbol{\theta} \quad (2.6)$$

其中,  $\boldsymbol{\Psi}^T(k) = [u(k-1) \quad u(k-2) \quad \dots \quad u(k-n)]$ 。

当  $k=1, 2, \dots, N$ , 得到下列矩阵

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta} \quad (2.7)$$

其中,  $\mathbf{V} = [v(1), v(2), \dots, v(N)]^T$ ,  $\mathbf{Y} = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T$ ,  $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}^T(1), \boldsymbol{\Psi}^T(2), \dots, \boldsymbol{\Psi}^T(N)]$ 。根据输入/输出观测序列,  $\boldsymbol{\Psi}$  为已知。Fisher 信息矩阵  $\mathbf{M}$  为

$$\mathbf{M} = E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \left[ \frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right] \left[ \frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right]^T \right\} \quad (2.8)$$

因  $\{v(k)\}$  为独立同分布正态序列, 条件概率密度函数为

$$p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}) = (2\pi\Sigma)^{-\frac{N}{2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Sigma} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (2.9)$$

所以

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{\Sigma} \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \triangleq \mathbf{V}_1 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \log p(\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta})}{\partial \Sigma} = -\frac{N}{2\Sigma} + \frac{1}{2\Sigma^2} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \triangleq \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2^T \quad (2.11)$$

根据式(2.8), 有

$$\mathbf{M} = E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \right\} = E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^T & \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1^T & \mathbf{V}_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

而

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}}[\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2] &= E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{1}{\Sigma} \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \left[ -\frac{N}{2\Sigma} + \frac{1}{2\Sigma^2} (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \right] \right\} \\ &= E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ -\frac{N}{2\Sigma^2} \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2\Sigma^3} \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta})^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

由于噪声序列  $\{v(k)\}$  为零均值独立同分布正态随机变量, 其一阶、三阶矩均为零, 另外,  $\boldsymbol{\Psi}$  已知, 因此有

$$E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}}[\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2] = 0 \quad (2.14)$$

同理

$$E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}}[\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1^T] = 0 \quad (2.15)$$

另外

$$E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}}[\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^T] = E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{1}{\Sigma^2} \boldsymbol{\Psi}^T (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Psi} \right\} = \frac{1}{\Sigma^2} \boldsymbol{\Psi}^T \Sigma \boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{\Sigma} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}}[\mathbf{V}_2^2] &= E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \left[ -\frac{N}{2\Sigma} + \frac{1}{2\Sigma^2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \right]^2 \right\} \\ &= E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{N^2}{4\Sigma^2} - \frac{N}{2\Sigma^3} \mathbf{V}^T \mathbf{V} + \frac{1}{4\Sigma^4} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \right\} \\ &= E_{\mathbf{Y}|\boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{N^2}{4\Sigma^2} - \frac{N}{2\Sigma^3} \sum_{k=1}^N v^2(k) + \frac{1}{4\Sigma^4} \sum_{k=1}^N v^2(k) \sum_{s=1}^N v^2(s) \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

由正态分布的四阶矩公式可得

$$E_{Y|\beta} \left\{ \sum_{k=1}^N v^2(k) \sum_{s=1}^N v^2(s) \right\} = 3N\Sigma^2 + (N^2 - N)\Sigma^2 \quad (2.18)$$

因此根据式(2.17)、式(2.18),得

$$E_{Y|\beta}[V_2^2] = \frac{N^2}{4\Sigma^2} - \frac{N^2}{2\Sigma^2} + \frac{1}{4\Sigma^4} [3N\Sigma^2 + (N^2 - N)\Sigma^2] = \frac{N}{2\Sigma^2} \quad (2.19)$$

将式(2.14)、式(2.15)、式(2.16)、式(2.19)代入式(2.12)得

$$\mathbf{M} = E_{Y|\beta} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^T & \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_1^T & \mathbf{V}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Sigma} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} & 0 \\ 0 & \frac{N}{2\Sigma^2} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

因为

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & \cdots & u(1-n) \\ u(1) & u(0) & \cdots & u(2-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-1) & u(N-2) & \cdots & u(N-n) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

所以

$$\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} u^2(k-1) & u(k-1)u(k-2) & \cdots & u(k-1)u(k-n) \\ u(k-1)u(k-2) & u^2(k-2) & \cdots & u(k-2)u(k-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(k-1)u(k-n) & \cdots & \cdots & u^2(k-n) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

定义平均信息矩阵  $\bar{\mathbf{M}}$

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{M}}{N} \quad (2.23)$$

则有

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\Sigma^2} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} u^2(k-1) & u(k-1)u(k-2) & \cdots & u(k-1)u(k-n) \\ u(k-1)u(k-2) & u^2(k-2) & \cdots & u(k-2)u(k-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(k-1)u(k-n) & \cdots & \cdots & u^2(k-n) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

式(2.25)给出了信息矩阵与输入信号之间的相互关系,在此基础上,如果采用 D-最优设计准则  $J = \log[\det(\bar{\mathbf{M}}^{-1})]$ , 附加输入功率限制设计最优输入信号,有

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k-i) = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

根据式(2.26),最优输入信号的设计问题就成为如何选择  $\{u(k)\}$ , 在满足式(2.26)的条件下,使准则  $J$  最优(极小)。也就是说,在 D-最优设计准则下,参数估计的精度通过 Fisher 信息矩阵  $\mathbf{M}$  依赖于输入  $\{u(k)\}$ 。

因为

$$J = \log[\det(\bar{\mathbf{M}}^{-1})] = -\log(\det \bar{\mathbf{M}}) = -\log \det \left[ \frac{\mathbf{\Gamma}}{\Sigma} \right] + \log 2\Sigma^2$$

$$= -\log(\det \mathbf{\Gamma}) + \log 2\Sigma^{n+2}$$

根据线性代数理论：一个对角元素全为 1 的正定矩阵  $\mathbf{\Gamma}$ ，只有当其非对角元素全为零时， $\log(\det \mathbf{\Gamma})$  将达到它的极大值。因此，根据式(2.26)，最优输入信号  $\{u(k)\}$  应满足

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i)u(k-j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.27)$$

即如果被辨识系统输出为独立同分布正态序列，则符合 D-最优辨识用输入信号的自相关函数应具有脉冲的形式。

## 2.2 系统辨识常用的输入信号

根据系统辨识对输入信号持续激励及最优的要求，常用的输入信号有白噪声、M 序列等，下面将对这些常用输入信号的概念、产生方法及性质进行逐一介绍。

### 2.2.1 白噪声信号

白噪声信号是一种功率谱密度  $S(\omega)$  在整个频域内为非零常数的平稳随机信号或随机过程(如图 2-1 所示)，即

$$S(\omega) = \sigma^2, \quad -\infty < \omega < \infty$$

白噪声的命名源自“白色光”。由各种频率(颜色)的单色光混合而成的白色光具有功率均匀分布的性质，因而被称为是“白色”的。借用这一概念，将同样具有该性质的噪声称为“白噪声”，相对地，将不具有这一性质的噪声称为有色噪声。有色噪声可以看作由白噪声驱动的成形滤波器输出，二者关系如图 2-2 所示。

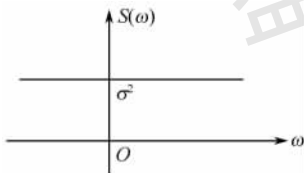


图 2-1 白噪声功率谱密度

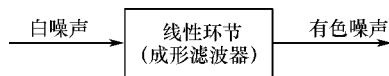


图 2-2 有色噪声与白噪声的关系

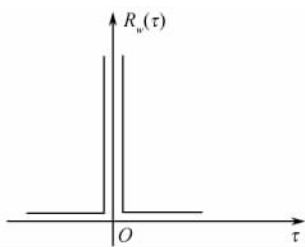


图 2-3 白噪声信号自相关函数

除功率谱密度在整个频域内为非零常数之外，白噪声还具有如下性质：

- ① 均值为零——设白噪声为  $w(t)$ ，则  $E[w(t)] = 0$ ；
- ② 无记忆性——白噪声  $t$  时刻的数值与  $t$  时刻以前的过去值无关，也不影响  $t$  时刻以后的将来值，即不同时刻的随机信号互不相关，其自相关函数(如图 2-3 所示)为

$$R_w(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (2.28)$$

其中， $\delta(\tau)$  为 Dirac 函数为



$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \quad \text{且} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

理想的白噪声具有无限带宽,因而其功率无限大,这在现实世界是不可能存在的。因此,在实际应用中,常常将具有平均功率接近均匀分布的有限带宽信号近似认为是白噪声,即一个噪声过程所具有的频谱宽度远远大于它所作用系统的带宽,并且在该带宽中其频谱密度可以近似为常数,就可以把它作为白噪声来处理。例如,热噪声和散弹噪声在很宽的频率范围内具有均匀功率谱密度,通常可以认为它们是白噪声。另外,如果白噪声的幅度分布服从高斯分布,则称为高斯白噪声。

白噪声信号的离散形式称为白噪声序列,与白噪声信号类似,白噪声序列  $\{x(k)\}$  的谱密度在整个频域范围内为常数  $\sigma^2$ ,而且序列不同时刻不相关,对应的自相关函数为

$$R_x(n) = E[x(k)x(k+n)] = \sigma^2\delta(n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.29)$$

其中,  $\delta(n)$  为 Kronecker 符号:  $\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

根据式(2.29)可知,白噪声序列满足最优输入信号要求,因此常常作为辨识用输入信号。

## 2.2.2 白噪声序列的产生

把各种不同分布的白噪声序列统称为随机序列,产生随机数有多种不同的方法,这些方法被称为随机数发生器。真正的随机数是使用物理现象产生的,比如掷钱币、骰子、转轮、电子元件的噪声、核裂变等,这样的随机数发生器叫做物理性随机数发生器,它们的缺点是技术要求比较高。

实际应用中,随机序列通常都是用某些数学公式计算而产生的伪随机序列代替。伪随机序列可以预先确定,而且可以周期性地重复产生,因此在数学意义上已经不是真正地随机,但如果伪随机数能够通过一系列的统计检验,具有随机序列的统计特性,则在实际中可代替随机序列予以应用。

理论上而言,只要有了一种具有连续分布的伪随机数,就可以通过函数变换的方法产生其他任意分布的伪随机数。(0,1)均匀分布的伪随机数是最简单、最基本的一种。下面分别介绍(0,1)均匀分布伪随机数发生器及其统计检验,并进一步介绍如何通过均匀分布伪随机数发生器得到正态分布伪随机序列。

### 1. (0,1)均匀分布的伪随机数的产生

用数学方法产生(0,1)均匀分布伪随机数本质上是实现如下递推运算

$$\xi_i = f(\xi_{i-1}, \xi_{i-2}, \dots, \xi_1) \quad (2.30)$$

根据式(2.30)选择适当的函数形式  $f$ ,以保证产生的伪随机数  $\xi_i$  具有良好的统计性质,如分布的均匀性、抽样的随机性、试验的独立性等,并且还要求伪随机数产生效率高、循环周期足够长。

#### (1) 乘同余法产生(0,1)均匀分布的伪随机数

乘同余法产生(0,1)均匀分布的伪随机数分为两步。

第一步:用递推同余式产生正整数序列  $\{x_i\}$

$$x_i = Ax_{i-1} \pmod{M} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

式(2.31)表示下一个伪随机数  $x_i$  是上一个伪随机数  $x_{i-1}$  乘以  $A$ ,然后对  $M$  取余获得。其中, $A, M$  的选取与计算机字长有关,初值  $x_0$  也称为种子,一般取正的奇数。常用的参数取

值为  $x_0=1, A=5^{13}, M=10^{36}$  或  $x_0=1, A=5^{17}, M=2^{42}-1$ 。

第二步:令

$$\xi_i = \frac{x_i}{M} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

$\{\xi_i\}$  即为  $(0,1)$  均匀分布的伪随机序列。

【例 2.1】利用乘同余法,选  $A=5^{17}, M=2^{42}$ ,递推 100 次,产生  $(0,1)$  均匀分布随机数。采用 MATLAB 仿真语言编程,仿真程序见 chap2\_1.m,程序运行结果如图 2-4 所示。

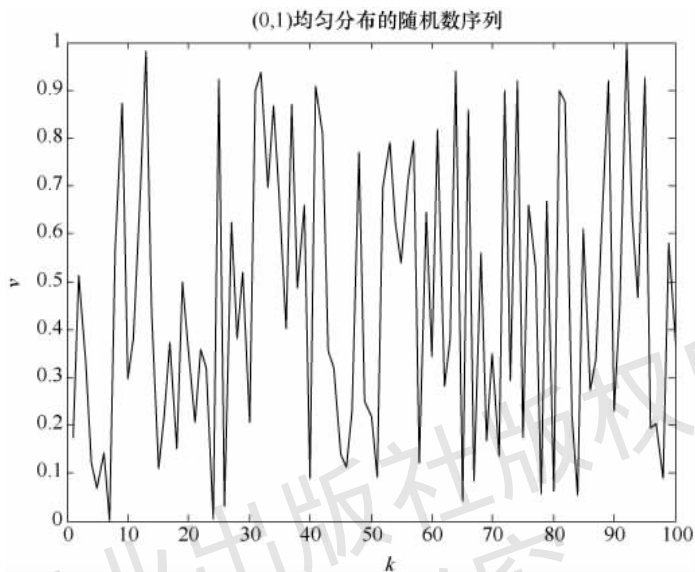


图 2-4 (0,1)均匀分布随机数序列

产生的  $(0,1)$  均匀分布随机序列如下:

```

0.1735  0.5145  0.3307  0.1213  0.0688  0.1422  0.0020  0.5678
0.8741  0.2958  0.3817  0.6917  0.9809  0.4380  0.1097  0.2198
0.3723  0.1509  0.4993  0.3654  0.2069  0.3595  0.3208  0.0034
0.9239  0.0298  0.6228  0.3819  0.5187  0.2068  0.8979  0.9364
0.6960  0.8666  0.6785  0.4006  0.8696  0.4871  0.6604  0.0884
0.9068  0.8088  0.3563  0.3200  0.1378  0.1114  0.2298  0.7691
0.2502  0.2165  0.0927  0.6963  0.7897  0.6208  0.5401  0.7122
0.7937  0.1218  0.6459  0.3444  0.8170  0.2815  0.3782  0.9409
0.0433  0.8570  0.0824  0.5591  0.1688  0.3500  0.1357  0.8994
0.2925  0.9194  0.1726  0.6586  0.5303  0.0558  0.6678  0.0615
0.9000  0.8744  0.2190  0.0548  0.6099  0.2729  0.3376  0.6038
0.9204  0.2305  0.4423  0.9954  0.6338  0.4664  0.9245  0.1931
0.2022  0.0891  0.5800  0.3712

```

仿真程序:chap2\_1.m

```

clear all;
close all;
A=5.^17; N=100; x0=1; M=2.^42; % 初始化
for k=1:N % 乘同余法递推 100 次开始
    x2=A*x0;

```

```

x1=mod(x2,M); % 将 x2 存储器的数除以 M,取余数放入 x1 中
v1=x1/M; % 将 x1 存储器中的数除以 M 得到随机数
v(:,k)=v1; % 将 v1 中的数存放在矩阵 v 中的第 k 列
x0=x1;
v0=v1;
end % 递推 100 次结束
v2=v % 将矩阵 v 中的随机数存放在 v2 中

```

```

% grapher 绘图
k1=k;
k=1:k1;
plot(k,v,k,v,'r');
xlabel('k'),ylabel('v');
title('(0,1)均匀分布的随机序列')

```

## (2) 混合同余法产生(0,1)均匀分布的伪随机数

乘同余法在一定条件下是混合同余法的一个特例。混合同余法与乘同余法产生(0,1)均匀分布的伪随机数方法区别在于递推同余式函数形式不同。混合同余法分为两步实现。

第一步：混合同余法产生伪随机数的递推同余式为

$$x_i = (Ax_{i-1} + c) \pmod{M} \quad (2.33)$$

其中,  $A, M$  均取整数, 一般为  $A = 2^n + 1 (2 \leq n \leq 34)$ ,  $n$  越大, 伪随机数序列的相关系数就越小, 但是  $n$  取值过大, 占用机器时间也会增加, 因此  $n$  取值需合理选取;  $M = 2^k, k > 2$ ;  $c$  为正整数; 初值  $x_0$  为非负整数。

第二步：与乘同余法第二步实现相同, 即令

$$\xi_i = \frac{x_i}{M} \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

$\{\xi_i\}$  即为(0,1)均匀分布的伪随机序列。

## 2. (0,1)均匀分布伪随机数的统计检验

(0,1)均匀分布伪随机数统计检验包括均匀性检验、独立性检验、组合规律检验、无连贯性检验、参数检验等, 一个伪随机数序列能通过的检验越多, 则该发生器就越优良可靠。在所有检验中, 最基本的是均匀性和独立性检验。均匀性是指在  $[0, 1]$  区域内, 等长度区间的随机数分布个数应相等。独立性是按先后顺序出现的若干个随机数中, 每个数的出现都和它前后的各个数无关。

### (1) 均匀性检验

均匀性检验是所有检验中最简单的一种。它的方法很多, 常用的如  $\chi^2$  检验法。

设在区间  $[0, 1]$  上的伪随机数序列为  $\{\xi_i\}$ 。如果该伪随机数是均匀分布的, 则将  $[0, 1]$  区间分成  $k$  个相等的子区间后, 落在每个子区间的伪随机数个数  $N_i$  应近似为  $N/k$ 。  $N_i$  也称频数, 统计误差  $\sigma_i = \sqrt{N_i} - \sqrt{N/k}$ 。统计量  $\chi^2$  按定义应为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - N/k)^2}{N/k} = \frac{k}{N} \sum_{i=1}^k (N_i - N/k)^2 \quad (2.35)$$

判断式(2.35)中  $\chi^2$  是否服从  $\chi^2(k-1)$  分布, 设显著性水平值为  $\alpha$ ,  $k-1$  个自由度且显著水平为  $\alpha$  时,  $\chi^2$  表中对应值为  $t_\alpha$ 。如果  $\chi^2 < t_\alpha$ , 则认为在  $\alpha$  的显著水平下, 原伪随机数在  $[0, 1]$  区间是均匀分布的假设是正确的; 反之如果计算得到的  $\chi^2$  大于  $t_\alpha$ , 则认为在  $\alpha$  显著水平

下,伪随机数不满足均匀性的要求。通常取显著水平  $\alpha$  为 0.01 或 0.05,为了反映均匀性分布特性,一般  $k$  的取值要能使每个子区间都有若干个伪随机数。

## (2) 独立性检验

如果把  $[0, 1]$  上的伪随机数序列  $\{\xi_i\}$  分成两列:  $\xi_1, \xi_3, \dots, \xi_{2N-1}$  和  $\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2N}$ , 第一列作为随机变量  $x$  的取值,第二列作为随机变量  $y$  的取值。在  $x-y$  平面内的单位正方形域  $[0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$  上,分别以平行于坐标轴的平行线,将正方形域分成  $k \times k$  个相同面积的小正方形网格。落在每个网格内的随机数的频数  $n_{ij}$  应近似等于  $N/k^2$ ,由此可以算出  $\chi^2$  为

$$\chi^2 = \sum_{i,j=1}^k \frac{k^2}{N} (n_{ij} - \frac{N}{k^2})^2 \quad (2.36)$$

$\chi^2$  应满足  $\chi^2((k-1)^2)$  分布,采用与均匀性检验相同的方法,假定显著性水平来进行检验。也可以把伪随机数序列分为三列、四列等多个数列,采用与上述相同的方法进行多维独立性检验。

## 3. 正态分布伪随机数的产生

根据林德伯格—勒维中心极限定理:  $n$  个相互独立、同分布且存在均值与方差的随机变量,其和服从渐近正态分布。因此,可以采用均匀分布的伪随机数,通过抽样来产生服从正态分布的随机数。下面介绍两种基于均匀分布伪随机数产生正态分布伪随机数的方法:一种方法为统计近似抽样法,另一种为变换抽样法。

### (1) 统计近似抽样法

设  $\{\xi_i\}$  是  $(0, 1)$  均匀分布的伪随机数序列,则

$$\mu_\xi = E\{\xi_i\} = \int_0^1 \xi_i p(\xi_i) d\xi_i = \frac{1}{2} \quad (2.37)$$

$$\sigma_\xi^2 = \text{Var}\{\xi_i\} = \int_0^1 (\xi_i - \mu)^2 p(\xi_i) d\xi_i = \frac{1}{12} \quad (2.38)$$

根据中心极限定理,由  $n$  个在  $(0, 1)$  区间上均匀分布的伪随机数所构成的随机变量  $\zeta$  为

$$\zeta = \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{2} \quad (2.39)$$

$\zeta$  则是一个近似的正态随机变量,服从正态分布  $N(0, \frac{1}{12})$ ,当  $n \rightarrow \infty$  时,有

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu_\xi}{\sqrt{n\sigma_\xi^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/12}} \sim N(0, 1) \quad (2.40)$$

如果  $\eta \sim N(\mu_\eta, \sigma_\eta^2)$  是要产生的正态分布随机变量,则首先经标准化处理

$$\frac{\eta - \mu_\eta}{\sqrt{\sigma_\eta^2}} \sim N(0, 1) \quad (2.41)$$

比较式(2.41)和式(2.40),则有

$$\frac{\eta - \mu_\eta}{\sqrt{\sigma_\eta^2}} = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \quad (2.42)$$

因此

$$\eta = \mu_\eta + \sigma_\eta \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \quad (2.43)$$

$n$  在实际中的具体取值,可以根据统计检验使  $\eta$  的统计性质满足要求确定。试验表明: $n=12$  时,  $\eta$  的统计性质就比较理想了。

### (2) 变换抽样法

变换抽样法的基本思想是将一个复杂分布的抽样,变换为已知的简单分布抽样。抽样步骤为:首先对满足简单分布密度函数进行抽样,然后通过变换得到满足分布密度函数的抽样值。对于  $\xi_1$  和  $\xi_2$  是两个互为独立的  $(0,1)$  均匀分布随机变量这种特殊情况,则变换方式为

$$\begin{cases} \eta_1 = (-2\log\xi_1)^{\frac{1}{2}} \cos 2\pi\xi_2 \\ \eta_2 = (-2\log\xi_1)^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi\xi_2 \end{cases} \quad (2.44)$$

$\eta_1, \eta_2$  是相互独立、服从  $N(0,1)$  正态分布的随机变量。

## 2.3 M 序列的产生及其性质

伪随机二进制序列(Pseudo Random Binary Sequence, PRBS)是广泛应用的一种伪随机序列,所谓“二进制”是指序列中每个随机变量只有“0”或“1”两种逻辑状态。伪随机二进制序列可由多级线性反馈移位寄存器组成的随机信号发生器产生,其中具有最长循环周期的线性移位寄存器序列是伪随机二进制序列最常见的一种形式,简称 M 序列(Maximal Length Sequence)。M 序列由于具有近似白噪声的性质,而且工程上易于实现,能够保证较好的系统辨识精度,是普遍采用的一种辨识用输入信号。

### 1. M 序列的产生

首先介绍多级线性反馈移位寄存器产生伪随机二进制序列的过程。以一个 4 级线性反馈移位寄存器产生伪随机二进制序列为例,如图 2-5 所示。

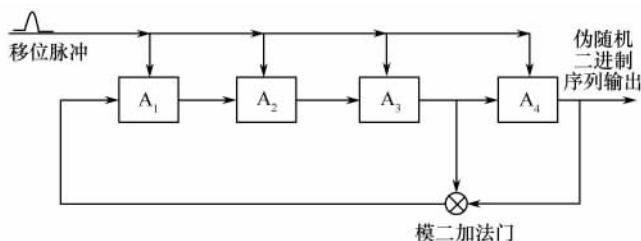


图 2-5 线性反馈移位寄存器产生伪随机二进制序列结构图

假设 4 个移位寄存器  $A_1, A_2, A_3, A_4$  输出的初态非全零,移位寄存器的工作原理是:一个移位脉冲来到后,每级移位寄存器的输出移到下一级移位寄存器作为输入,最末一级移位寄存器的输出即为伪随机二进制序列。设置模二加法门于  $A_3, A_4$  输出处,形成反馈通道。模二加法门的加法规则为

$$1 \oplus 1 = 0 \quad 0 \oplus 0 = 0 \quad 1 \oplus 0 = 1 \quad 0 \oplus 1 = 1 \quad (2.45)$$

在移位脉冲的作用下,寄存器各级状态变化如表 2-1 所示。

表 2-1 寄存器各级状态变化表

移位脉冲 / 寄存器	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A <sub>1</sub>	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
A <sub>2</sub>	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
A <sub>3</sub>	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
A <sub>4</sub>	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1

从表 2-1 可以看出,寄存器的各级状态均以周期为 15 进行循环,所产生的 M 序列为 111100010011010,如果模二加法门设置在 A<sub>2</sub>, A<sub>4</sub> 输出处时,所产生的输出序列为 1111100。由此可见,反馈通道选择的不同,将产生不同循环周期的伪随机二进制序列。采用 n 级线性反馈移位寄存器,能够产生的伪随机二进制序列最长循环周期为 N=2<sup>n</sup>-1,这种具有最长循环周期的伪随机二进制序列即为 M 序列。因此,要产生 M 序列,反馈通道的选择不是任意的,那么究竟应该如何选择反馈通道,才能保证生成的是 M 序列呢?

问题的回答涉及近世代数有限域理论,由线性反馈移位寄存器产生的伪随机二进制序列可以表示为一变量 X 的多项式:

$$G(X) = g_m X^m \oplus g_{m-1} X^{m-1} \oplus \dots \oplus g_2 X^2 \oplus g_1 X \oplus g_0 \quad (2.46)$$

式(2.46)称为发生器多项式(Generator Polynomial),其中,系数 g<sub>i</sub> 为权值,如果取值为 1 则表示反馈连接,0 表示无反馈连接,多项式的阶次 m 表示移位寄存器的级数,“⊕”表示模二加法。

例如,发生器多项式:G(X)=X<sup>3</sup>⊕X<sup>1</sup>⊕1 表示线性反馈移位寄存器序列是通过将第 3 级移位寄存器和第 1 级移位寄存器进行模二相加后,反馈至第 0 级移位寄存器获得的,反馈通道表示为[3,1],如图 2-6 所示。

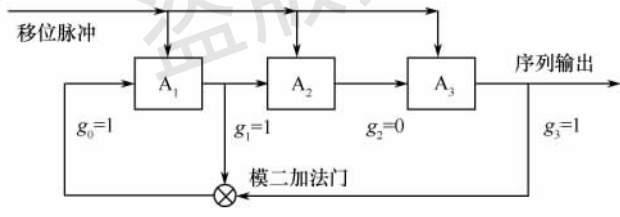


图 2-6 发生器多项式示意图

产生 M 序列的生成器多项式必须为本原(Primitive)多项式,该多项式是 n 次既约多项式,而且该多项式是多项式 X<sup>N</sup>⊕1 的一个因子,其中 N=2<sup>n</sup>-1。

根据 M 序列对生成器多项式的要求,下面以 3 级移位寄存器为例,说明如何确定反馈通道。根据本原多项式的定义,产生 M 序列的生成器多项式是多项式 X<sup>7</sup>⊕1 的一个因子,根据模二线性代数运算法则可知

$$X^7 \oplus 1 = (X \oplus 1)(X^3 \oplus X \oplus 1)(X^3 \oplus X^2 \oplus 1) \quad (2.47)$$

本原多项式是其阶数与寄存器级数相同的因子,可见上式中,后两项为本原多项式,因此有两组反馈通道可供选择:[3,1],[3,2]。

给定任意级数的移位寄存器,要产生 M 序列,总是存在偶数组反馈通道可供选择。例如一组反馈通道为 [f<sub>1</sub>, f<sub>2</sub>, ..., f<sub>j</sub>], 总有另外一组反馈通道 [f<sub>1</sub>, n-f<sub>2</sub>, ..., n-f<sub>j</sub>] 伴随存在,其

中,  $n$  为寄存器的级数。由伴随反馈通道产生的 M 序列称为原 M 序列的镜像。

为了应用方便, 表 2-2 列出了常用的 3~6 级移位寄存器产生 M 序列可供选择的反馈通道组, 其中不包括伴随反馈通道。

表 2-2 3~6 级移位寄存器反馈通道组列表

移位寄存器级数 $n$	反馈通道组	移位寄存器级数 $n$	反馈通道组
3	[3, 2]	6	[6, 5]; [6, 5, 4, 1]; [6, 5, 3, 2]
4	[4, 3]	7	[7, 6]; [7, 4]; [7, 6, 5, 4] [7, 6, 5, 2]; [7, 6, 4, 2] [7, 6, 4, 1]; [7, 5, 4, 3] [7, 6, 5, 4, 3, 2] [7, 6, 5, 4, 2, 1]
5	[5, 3] [5, 4, 3, 2] [5, 4, 3, 1]	8	[8, 7, 6, 1] [8, 7, 5, 3] [8, 7, 3, 2] [8, 6, 5, 4] [8, 6, 5, 3] [8, 6, 5, 2] [8, 7, 6, 5, 4, 2] [8, 7, 6, 5, 2, 1]

## 2. M 序列的基本性质

M 序列除了具有伪随机二进制序列性质之外, 还具有近似白噪声的统计特性, 下面就 M 序列的基本性质逐一进行介绍。

基本性质 1: M 序列的一个循环周期  $N=2^n-1$  内, 逻辑“0”出现的次数为  $(N-1)/2$ , 逻辑“1”出现的次数为  $(N+1)/2$ 。如图 2-7 所示, 循环周期为  $N=7$  的 M 序列, 逻辑“0”出现的次数为 3, 逻辑“1”出现的次数为 4 (逻辑电平“0”对应幅值为“ $a$ ”, 逻辑电平“1”对应幅值“- $a$ ”)。

当循环周期  $N$  较大时, 逻辑“0”和逻辑“1”出现的概率几乎相等。

基本性质 2: M 序列中某种状态连续出现的段称为“游程”。一个  $n$  级移位寄存器产生的 M 序列游程总数为  $\frac{N+1}{2}$ , 即  $2^{n-1}$ 。其中, 逻辑“0”游程和逻辑“1”游程各占一半, 长度为 1 位的游程占  $\frac{1}{2}$ , 长

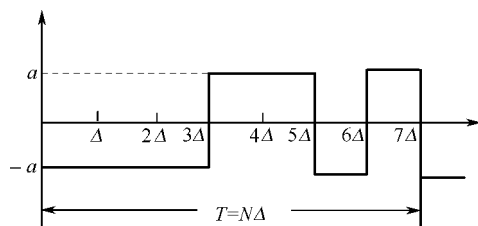


图 2-7 3 级移位寄存器产生的 M 序列

度为 2 位的游程占  $\frac{1}{4}$ , 长度为 3 位的游程占  $\frac{1}{8}$ ……长度为  $i(1 \leq i \leq n)$  位的游程占  $\frac{1}{2^i}$ , 长度为  $n-1$  的游程只有一个, 为逻辑“0”游程; 长度为  $n$  的游程也只有一个, 为逻辑“1”游程。例如, 上述的 3 级 M 序列在一个循环周期  $N=7$  内, 共有  $\frac{7+1}{2}=4$  个游程, 逻辑“0”游程与逻辑“1”游程各有 2 个, 长度为 1 位的游程有 2 个, 长度为 2 位的游程和长度为 3 位的游程各有 1 个。

基本性质 3: 将两个彼此移位等价相异的 M 序列, 按位模二相加后, 所得到的新序列仍为 M 序列, 并与原 M 序列等价。该性质称为移位相加性, 数学表示为

$$x \oplus D^r x = D^q x \quad r \geq 1, q \leq N-1 \quad (2.48)$$

$D^r, D^q$  表示延迟了  $r$  位和  $q$  位,  $N$  为  $M$  序列周期。式(2.48)表示一个  $M$  序列与将它延迟了  $r$  位以后的序列按模二加法原则相加, 则所得到的新序列是原  $M$  序列延迟了  $q$  位后形成的  $M$  序列。

例如

$$\begin{array}{r} x: 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \\ \oplus D^3 x: 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ \hline D^4 x: 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \end{array}$$

新的序列 011110001001101 也是  $M$  序列, 不过比原  $M$  序列  $x$  延迟了 4 位。

### 3. $M$ 序列的自相关函数

$M$  序列自相关函数是其重要的统计特性, 且求解复杂。根据自相关函数定义, 周期为  $N$  的  $M$  序列  $x$  自相关函数表示为

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{N\Delta} \int_0^{N\Delta} x(t)x(t+\tau)dt \quad (2.49)$$

其中,  $\Delta$  为移位脉冲周期, 将上式写成离散形式

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)x(k+\tau) \quad (2.50)$$

根据  $k$  和  $\tau$  之间的关系, 下面分为 4 种情况讨论自相关函数。

(1) 当  $\tau=0$  时

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^2(k) = a^2 \quad (2.51)$$

其中,  $a$  为  $M$  序列的幅值, 在实际应用中总是把  $M$  序列的逻辑“0”和逻辑“1”对应变换成幅值为  $a$  和  $-a$  的序列。

(2) 当  $-\Delta < \tau < \Delta$  时

根据  $M$  序列的基本性质 2, 在一个周期内, 共有  $2^{n-1}$  个游程, 即逻辑“1”和逻辑“0”之间的变换次数共有  $2^{n-1}$  次。如图 2-8 所示, 以周期为 7 的  $M$  序列为例, 逻辑“1”转换成逻辑“0”或者逻辑“0”转换成逻辑“1”的次数为  $2^{3-1}=4$  次。从图 2-8 还可以看出, 逻辑每转换一次, 都要从  $R_{xx}(0)$  中去掉一块  $\frac{a^2|\tau|}{N\Delta}$  大小的面积, 并以一块  $-\frac{a^2|\tau|}{N\Delta}$  代替。因此有

$$R_{xx}(\tau) = a^2 - \frac{(N+1)}{2} \frac{2a^2|\tau|}{N\Delta} = a^2 \left(1 - \frac{N+1}{N} \frac{|\tau|}{\Delta}\right) \quad (2.52)$$

(3) 当  $\tau=\mu(\mu=1, 2, \dots, N-1$  的整数) 时

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)x(k+\mu) \quad (2.53)$$

如果  $k=0, 1, \dots, N-1$  时,  $x(k)$  与  $x(k+\mu)$  属于相同逻辑的情况有  $\alpha$  种, 不同逻辑的情况有  $\beta$  种, 则自相关函数为

$$R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{N} (\alpha - \beta) \quad (2.54)$$

下一步就需要确定  $\alpha$  和  $\beta$ 。

根据  $x(k)x(k+\mu)$  与  $x(k\Delta) \oplus x(k\Delta+\mu\Delta)$  之间的同构关系, 两个幅值为  $a$  的  $M$  序列相乘等价于该两序列模二相加后所得的幅值为  $a^2$  的新序列。这种同构关系如表 2-3 所示。



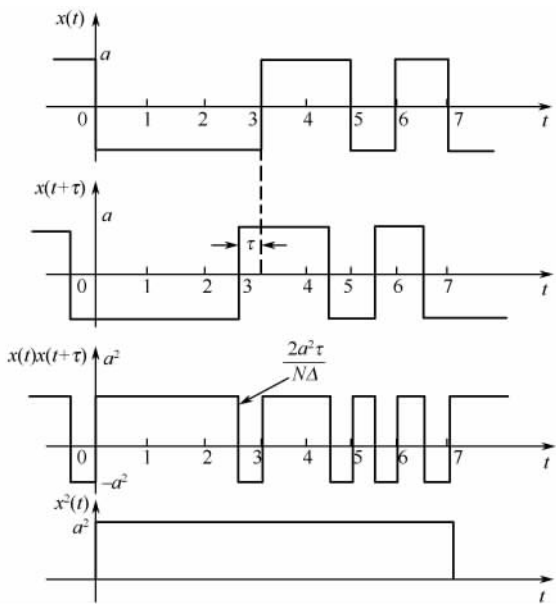


图 2-8  $-\Delta < \tau < \Delta$  时 M 序列自相关函数情况分析(以 3 级 M 序列为例)

表 2-3 两幅值相同的 M 序列相乘等价于两序列模二相加所得的幅值为  $a^2$  的新序列

$x(k)$	$x(k+\mu)$	$x(k) \oplus x(k+\mu)$	$x(k)x(k+\mu)$
$a, (0)$	$a, (0)$	$a, (0)$	$a^2, (0)$
$a, (0)$	$-a, (1)$	$-a, (1)$	$-a^2, (1)$
$-a, (1)$	$a, (0)$	$-a, (1)$	$-a^2, (1)$
$-a, (1)$	$-a, (1)$	$a, (0)$	$a^2, (0)$

根据 M 序列的移位相加性,  $x(k) \oplus x(k+\mu)$  获得的新序列仍然是一个 M 序列。再根据 M 序列的基本性质 1, 逻辑“0”(对应幅值为  $a$ ) 出现的次数为  $(N-1)/2$ , 逻辑“1”(对应幅值为  $-a$ ) 出现的次数为  $(N+1)/2$ , 因此

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \beta = \frac{N+1}{2} \quad (2.55)$$

将式(2.55)代入式(2.54), 得

$$R_{xx}(\tau) = \frac{a^2}{N}(\alpha - \beta) = \frac{a^2}{N} \left( \frac{N-1}{2} - \frac{N+1}{2} \right) = \frac{-a^2}{N} \quad (2.56)$$

(4) 当  $\mu < \tau < (\mu+1)$  ( $\mu$  为整数,  $\mu \neq 0, \mu \neq N-1$ ) 时

在逻辑状态变化处,  $x(k)x(k+\tau)$  的面积与第(3)种情况  $x(k)x(k+j\Delta)$  ( $j$  为整数) 的面积相比, 在一个周期内多出的面积等于减少的面积, 因此, 其自相关函数与式(2.56)相同, 即

$$R_{xx}(\tau) = \frac{-a^2}{N} \quad (2.57)$$

以  $\mu=2\Delta, \tau=2.5\Delta$  为例, 图 2-9 分别绘出  $x(k), x(k+\tau), x(k)x(k+\tau), x(k)x(k+\mu)$ 。比较  $x(k)x(k+\tau)$  及  $x(k)x(k+\mu)$  可以看出, 在一个循环周期内,  $x(k)x(k+\tau)$  减少了 4 块面积, 同时也增加了 4 块面积, 而且增加的面积等于减少的面积, 所以总面积相同。

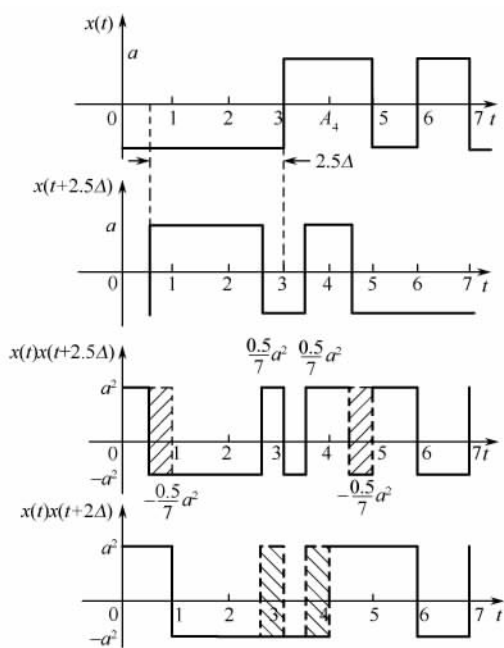


图 2-9  $2\Delta < \tau < 3\Delta$  时 M 序列的自相关函数情况分析

综合(1)、(2)、(3)、(4)四种情况, M 序列的自相关函数可归纳为

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} a^2 \left(1 - \frac{N+1}{N} \frac{|\tau|}{\Delta}\right) & -\Delta \leq \tau \leq \Delta \\ -a^2/N & \Delta < \tau \leq (N-1)\Delta \end{cases} \quad (2.58)$$

因为  $R_{xx}(\tau)$  是以  $N\Delta$  为周期的偶函数,  $R_{xx}(\tau)$  如图 2-10 所示。

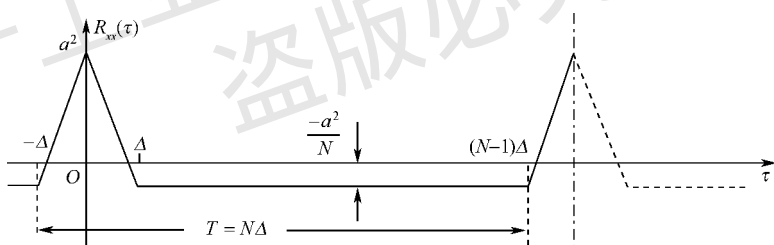


图 2-10 M 序列的自相关函数

从图 2-10 可以看出, 当  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta$  较小时, M 序列的自相关函数具有脉冲的形式, 所以 M 序列符合辨识用 D-最优输入信号要求, 是一种常用的辨识输入信号。

#### 4. M 序列的功率谱密度

根据被辨识系统的频谱特性, 了解 M 序列功率谱密度以便于合理选择 M 序列参数。下面将在 M 序列自相关函数的基础上, 进行 M 序列功率谱密度分析。

将 M 序列的自相关函数分解为两个函数之和

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}^{(1)}(\tau) + R_{xx}^{(2)}(\tau) \quad (2.59)$$

其中

$$R_{xx}^{(1)}(\tau) = \begin{cases} a^2 \left(1 + \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta}\right) & -\Delta \leq \tau \leq \Delta \\ 0 & \Delta < \tau \leq (N-1)\Delta \end{cases} \quad (2.60)$$

$$R_{xx}^{(2)}(\tau) = -a^2/N \quad (2.61)$$

分解示意图如图 2-11 所示。

相应地, M 序列的谱密度也等于两个谱密度之和

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}^{(1)}(\omega) + S_{xx}^{(2)}(\omega) \quad (2.61)$$

下面分别根据  $R_{xx}^{(1)}(\tau)$  和  $R_{xx}^{(2)}(\tau)$  来求取  $S_{xx}^{(1)}(\omega)$  和  $S_{xx}^{(2)}(\omega)$ 。

根据维纳—辛钦公式

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.62)$$

随机信号的功率谱密度  $S(\omega)$  是其自相关函数  $R(\tau)$  的傅里叶变换。由于 M 序列为离散信号且  $R_{xx}^{(1)}(\tau)$  为偶函数, 因此有

$$R_{xx}^{(1)}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0\tau} \quad (2.63)$$

其中, 基频  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 。

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}^{(1)}(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau \quad (2.64)$$

将式(2.64)代入式(2.63)得

$$\begin{aligned} S_{xx}^{(1)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j(\omega - k\omega_0)\tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0)\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.65)$$

$e^{jk\omega_0\tau}$  的傅里叶变换为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0)\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) \quad (2.66)$$

将式(2.66)代入式(2.65), 得

$$S_{xx}^{(1)}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \quad (2.67)$$

根据式(2.64), 有

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{xx}^{(1)}(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} R_{xx}^{(1)}(\tau) \cos k\omega_0\tau d\tau \\ &= \frac{2}{N\Delta} \left( \int_0^{\Delta} a^2 \left(1 + \frac{\tau}{N}\right) \left(1 - \frac{\tau}{\Delta}\right) \cos k\omega_0\tau d\tau + \int_{\Delta}^{N\Delta/2} 0 \cos k\omega_0\tau d\tau \right) \\ &= \frac{2a^2}{N\Delta} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \left( \frac{1}{k\omega_0} \sin k\omega_0\Delta - \frac{1}{\Delta\omega^2} (\cos k\omega_0\Delta - 1 + k\omega_0\Delta \sin k\omega_0\Delta) \right) \\ &= \frac{2a^2}{N\Delta} \left( \frac{N+1}{N\Delta(k\omega_0)^2} (1 - \cos k\omega_0\Delta) \right) \\ &= \frac{a^2}{N} \left( \frac{N+1}{N} \left( \frac{\sin(k\omega_0\Delta/2)}{k\omega_0\Delta/2} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

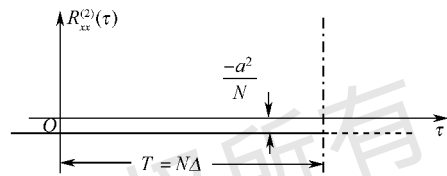
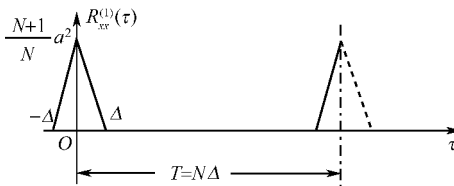
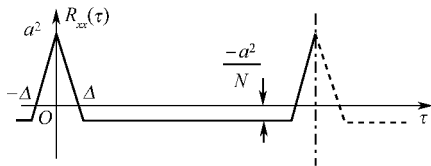


图 2-11 M 序列的自相关函数分解示意图

将式(2.68)代入式(2.67),又由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,因此有

$$\begin{aligned} S_{xx}^{(1)}(\omega) &= \frac{2\pi a^2}{N} \frac{N+1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin(k\omega_0\Delta/2)}{k\omega_0\Delta/2} \right)^2 \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \frac{2\pi a^2(N+1)}{N^2} \delta(\omega) + \frac{2\pi a^2(N+1)}{N^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\sin(k\omega_0\Delta/2)}{k\omega_0\Delta/2} \right)^2 \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \quad (2.69)$$

因为 1 的傅里叶变换为  $2\pi\delta(\omega)$ ,因此

$$S_{xx}^{(2)}(\omega) = -\frac{2\pi a^2}{N} \delta(\omega) \quad (2.70)$$

根据式(2.62)、式(2.69)和式(2.70),有

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= S_{xx}^{(1)}(\omega) + S_{xx}^{(2)}(\omega) \\ &= \frac{2\pi a^2}{N^2} \delta(\omega) + \frac{2\pi a^2(N+1)}{N^2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left( \frac{\sin(k\omega_0\Delta/2)}{k\omega_0\Delta/2} \right)^2 \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \quad (2.71)$$

根据式(2.71),绘制 M 序列的功率谱如图 2-12 所示。

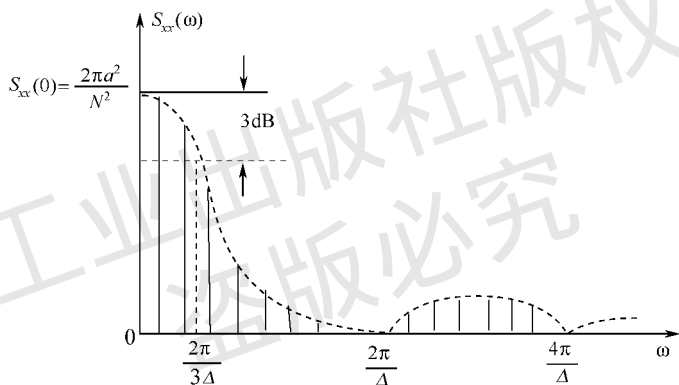


图 2-12 M 序列的功率谱密度

从图 2-12 可以看出:

①  $S_{xx}(\omega)$  是以  $\frac{2\pi a^2(N+1)}{N^2} \left( \frac{\sin(k\omega_0\Delta/2)}{k\omega_0\Delta/2} \right)^2$  为包络线的线条谱,当  $k = N, 2N, \dots$  时,  $S_{xx}(\omega) = 0$ ,说明 M 序列的频谱中不包含基频  $\omega_0$  的整数倍频成分;

② 当  $\omega \approx \frac{2\pi}{3\Delta}$  时,  $\left( \frac{\sin(\omega\Delta/2)}{\omega\Delta/2} \right)^2 = 0.707$ ,因此, M 序列的频带为  $B \approx \frac{1}{3\Delta}$  (Hz);

③ 当  $\omega = 0$  时,  $S_{xx}(0) = \frac{2\pi a^2}{N^2}$ ,说明 M 序列的直流成分与  $N^2$  成反比;

④  $S_{xx}(\omega)$  的谱线密度与周期  $N\Delta$  成正比,周期越长,谱线则越密,另外各频谱分量与  $N$  大致成反比。

## 5. M 序列参数选择及 MATLAB 实现

选择 M 序列作为辨识用输入信号时,需要确定 M 序列的幅值  $a$ 、移位脉冲周期  $\Delta$  和循环周期  $N$  三个参数。M 序列参数的选择可参考如下:

① 幅值  $a$ : 幅值  $a$  根据被辨识系统的线性范围和允许的信噪比来确定。一方面,  $a$  必须对系统进行充分的激励; 另一方面,  $a$  又不能太大, 否则将引起系统非线性和较大的干扰噪声。

② 移位脉冲周期  $\Delta$ : 根据被辨识系统的频带或截止频率这些重要的工作频率作为参考进行  $\Delta$  的选择, 设最高的参考工作频率为  $\omega_{\max}$ , 为使 M 序列的有效频带能够覆盖被辨识系统的重要工作频率区, 应满足

$$\frac{2\pi}{3\Delta} > \omega_{\max} \text{ 或 } \Delta < \frac{2\pi}{3\omega_{\max}}$$

如果  $\Delta$  选得太大, 则 M 序列的自相关函数  $R_{xx}(\tau)$  曲线中, 三角形部分底部太宽, M 序列与白噪声的自相关函数相差悬殊, 影响辨识效果; 如果选得太小, M 序列的频带较宽, 在幅值  $a$  一定的条件下, M 序列的有效功率在主要频域内下降。

另外, 实际应用中考虑计算机采样频率较高, 可能出现采样时间  $T_0$  小于  $\Delta$  的情况, 一般可取  $\Delta = \lambda T_0$  ( $\lambda$  取正整数)。

③ 循环周期  $N$ : 为使系统脉冲响应在 M 序列一个周期时间  $N\Delta$  内近似衰减到零, 应满足  $T = N\Delta > t_s$ , 其中  $t_s$  为系统的调节时间。如果循环周期取得太大, 在实际应用中辨识用时间较长, 一般取为  $N\Delta = (1.2 \sim 1.5)t_s$ 。

在 M 序列参数选择过程中, 如果被辨识系统的调节时间  $t_s$  较小, 如果仍然按照上述方法选择参数, 则 M 序列循环周期  $N$  值就太小, 这种情况下, 可以提高  $N$  值。

例如, 设被辨识系统  $t_s = 15\text{s}$ , 截止频率  $\omega_c = 0.2\text{Hz}$ , 则按照上述方法选择  $\Delta$  为

$$\Delta < \frac{2\pi}{3\omega_c} = \frac{2\pi}{3 \times 0.2} = 10.47\text{s}$$

如果选  $\Delta = 4\text{s}$ , 则  $N > \frac{t_s}{\Delta} = \frac{15}{4} = 3.75$ 。这种情况下, 可以提高  $N$  值, 如选  $N = 31$ , M 序列的一个周期为  $N\Delta = 124\text{s}$ 。

就 M 序列的参数选择问题举例如下:

**【例 2.2】** 设辨识一个热交换器温度控制系统, 系统输入  $x(t)$  为蒸汽进气阀的控制电流, 输出为被蒸汽加热后的水温。通过时域和频域响应实验分析, 已知调节时间约为  $t_s = 15\text{s}$ , 截止频率  $\omega_c = 2\text{Hz}$ , 根据系统线性范围和信噪比要求, 选择 M 序列参数为:  $a = 0.5\text{mA}$ ,  $\Delta = 0.6\text{s}$ ,  $N = 31$ , 可通过 4 级移位寄存器实现该 M 序列。设初始时刻 4 级移位寄存器初值为 1110, MATLAB 仿真程序实现该 M 序列(具体程序见 chap2\_2.m), 结果如图 2-13 所示。

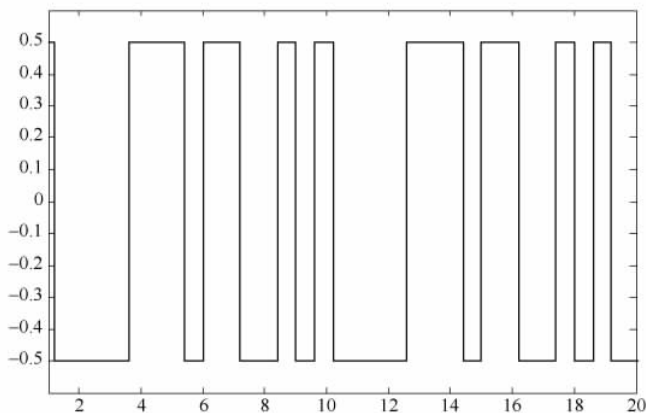


图 2-13 4 级 M 序列实现

## 仿真程序:chap2\_2.m

```
clear all;
close all;
n= 4;
N= 2^n- 1;
a= 0.5;
delta= 0.6
A1= 1;A2= 1;A3= 1;A4= 0;    % 设置初始值
for i= 1:3* N
    X1= xor(A3,A4);          % 对第三级和第四级移位寄存器输出进行模二相加
    X2= A1;
    X3= A2;
    X4= A3;
    OUT(i)= A4;              % 移位寄存器最后一级输出
    t(i)= delta* i;
    if OUT(i)> 0.5
        u(i)= - a;          % 确定电平幅值
    else u(i)= a;
    end
    A1= X1;A2= X2;A3= X3;A4= X4;
end
figure(1);                    % 绘制 M 序列曲线
stairs(t,u,'- ');
axis([1 20 - 0.6 0.6]);
```

## 思考题与习题 2

2.1 如图 2-14 所示一阶系统,系统传递函数为  $G(s)=1/(0.1s+1)$ ,如果采用 M 序列作为输入信号进行系统辨识,取 M 序列的时钟脉冲  $\Delta=15\text{ms}$ ,选用 5 级移位寄存器产生的 M 序列作为输入信号是否合适?为什么?

2.2 辨识如图 2-15 所示欠阻尼二阶单位负反馈系统,其中  $K=16\text{s}^{-1}$ , $T=0.25\text{s}$ ,如果以 M 序列作为辨识输入,应至少采用几级移位寄存器实现?为什么?

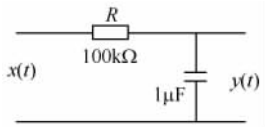


图 2-14 RC 电路示意图

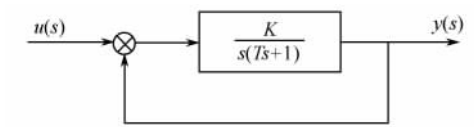


图 2-15 欠阻尼二阶单位负反馈系统结构图

### 第 3 章 最小二乘参数辨识方法及应用

在实际的生产和工程中,经常会遇到这样的问题,根据测量结果来确定两个变量  $z$  与  $t$  间的未知对应关系,如图 3-1 所示。横坐标  $t$  表示时间,也可以为其他物理量;纵坐标  $z$  表示在每个  $t$  时刻的测量值。由于每次测量都存在随机误差,而且测量随机误差的统计特性未知。

设进行了  $m$  次独立试验,得到  $m$  组测量数据:  $(t_1, z_1), (t_2, z_2), \dots, (t_m, z_m)$ 。如果把测量点画在直角坐标平面上,就得到图 3-1。根据这些观测数据,如何用最优的方式确定  $z$  与  $t$  之间的关系呢?可用更一般的形式来表示为

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$

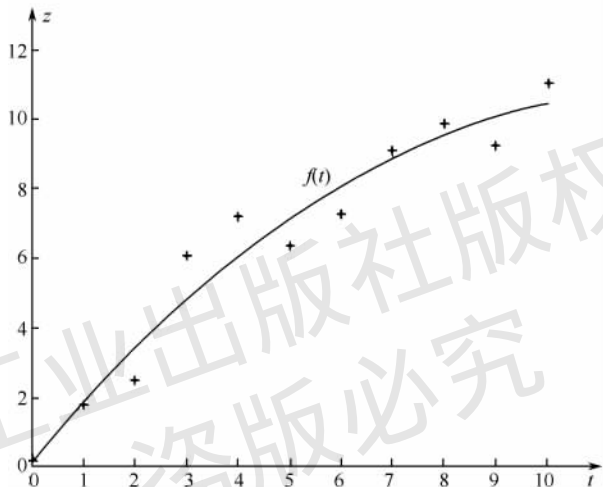


图 3-1 测量值与函数间的关系

通常,  $z$  的未知函数可用  $f(t)$  来表示,  $f(t)$  的类型应根据这  $m$  组数据的分布情况或所研究问题的物理性质来决定,为便于计算,通常采用多项式

$$f(t) = a_0 + a_1 f_1(t) + \dots + a_n f_n(t)$$

式中,  $f_1(t), \dots, f_n(t)$  为已知确定的函数,如  $t$  的幂函数、正余弦函数或指数函数等;  $a_0, \dots, a_n$  为待定的未知参数。

将  $m$  组测量数据  $(t_1, z_1), (t_2, z_2), \dots, (t_m, z_m)$  代入上式中,可得  $m$  个方程。如果  $m < n$ , 即方程数少于未知参数的数目,则方程有无穷多解,不能唯一确定  $a_0, \dots, a_n$  的值。如果  $m = n$  时,方程数正好等于未知参数的数目,能唯一确定  $a_0, \dots, a_n$  的值。这种情况下,  $f(t)$  曲线一定要通过每个测量点  $(t_i, z_i)$ 。由于在每次测量中,不可避免地含有随机测量误差,如果  $f(t)$  曲线通过每一点,则曲线将包含这些测量误差,反而不能真实地表达  $z$  与  $t$  之间的关系。因此我们并不要求找到  $f(t)$  曲线通过的每个测量点。

当  $m > n$ , 而且  $m$  比  $n$  大得多,即方程数大于未知数的数目时,不能通过解方程的办法来确定  $a_0, \dots, a_n$  的值。通常是先确定函数  $f(t)$  的类型,然后将问题归结为如何合理地选择  $a_0, \dots, a_n$ , 使得  $f(t)$  在一定意义下比较准确地反映出  $z$  与  $t$  之间的关系。通常情况下,采用最

小二乘法来选择这些参数。最小二乘法是数学家高斯在 1794 年提出来的,并利用该方法在 1801 年和 1802 分别预测了谷神星和智神星两个小行星的轨道<sup>[36~38]</sup>。

在系统辨识和参数估计领域中,最广泛的估计方法是最小二乘法和极大似然估计法。最小二乘法作为一种最基本的估计方法应用极为广泛,其他的大多数估计算法都与最小二乘法有关。它既可用于动态系统,也可用于静态系统;可用于线性系统,也可用于非线性系统;可用于离线估计,也可用于在线估计。在随机环境下利用最小二乘法时,无须知道观测数据的概率统计信息,而这种方法获得的结果,却有相当好的统计性质。

## 3.1 最小二乘参数辨识方法

### 3.1.1 基本原理

为说明最小二乘法的一般原理,先举一个实例:通过实验确定一个热敏电阻的电阻  $R$  和温度  $t$  的关系,为此在不同的温度  $t$  下,对电阻  $R$  进行多次测量获得了一组测量数据  $(t_i, R_i)$ 。由于每次测量中,不可避免地含有随机测量误差,因此想寻找一个函数  $R=f(t)$  来真实地表达电阻  $R$  和温度  $t$  之间的关系。

按照先验知识可得热敏电阻与温度之间的数学模型的结构近似为

$$R = a + bt \quad (3.1)$$

式中,  $a$  和  $b$  为待估参数。

如果测量没有误差,只需要两个不同温度下的电阻值,便可以解出  $a$  和  $b$ 。但是由于每次测量中总存在随机误差,即

$$y_i = R_i + v_i \quad \text{或} \quad y_i = a + bt_i + v_i \quad (3.2)$$

式中,  $y_i$  为测量数据;  $R_i$  为真值;  $v_i$  为随机误差。

显然,将每次测量误差相加,可构成总误差

$$\sum_{i=1}^N v_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_N \quad (3.3)$$

如何使测量的总误差最小,选择不同的评判准则会获得不同的方法,当采用每次测量误差的平方和最小时,即

$$J_{\min} = \sum_{i=1}^N v_i^2 = \sum_{i=1}^N [R_i - (a + bt_i)]^2 \quad (3.4)$$

由于上式中的平方运算又称为“二乘”,而且又是按照  $J$  最小来估计  $a$  和  $b$  的,称这种估计方法为最小二乘估计算法,简称最小二乘法。

### 3.1.2 利用最小二乘法求取模型参数

在式(3.4)中,若使得  $J$  最小,利用求极值的方法得

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial J}{\partial a} \right|_{a=a} = -2 \sum_{i=1}^N (R_i - a - bt_i) = 0 \\ \left. \frac{\partial J}{\partial b} \right|_{b=b} = -2 \sum_{i=1}^N (R_i - a - bt_i)t_i = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

对式(3.5)进一步整理,  $a$  和  $b$  的估计值可由下列方程确定



$$\begin{cases} N\hat{a} + \hat{b} \sum_{i=1}^N t_i = \sum_{i=1}^N R_i \\ \hat{a} \sum_{i=1}^N t_i + \hat{b} \sum_{i=1}^N t_i^2 = \sum_{i=1}^N R_i t_i \end{cases} \quad (3.6)$$

解方程组(3.6),可得

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^N R_i \sum_{i=1}^N t_i^2 - \sum_{i=1}^N R_i t_i \sum_{i=1}^N t_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - (\sum_{i=1}^N t_i)^2} \\ \hat{b} = \frac{N \sum_{i=1}^N R_i t_i - \sum_{i=1}^N R_i \sum_{i=1}^N t_i}{N \sum_{i=1}^N t_i^2 - (\sum_{i=1}^N t_i)^2} \end{cases} \quad (3.7)$$

### 3.1.3 仿真实例 热敏电阻和温度关系的最小二乘参数求解

表 3-1 中是在不同温度下测量同一热敏电阻的阻值,根据测量值确定该电阻的数学模型,并求出当温度在 70℃时的电阻值。

表 3-1 热敏电阻的测量值

$t(^\circ\text{C})$	20.5	26	32.7	40	51	61	73	80	88	95.7
$R(\Omega)$	765	790	826	850	873	910	942	980	1010	1032

采用 MATLAB 仿真语言编程,程序见 chap3\_1.m。程序运行结果如下:

(1) 以横坐标为温度,纵坐标为电阻值,通过描点的方法建立温度和电阻值的关系,如图 3-2 所示。

(2) 通过对图 3-2 进行分析,温度和电阻值之间的关系基本为正比关系,因此建立热敏电阻温度和电阻值之间的关系模型为

$$R = a + bt$$

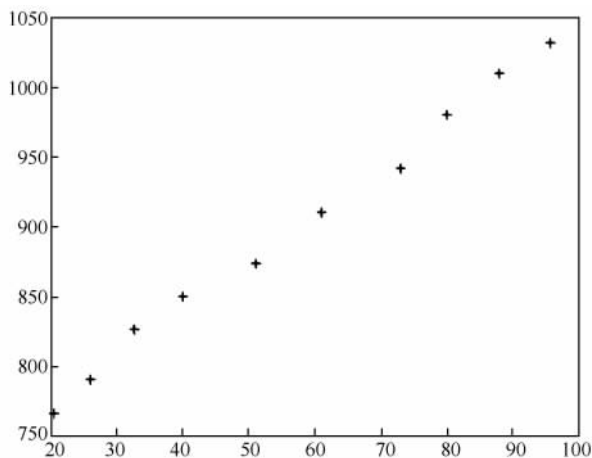


图 3-2 热敏电阻的阻值和温度间的关系

(3) 利用式(3.7)和表 3-1 中的数据可得  $a=702.762, \hat{b}=3.4344$ , 因此该热敏电阻值和温度间的数学模型为

$$R=702.762+3.4344t$$

该关系式与测量值之间的关系如图 3-3 所示。

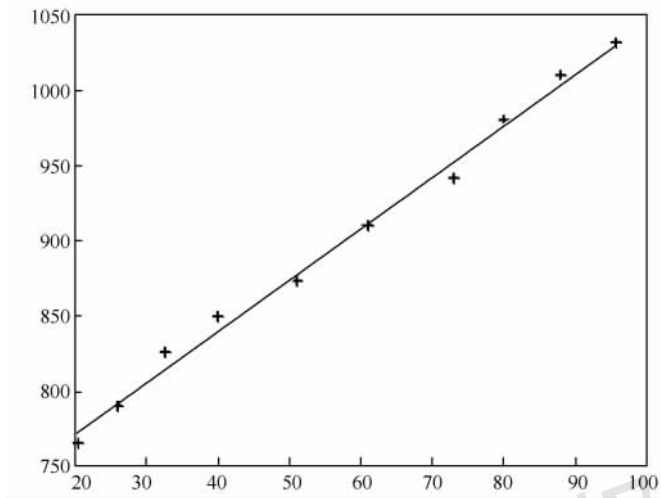


图 3-3 热敏电阻的数学关系式与其测量值之间的关系

(4) 将  $t=70^{\circ}\text{C}$  代入到上式, 可得  $R=943.168\Omega$ 。

热敏电阻和温度关系的最小二乘参数求解仿真程序: chap3\_1.m

```
clear all
close all
clc
T=[20.5 26.32.7 40 51 61 73 80 88 95.7];% 温度
R=[765 790 826 850 873 910 942 980 1010 1032];% 阻值
[m,n]= size(T);
figure
plot(T,R,'b+ ')
t= 0;
z= 0;
tz= 0;
tt= 0;
for i= 1:n
    t= t+ T(i);
    tt= tt+ T(i)* T(i);
    z= z+ R(i);
    tz= tz+ T(i)* R(i);
end
a= (tt* z- t* tz)/(n* tt- t* t);
b= (n* tz- t* z)/(n* tt- t* t);
R1= a+ 70* b;
% 最小二乘拟合
A= polyfit(T,R,1);
z= polyval(A,T);
% 画图
```

```

figure
plot(T,z);
figure
plot(T,R,'b+ ');
hold on
plot(T,z,'r');
hold off

```

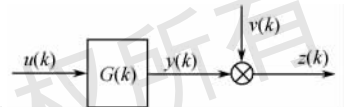
## 3.2 加权最小二乘算法

### 3.2.1 一般最小二乘算法的分析与设计

考虑随机模型的参数估计问题,首先考虑单输入单输出系统(Single Input Single Output, SISO)。如图 3-4 所示,将待辨识的系统看成“灰箱”,它只考虑系统的输入、输出特性,而不强调系统的内部结构。图 3-4 中,输入  $u(k)$  和输出  $z(k)$  是可以测量的; $G(k)$  是系统模型,用来描述系统的输入、输出特性; $v(k)$  是测量噪声。

对于 SISO 随机系统,被辨识模型  $G(z)$  为

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}} \quad (3.8)$$



其相应的差分方程为

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) \quad (3.9)$$

图 3-4 SISO 系统的“灰箱”结构

若考虑被辨识系统或观测信息中含有噪声,被辨识模型式(3.9)可改写为

$$z(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + v(k) \quad (3.10)$$

式中, $z(k)$  为系统输出量的第  $k$  次观测值; $y(k)$  为系统输出量的第  $k$  次真值, $y(k-1)$  为系统输出量的第  $k-1$  次真值, $y(k-1)$  为系统输出量的第  $k-1$  次真值,以此类推; $u(k)$  为系统的第  $k$  个输入值, $u(k-1)$  为系统的第  $k-1$  个输入值; $v(k)$  是均值为 0 的随机噪声。

如果定义

$$\mathbf{h}(k) = [-y(k-1), -y(k-2), \cdots, -y(k-n), u(k-1), u(k-2), \cdots, u(k-n)]$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$$

则式(3.10)可改写为

$$z(k) = \mathbf{h}(k)\boldsymbol{\theta} + v(k) \quad (3.11)$$

式中, $\boldsymbol{\theta}$  为待估参数。

令  $k=1, 2, \cdots, m$ , 则有

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \vdots \\ z(m) \end{bmatrix}, \mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & \cdots & -y(1-n) & u(0) & \cdots & u(1-n) \\ -y(1) & \cdots & -y(2-n) & u(1) & \cdots & u(2-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(m-1) & \cdots & -y(m-n) & u(m-1) & \cdots & u(m-n) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n]^T, \mathbf{V}_m = [v(1) \quad v(2) \quad \cdots \quad v(m)]^T$$

于是,式(3.11)的矩阵形式为

$$\mathbf{Z}_m = \mathbf{H}_m \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_m \quad (3.12)$$

最小二乘法的思想就是寻找一个  $\theta$  的估计值  $\hat{\theta}$ , 使得各次测量的  $Z_i (i=1, \dots, m)$  与由估计  $\hat{\theta}$  确定的测量估计  $\hat{Z}_i = H_i \hat{\theta}$  之差的平方和最小, 即

$$J(\hat{\theta}) = (Z_m - H_m \hat{\theta})^T (Z_m - H_m \hat{\theta}) = \min \quad (3.13)$$

要使上式达到最小, 根据极值定理, 则有

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2H_m^T (Z_m - H_m \hat{\theta}) = 0 \quad (3.14)$$

对式(3.14)进一步整理, 得

$$H_m^T H_m \hat{\theta} = H_m^T Z_m \quad (3.15)$$

如果  $H_m$  的行数大于等于列数, 即  $m \geq 2n$ ,  $H_m^T H_m$  满秩, 即  $\text{rank}(H_m^T H_m) = 2n$ , 则  $(H_m^T H_m)^{-1}$  存在。则  $\theta$  的最小二乘估计为

$$\hat{\theta} = (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T Z_m \quad (3.16)$$

式(3.16)说明, 最小二乘估计虽然不能满足式(3.12)中的每个方程, 使每个方程都有偏差, 但它使所有方程偏差的平方和达到最小, 兼顾了所有方程的近似程度, 使整体误差达到最小, 这对抑制测量误差  $v(i) (i=1, \dots, m)$  是有益的。

对于式(3.12),  $Z_m$  可以看成  $m$  维空间中基向量  $\{h(1), h(2), \dots, h(m)\}$  的线性组合,  $H_m \hat{\theta}$  是在最小二乘意义下对  $Z_m$  的近似,  $H_m \hat{\theta}$  应该等于  $Z_m$  在  $\{h(1), h(2), \dots, h(m)\}$  所张成空间内的投影, 以二维空间为例, 最小二乘的几何解释原理图如图 3-5 所示。平面  $\pi$  由其空间基底向量  $h(1)$  和  $h(2)$  张成,  $Z_2$  的估计值  $H_2 \hat{\theta}$  一定位于由  $h(1)$  和  $h(2)$  张成的平面  $\pi$  内, 为使  $\hat{V} = Z_2 - H_2 \hat{\theta}$  达到最小,  $H_2 \hat{\theta}$  必须等于  $Z_2$  在由  $h(1)$  和  $h(2)$  张成平面  $\pi$  上的投影。

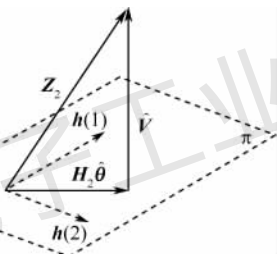


图 3-5 最小二乘的几何解释

当系统的测量噪声  $V_m$  是均值为 0、方差为  $R$  的随机向量时, 则最小二乘估计有如下性质。

(1) 最小二乘估计是无偏估计(无偏性)

由于  $\hat{\theta}$  是随机变量, 故用不同的样本可以得到不同的估计值。如果参数估计的数学期望等于参数的真值, 则称估计是无偏的, 即

$$E(\hat{\theta}) = \theta \text{ 或 } E(\tilde{\theta}) = 0 \quad (3.17)$$

式中,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  为  $\hat{\theta}$  的估计误差。否则称为有偏估计量。

根据  $\hat{\theta}$  的估计误差

$$\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} = \theta - (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T Z_m$$

由于  $E(V_m) = 0$ , 所以

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}) &= E[(H_m^T H_m)^{-1} (H_m^T H_m) \theta - (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T Z_m] \\ &= (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T E(H_m \theta - Z_m) \\ &= -(H_m^T H_m)^{-1} H_m^T E(V_m) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

估计量无偏性意味着不论观测次数多少, 估计值在被估计参数真值附近摆动, 而其数学期望值等于参数的真值。

(2) 最小二乘估计是有效估计(有效性)

有效性是检验参数估计量  $\hat{\theta}$  对被估计量  $\theta$  的方差是否为最小, 如果是最小就称该估计量  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的有效估计。因此, 有效估计就是具有最小方差的估计。也可以说, 有效估计量是估计值对真实值的平均偏离大小, 即估计值围绕真实值摆动幅度的大小。

在估计值的均值等于其真值的条件下, 方差越小, 估计越准确。设  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  都是  $\theta$  的无偏

估计,如果  $\hat{\theta}_1$  的估计方差  $\sigma_1^2$  比  $\hat{\theta}_2$  的估计方差  $\sigma_2^2$  小,则称  $\hat{\theta}_1$  比  $\hat{\theta}_2$  更有效。

对于固定的观测次数  $m$ ,根据式(3.18),估计的均方误差为

$$E(\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T) = (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T E(V_m V_m^T) H_m (H_m^T H_m)^{-1} = (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T R H_m (H_m^T H_m)^{-1} \quad (3.19)$$

如果  $V_m = \{v(1), v(2), \dots, v(m)\}$  中的观测噪声  $v(i) (i=1, 2, \dots, m)$  是同分布、零均值、独立随机变量,且其方差为  $\sigma^2$  (实际情况基本符合此规律),则有

$$R = E(V_m V_m^T) = \sigma^2 I \quad (3.20)$$

将式(3.20)代入式(3.19)得

$$E(\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T) = (H_m^T H_m)^{-1} H_m^T R H_m (H_m^T H_m)^{-1} = \sigma^2 (H_m^T H_m)^{-1} \quad (3.21)$$

式(3.21)为估计均方误差中的最小量,因此对于固定的观测次数  $m$ ,最小方差估计量的估计为有效估计。

(3) 最小二乘估计是一致估计(一致性)

对于参数估计,总希望观测次数越多时,获得的估计  $\hat{\theta}$  应该越准确。如果随着观测次数  $m$  的增加,  $\hat{\theta}_m$  依概率收敛于真值  $\theta$ ,则称  $\hat{\theta}_m$  为  $\theta$  的一致估计。即对于任意大于零的  $\epsilon$ ,如果满足

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p(|\hat{\theta}_m - \theta| > \epsilon) = 0 \quad (3.22)$$

则称  $\hat{\theta}_m$  为  $\theta$  的一致估计。

随着观测次数  $m$  的增加时,观测数据的个数大于待辨识参数的个数时,最小二乘估计  $\hat{\theta}_m$  依概率收敛于真值  $\theta$ ,等价于随着  $m \rightarrow \infty$  时,  $E(\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T) \rightarrow 0$ ,即

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma^2 (H_m^T H_m)^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{m} \left( \frac{1}{m} H_m^T H_m \right)^{-1} = 0 \quad (3.23)$$

在白色噪声干扰下,最小二乘估计是无偏的、有效的和一致的。在很多情况下,噪声干扰近似为白噪声特性,因此最小二乘估计是比较好的参数估计方法。在实际工程中,如果噪声不是白噪声,我们可以通过对噪声进行建模,并将噪声的模型参数一起进行辨识,即增广最小二乘辨识方法,使噪声的残余量满足白噪声的特性,使最小二乘参数辨识依然满足是无偏的、有效的和一致的。

**【例 3.1】**用两台仪器对未知量  $\theta$  各直接测量一次,测量量分别为  $z_1$  和  $z_2$ ,仪器的测量误差均值为 0,方差分别为  $r$  和  $4r$  的随机量,求  $\theta$  的最小二乘估计,并计算估计的均方误差<sup>[39]</sup>。

解:由题意得测量方程

$$Z_2 = H_2 \theta + V_2$$

$$\text{式中, } Z_2 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 4r \end{bmatrix}.$$

根据式(3.16)和式(3.19),得

$$\hat{\theta} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (z_1 + z_2)$$

$$E(\tilde{\theta}\tilde{\theta}^T) = \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 4r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{5r}{4} > r$$

通过例 3.1 的结果可以说明,使用精度差 4 倍的仪器同时进行测量,最小二乘估计的效果还不如只使用一台精度高的仪器时好。

### 3.2.2 加权最小二乘法的分析与设计

从例 3.1 中可以看出,一般最小二乘法估计精度不高的原因之一是对测量数据同等看待,

不分优劣地使用了测量数据。事实上,由于各次测量数据很难在相同的条件(如时刻、环境及测量系统精度等)下取得,因此各次测量的数据对于参数估计而言必然存在有的测量值置信度高,有的测量值置信度低的问题。如果对不同测量值的置信度有所了解,则可采用加权的办法分别对待各测量值。测量值置信度高的,权重取得大些;置信度低的,权重取得小些。这就是加权最小二乘的概念。

根据一般最小二乘估计  $\hat{\theta}$  的准则式(3.13),可得加权最小二乘的准则为

$$J(\hat{\theta}) = (Z_m - H_m \hat{\theta})^T W_m (Z_m - H_m \hat{\theta}) = \min \quad (3.24)$$

式中,  $W_m$  为加权矩阵,它是一个对称正定矩阵,通常取为对角阵,即

$$W_m = \text{diag}[\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(m)] \quad (3.25)$$

根据极值原理,要使式(3.24)成立,  $\hat{\theta}$  应满足

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}} = -2H_m^T W_m (Z_m - H_m \hat{\theta}) = 0 \quad (3.26)$$

对式(3.26)进一步整理,可得  $\theta$  的加权最小二乘估计为

$$\hat{\theta} = (H_m^T W_m H_m)^{-1} H_m^T W_m Z_m \quad (3.27)$$

当系统的测量噪声  $v_m$  是均值为 0、方差为  $R$  的随机向量时,加权最小二乘估计依然是无偏的、有效的和一致的,而且加权最小二乘估计的估计误差为

$$E(\hat{\theta}\hat{\theta}^T) = (H_m^T W_m H_m)^{-1} H_m^T W_m R W_m H_m (H_m^T W_m H_m)^{-1} \quad (3.28)$$

如果  $W_m = R^{-1}$ ,则加权最小二乘估计式(3.27)变为

$$\hat{\theta} = (H_m^T R^{-1} H_m)^{-1} H_m^T R^{-1} Z_m \quad (3.29)$$

又称为马尔可夫估计。

马尔可夫估计的均方误差为

$$E(\hat{\theta}\hat{\theta}^T) = (H_m^T R^{-1} H_m)^{-1} \quad (3.30)$$

马尔可夫估计的均方误差比任何其他加权最小二乘估计的均方误差都小,所以是加权最小二乘估计中的最优者。下面证明这一结论。

设  $A$  和  $B$  分别为  $n \times m$  和  $m \times p$  维矩阵,且  $AA^T$  满秩,则有

$$\begin{aligned} & [B - A^T(AA^T)^{-1}AB]^T [B - A^T(AA^T)^{-1}AB] \\ &= BB^T - 2B^T A^T (AA^T)^{-1} AB + B^T A^T (AA^T)^{-1} AA^T (AA^T)^{-1} AB \\ &= BB^T - B^T A^T (AA^T)^{-1} AB \geq 0 \end{aligned}$$

所以有

$$BB^T \geq (AB)^T (AA^T)^{-1} AB \quad (3.31)$$

式(3.31)为矩阵形式的施瓦尔茨不等式。

由矩阵理论知,正定矩阵  $R$  可表示成  $R = C^T C$ ,其中  $C$  为满秩矩阵。因此令

$$A = H_m^T C^{-1} \quad (3.32)$$

$$B = C W_m H_m (H_m^T W_m H_m)^{-1} \quad (3.33)$$

将式(3.32)和式(3.33)代入式(3.31),整理得

$$(H_m^T W_m H_m)^{-1} H_m^T W_m R W_m H_m (H_m^T W_m H_m)^{-1} \geq (H_m^T R^{-1} H_m)^{-1}$$

上式说明,只有当  $W_m = R^{-1}$  时,估计的均方误差才能达到最小,最小值为  $(H_m^T R^{-1} H_m)^{-1}$ 。因此,在加权最小二乘估计中,马尔可夫估计是最有效的估计。

**【例 3.2】**对例 3.1 采用加权最小二乘估计,权阵  $W_m = R^{-1}$ ,并计算估计的均方误差<sup>[39]</sup>。

解:根据题意取

$$\mathbf{W}_m = \mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{4}{5} z_1 + \frac{1}{5} z_2$$

$$E(\hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}}^T) = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 4r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{4r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \frac{4r}{5} \ll r$$

上式说明,对精度高的测量值取权重系数为 $\frac{4}{5}$ ,精度测量低的取权重系数为 $\frac{1}{5}$ ,估计精度高于仅用精度高的仪器测量所得的估计精度。所以,增加不同的测量值,并根据其精度的置信度区别对待利用,能有效提高估计的精度。

### 3.2.3 仿真实例

用一般最小二乘法对以下数学模型进行参数辨识

$$z(k) + a_1 z(k-1) + a_2 z(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + V(k)$$

式中,理想的系数值 $a_1=1.5$ 、 $a_2=0.7$ 、 $b_1=1.0$ 和 $b_2=0.5$ ;  $V(k)$ 是服从 $N(0,1)$ 的随机噪声;输入 $u(k)$ 采用4阶M序列,其幅值为5;权阵 $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}$ 。

解:由于输入信号为4阶M序列,所以M序列的循环长度为 $L=2^4-1=15$ 。因此设输入信号的取值为从 $k=1$ 到 $k=16$ 的M序列,于是可得

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} z(3) \\ z(4) \\ \vdots \\ z(16) \end{bmatrix}, \mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} h(3) \\ h(4) \\ \vdots \\ h(16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z(2) & -z(1) & u(2) & u(1) \\ -z(3) & -z(2) & u(3) & u(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z(15) & -z(14) & u(15) & u(14) \end{bmatrix}, \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

其流程图如图3-6所示,输入信号如图3-7所示。

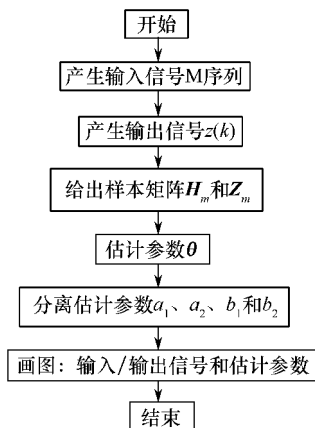


图3-6 一般最小二乘参数辨识方法流程图

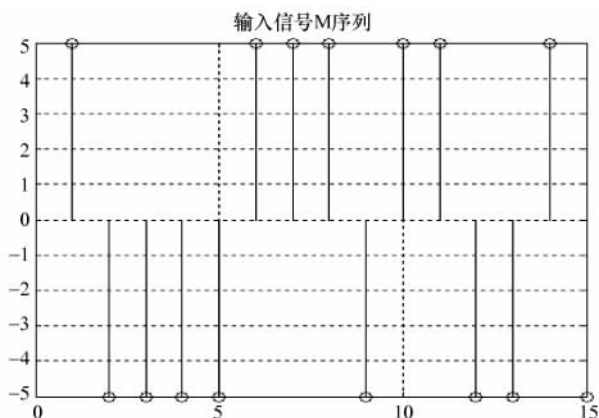


图3-7 输入信号为幅值为5的4阶M序列

MATLAB 程序见 chap3\_2.m, 仿真结果表明, 根据式(3.16)可一次计算出  $\hat{\theta}$  的结果, 输出信号如图 3-8 所示, 辨识参数如表 3-2 所示。



作用下的输出信号

表 3-2 一般最小二乘算法的辨识参数

参数	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
真值	1.5	0.7	1.0	0.5
估计值	1.496	0.697	0.966	0.482

一般最小二乘算法的辨识参数仿真程序: chap3\_2.m

```

clear all
close all
clc
randn('seed',100)
v=randn(1,16); % 产生一组 16 个 N(0,1) 的高斯分布的随机噪声
% M 序列产生程序
L=15;% M 序列的周期
y1=1;y2=1;y3=1;y4=0;% 四个移位寄存器的输出初始值
for i=1:L;
    x1=xor(y3,y4);
x2=y1;
x3=y2;
    x4=y3;
    y(i)=y4;
    if y(i) > 0.5, u(i)=-5;
    else u(i)=5;
    end
    y1=x1;y2=x2;y3=x3;y4=x4;
end
figure
stem(u),grid on
title('输入信号 M 序列')
% 最小二乘辨识程序
z=zeros(1,16); % 定义输出观测值的长度
for k=3:16
    z(k)=-1.5* z(k-1)-0.7* z(k-2)+u(k-1)+0.5* u(k-2)+1* v(k); % 观测值
end
figure(2)
plot([1:16],z)
title('输出观测值')
figure(3)
stem(z),grid on
title('输出观测值 z 的经线图形')
% 给样本系数矩阵
H=[-z(2) -z(1) u(2) u(1);-z(3) -z(2) u(3) u(2);-z(4) -z(3) u(4) u(3);-z(5) -z(4)
u(5) u(4);-z(6) -z(5) u(6) u(5);-z(7) -z(6) u(7) u(6);-z(8) -z(7) u(8) u(7);-z(9) -
z(8) u(9) u(8);-z(10) -z(9) u(10) u(9);-z(11) -z(10) u(11) u(10);-z(12) -z(11) u(12)

```



```

u(11);-z(13)-z(12) u(13) u(12);-z(14)-z(13) u(14) u(13);-z(15)-z(14) u(15) u(14)];
% 给出样本观测矩阵
Z=[z(3);z(4);z(5);z(6);z(7);z(8);z(9);z(10);z(11);z(12);z(13);z(14);z(15);z(16)]
% 计算参数
c=inv(H'*H)*H'*Z;
% 分离参数
a1=c(1), a2=c(2), b1=c(3), b2=c(4)

```

### 3.3 递推最小二乘算法

当获得一批数据后,利用式(3.16)或式(3.27)可一次求得相应的参数估值,这样处理问题的方法称为一次完成算法或批处理算法。它在理论研究方面有许多方便之处,但当矩阵的维数增加时,矩阵求逆运算的计算量会急剧增加,将给计算机的计算速度和存储量带来负担,而且不适合在线辨识,无法跟踪参数随时间变化的情况。为了减少计算量,减少数据在计算机中所占的存储量,也为了实时地辨识出动态系统的特性,在用最小二乘法进行参数估计时,把它转化成参数递推的估计。

#### 3.3.1 递推最小二乘算法的基本原理

参数递推估计是指对被辨识的系统,每取得一次新的测量数据后,就在前一次估计结果的基础上,利用新引入的测量数据对前一次估计的结果进行修正,从而递推地得出新的参数估值。这样,随着新测量数据的引入,一次接一次地进行参数估计,直到估计值达到满意的精确程度为止。最小二乘递推算法的基本思想可以概括为:

当前估计值  $\hat{\theta}(k)$  = 上次估计值  $\hat{\theta}(k-1)$  + 修正项

即新的估计值  $\hat{\theta}(k)$ 是在旧的估计值  $\hat{\theta}(k-1)$ 的基础上,利用新的观测数据对旧的估计值进行修正而成的。

#### 3.3.2 递推最小二乘算法的分析与设计

为简单起见,这里以图 3-4 所示的 SISO 系统为辨识对象。

根据式(3.27),利用  $m$  次测量数据所得到的最小二乘估值为

$$\hat{\theta}_m = (\mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m)^{-1} \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Z}_m$$

当新获得一对输入、输出数据时,根据式(3.11)可得

$$z(m+1) = h(m+1)\theta + v(m+1)$$

根据式(3.12)可进一步获得

$$\mathbf{Z}_{m+1} = \mathbf{H}_{m+1} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{V}_{m+1} \quad (3.34)$$

式中

$$\mathbf{Z}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m \\ z(m+1) \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ h(m+1) \end{bmatrix}, \mathbf{V}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_m \\ v(m+1) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

同理,根据式(3.27),有

$$\hat{\theta}_{m+1} = (\mathbf{H}_{m+1}^T \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{H}_{m+1})^{-1} \mathbf{H}_{m+1}^T \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{Z}_{m+1} \quad (3.36)$$

式中,  $\mathbf{W}_{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_m & 0 \\ 0 & \omega(m+1) \end{bmatrix}$ 。

设

$$\mathbf{P}_m = [\mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m]^{-1} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{P}_{m+1} = [\mathbf{H}_{m+1}^T \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{H}_{m+1}]^{-1} \quad (3.38)$$

则有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \mathbf{P}_m \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Z}_m \quad (3.39)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} = \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{H}_{m+1}^T \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{Z}_{m+1} \quad (3.40)$$

将式(3.35)代入式(3.40),得

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} &= \mathbf{P}_{m+1} [\mathbf{H}_m^T \quad \mathbf{h}^T(m+1)] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_m & 0 \\ 0 & \omega(m+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_m \\ z(m+1) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Z}_m + \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) z(m+1) \end{aligned} \quad (3.41)$$

由于式(3.39)可写为

$$\mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Z}_m = \mathbf{P}_m^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \quad (3.42)$$

则式(3.41)可写为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} = \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{P}_m^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) z(m+1) \quad (3.43)$$

将式(3.35)代入式(3.38),得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{m+1} &= ([\mathbf{H}_m^T \quad \mathbf{h}^T(m+1)] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_m & 0 \\ 0 & \omega(m+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_m \\ h(m+1) \end{bmatrix})^{-1} \\ &= [\mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m + \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) \mathbf{h}(m+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (3.44)$$

将式(3.37)代入式(3.44),得

$$\mathbf{P}_{m+1} = [\mathbf{P}_m^{-1} + \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) \mathbf{h}(m+1)]^{-1} \quad (3.45)$$

根据矩阵求逆公式 $(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{DA}^{-1}$ ,式(3.45)可变为

$$\mathbf{P}_{m+1} = \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [\omega^{-1}(m+1) + \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1} \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \quad (3.46)$$

对式(3.45)两边同求逆,可得

$$\mathbf{P}_m^{-1} = \mathbf{P}_{m+1}^{-1} - \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) \mathbf{h}(m+1) \quad (3.47)$$

将式(3.47)代入式(3.43),得

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} &= \mathbf{P}_{m+1} [\mathbf{P}_{m+1}^{-1} - \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) \mathbf{h}(m+1)] \hat{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) z(m+1) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) \mathbf{h}(m+1) \hat{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) z(m+1) \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1) [z(m+1) - \mathbf{h}(m+1) \hat{\boldsymbol{\theta}}_m] \end{aligned} \quad (3.48)$$

令 $\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{P}_{m+1} \mathbf{h}^T(m+1) \omega(m+1)$ 为增益矩阵,并将式(3.46)代入,整理得

$$\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [\omega^{-1}(m+1) + \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1} \quad (3.49)$$

综合式(3.46)、式(3.48)和式(3.49)得到加权最小二乘估计的递推算算法为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_m + \mathbf{K}_{m+1} [z(m+1) - \mathbf{h}(m+1) \hat{\boldsymbol{\theta}}_m]$$

$$\mathbf{P}_{m+1} = \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [\omega^{-1}(m+1) + \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1} \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m$$

$$\mathbf{K}_{m+1} = \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [\omega^{-1}(m+1) + \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1}$$

递推最小二乘算法式(3.48)具有明显的物理意义: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ 为前一时刻的参数估值; $\mathbf{h}(m+1) \hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ 是在以前测量的基础上对本次测量值的预测; $z(m+1)$ 是当前时刻的测量值,而 $z(m+1) - \mathbf{h}(m+1) \hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ 为预测误差,又称为新息。由于预测误差实际上是前一时刻估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ 与实际参数的偏差形成的,因此当前参数的估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1}$ 必须根据预测误差对前一时刻估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_m$ 进行修正来获得,修正的增益矩阵为 $\mathbf{K}_{m+1}$ 。递推最小二乘算法根据前次测量数据得到的 $\mathbf{P}_m$ 及新

的测量数据,可以计算出增益矩阵  $K_{m+1}$ ,从而由  $\hat{\theta}_m$  递推算出  $\hat{\theta}_{m+1}$ ,同时可计算出下一次递推计算所需的  $P_{m+1}$ 。在每次递推计算中,信息变换情况如图 3-9 所示。

图 3-9 表明,递推计算的初始值至关重要,初始值应从  $\hat{\theta}_0$  和  $P_0$  开始,而  $\hat{\theta}_0$  和  $P_0$  的取值有两种选择方式。

(1) 根据一批数据,利用批处理算法(一般的最小二乘法)获得

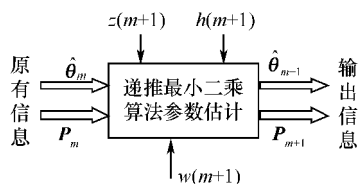


图 3-9 递推最小二乘法的信息变换

取前  $m$  组数据,采用式(3.27)获得

$$\hat{\theta}_m = (H_m^T W_m H_m)^{-1} H_m^T W_m Z_m$$

$$P_m = [H_m^T W_m H_m]^{-1}$$

然后从  $m+1$  组数据向后递推,为了减少计算量, $m$  的取值不宜太大。

(2) 任意假设  $\hat{\theta}_0$  和  $P_0$ ,通过递推算法进行迭代

为方便起见,取  $\hat{\theta}_0 = 0, P_0 = \alpha I, \alpha$  为正实数。随着递推的进行,初始值  $\hat{\theta}_0$  和  $P_0$  对估计结果的影响越来越小。在实际应用中, $\alpha$  也不宜取得太大。

当递推最小二乘算法的参数估计达到一定精度时,可以自动停止递推运算,可选用如下的停机准则

$$\max_{\forall i} \left| \frac{\hat{\theta}_i(m+1) - \hat{\theta}_i(m)}{\hat{\theta}_i(m)} \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ 为适当小的数}$$

### 3.3.3 仿真实例

用递推最小二乘法对以下数学模型进行参数辨识

$$z(k) + a_1 z(k-1) + a_2 z(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + V(k)$$

式中,理想的系数值  $a_1 = 1.5, a_2 = 0.7, b_1 = 1.0$  和  $b_2 = 0.5; V(k)$  是服从  $N(0, 1)$  的随机噪声;输入  $u(k)$  采用 4 阶 M 序列,其幅值为 5;权阵  $W_m = I$ 。

图 3-10 采用递推最小二乘参数辨识的程序流程图,仿真程序见 chap3\_3.m。

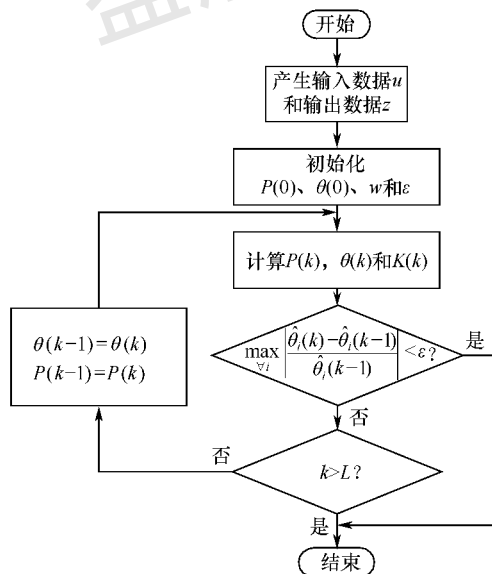


图 3-10 递推最小二乘参数辨识的流程图

辨识结果和估计精度分别如图 3-11 和图 3-12 所示,辨识的参数如表 3-3 所示。

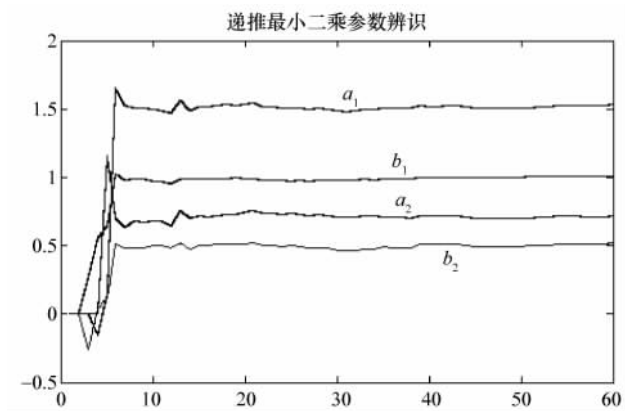


图 3-11 采用递推最小二乘的参数辨识结果

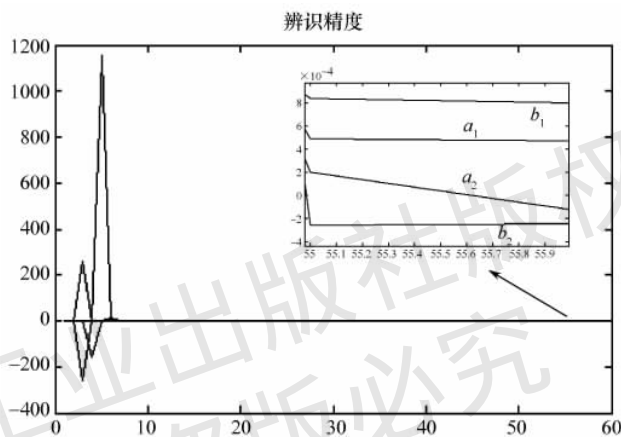


图 3-12 采用递推最小二乘的参数辨识精度

表 3-3 递推最小二乘算法的辨识参数

参数	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
真值	1.5	0.7	1.0	0.5
估计值(第 20 次迭代)	1.570	0.767	1.018	0.549
估计值(第 40 次迭代)	1.514	0.717	1.017	0.499

递推最小二乘算法辨识仿真程序:chap3\_3.m

```
clear all
close all
clc
% 产生 N(0,1) 正态分布的随机噪声
randn('seed',100);
v=randn(1,60);

% 产生 M 序列
L=60;% M 序列的周期
y1=1;y2=1;y3=1;y4=0;% 四个移位寄存器的输出初始值
```

```

for i=1:L;
x1=xor(y3,y4);
x2=y1;
    x3=y2;
    x4=y3;
    y(i)=y4;
    if y(i)> 0.5,u(i)= - 5;% M序列的幅值为 5
    else u(i)=5;
    end
    y1=x1;y2=x2;y3=x3;y4=x4;
end
figure(1);
stem(u),grid on
% 递推最小二乘辨识程序
z(2)= 0;z(1)= 0;
% 观测值由理想输出值加噪声
for k= 3:60;% 循环变量从 3 到 15
    z(k)=-1.5* z(k-1)-0.7* z(k-2)+u(k-1)+0.5* u(k-2)+0.5* v(k);
end
% RLS 递推最小二乘辨识
c0=[0.001 0.001 0.001 0.001]';
p0=10^3* eye(4,4);
E=0.000000005;% 相对误差
c=[c0,zeros(4,59)];% 被辨识参数矩阵的初始值及大小
e=zeros(4,60);% 相对误差的初始值及大小
lamt=1;
for k=3:60;
    h1=[-z(k-1),-z(k-2),u(k-1),u(k-2)]';
    k1=p0* h1* inv(h1'* p0* h1+1* lamt);% 求出 k 的值
    new=z(k)-h1'* c0;
    c1=c0+k1* new;% 求被辨识参数 c
    p1=1/lamt* (eye(4)-k1* h1')* p0;
    e1=(c1-c0)./c0;% 求参数当前值与上一次的值的差值
    e(:,k)=e1;% 把当前相对变化的列向量加入误差矩阵的最后一列
    c(:,k)=c1;% 把辨识参数 c 列向量加入辨识参数矩阵的最后一列
    c0=c1;% 新获得的参数作为下一次递推的旧参数
    p0=p1;
    if norm(e1)<=E
        break;% 若参数收敛满足要求,终止计算
    end
end
% 分离参数
a1=c(1,:); a2=c(2,:); b1=c(3,:); b2=c(4,:);
ea1=e(1,:); ea2=e(2,:); eb1=e(3,:); eb2=e(4,:);
figure(2);
i=1:60;
plot(i,a1,'k',i,a2,'b',i,b1,'r',i,b2,'g') % 画出辨识结果
legend('a1','a2','b1','b2');
title('递推最小二乘参数辨识')
figure(3);

```

```

i=1:60;
plot(i,ea1,'k',i,ea2,'b',i,eb1,'r',i,eb2,'g') % 画出辨识结果的收敛情况
legend('a1','a2','b1','b2');
title('辨识精度')

```

### 3.3.4 时不变系统的递推最小二乘参数辨识方法

对  $\forall m, \omega(m)$  可以在  $(0, 1]$  范围内选择, 如果  $\omega(m) < 1$ , 则表示削弱过去的观测数据的作用。当  $\omega(m) = 1$ , 所有采样数据都是等同的权值, 也就是说新老数据对于参数估计提供同等重要的信息, 此时加权最小二乘估计递推参数算法转化为一般的最小二乘参数估计递推算法, 即式(3.46)、式(3.48)和式(3.49)变为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{m+1} &= \hat{\theta}_m + \mathbf{K}_{m+1} [z(m+1) - \mathbf{h}(m+1)\hat{\theta}_m] \\ \mathbf{P}_{m+1} &= \mathbf{P}_m - \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [1 + \mathbf{h}(m+1)\mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1} \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \\ \mathbf{K}_{m+1} &= \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [1 + \mathbf{h}(m+1)\mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1} \end{aligned}$$

对于一般的最小二乘递推算法, 理论上随着观测数据的增加, 其参数估计值的精度越来越精确, 但是在实际中往往会出现估计误差越来越大的现象。这是因为增益矩阵  $\mathbf{K}_{m+1}$  表示修正程度,  $\mathbf{K}_{m+1}$  越大, 修正效果越好。但由于最小二乘估计是无偏的、有效的和一致的估计, 随着观测数据的增加,  $P(m)$  和  $K(m)$  逐渐减小, 直至趋于 0。这时新的观测数据对参数估计量的修正作用消失, 出现所谓的“数据饱和”现象。数据饱和后, 由于递推计算的舍入误差, 不仅新的观测值对参数估计不起修正作用, 反而使  $P(m)$  失去正定性, 导致估计误差增加。

对于一般的最小二乘递推算法, 由于新老数据对于参数估计提供同等重要的信息, 而且容易出现数据饱和现象, 只能适用于时不变系统的参数辨识。对于估计期间参数随时间的推移而缓慢变化(时变系统)时, 无法反映出参数时变的特点, 从而使估计结果产生错误。

### 3.3.5 时变系统的递推最小二乘参数辨识方法

当系统参数随时间变化时, 因新数据被旧数据所淹没, 递推算法无法直接使用。为适应时变参数的变化情况, 修改旧数据的权重(降低), 增加新数据。实现上述要求的途径主要有数据窗法和 Kalman 滤波法, 其中数据窗法主要有矩形窗和指数窗。

#### 1. 矩形窗法

矩形窗法的特点是在时刻  $k$  的估计只依靠近  $k$  时刻的有限个数据, 此前的数据全部被剔除掉, 如图 3-13 所示。图 3-13 表示长度为  $m$  的矩形窗, 每个时刻增加一个新数据, 就要剔除一个旧数据, 保持数据窗内的数据数目始终为  $m$ 。

在  $k = i + m$  时刻, 获得新观测数据  $z(i + m)$ , 于是根据一般递推最小二乘公式有

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{i+m,i} &= \hat{\theta}_{i+m-1,i} + \mathbf{K}_{i+m,i} [z(i+m) - \mathbf{h}(i+m)\hat{\theta}_{i+m-1,i}] \\ \mathbf{P}_{i+m,i} &= \mathbf{P}_{i+m-1,i} - \mathbf{P}_{i+m-1,i} \mathbf{h}^T(i+m) [1 + \mathbf{h}(i+m)\mathbf{P}_{i+m-1,i} \mathbf{h}^T(i+m)]^{-1} \\ &\quad \mathbf{h}(i+m) \mathbf{P}_{i+m-1,i} \\ \mathbf{K}_{i+m,i} &= \mathbf{P}_{i+m-1,i} \mathbf{h}^T(i+m) [1 + \mathbf{h}(i+m)\mathbf{P}_{i+m-1,i} \mathbf{h}^T(i+m)]^{-1} \end{aligned}$$

式中,  $\hat{\theta}_{i+m,i}$  表示利用  $i$  至  $i + m$  之间的观测数据  $z(k)$  ( $k = i, \dots, i + m$ ) 所得的  $\theta$  估计值;  $\mathbf{P}_{i+m,i}$  和  $\mathbf{K}_{i+m,i}$  的含义类似。

为了保持数据窗长度为  $m$ , 剔除  $i$  时刻的观测值  $z(i)$ , 则相应的递推公式变为

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{i+m,i+1} &= \hat{\theta}_{i+m,i} + \mathbf{K}_{i+m,i+1} [z(i) - \mathbf{h}(i)\hat{\theta}_{i+m,i}] \\ \mathbf{P}_{i+m,i+1} &= \mathbf{P}_{i+m,i} - \mathbf{P}_{i+m,i} \mathbf{h}^T(i) [1 + \mathbf{h}(i)\mathbf{P}_{i+m,i} \mathbf{h}^T(i)]^{-1} \mathbf{h}(i) \mathbf{P}_{i+m,i} \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{i+m,i+1} = \mathbf{P}_{i+m,1} \mathbf{h}^T(i) [1 + \mathbf{h}(i) \mathbf{P}_{i+m,i} \mathbf{h}^T(i)]^{-1}$$

## 2. 指数窗法

对于加权递推最小二乘估计, 当取  $\tau_{\omega}(k) = \lambda^{m-k}$  ( $\lambda < 1$  的正数) 时, 相当于应用带指数权的误差函数 (如图 3-14 所示), 即

$$J(\hat{\theta}) = \sum_{k=n+1}^m \lambda^{m-k} (z(k) - h(k)\hat{\theta})^T (z(k) - h(k)\hat{\theta}) = \min \quad (3.50)$$

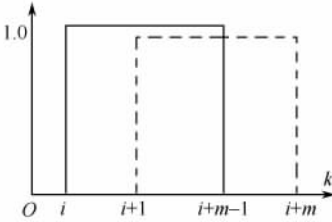


图 3-13 矩形窗

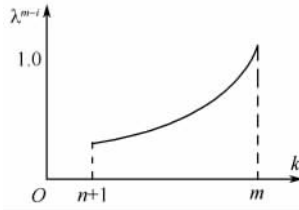


图 3-14 指数窗

这种误差目标函数是利用对过去数据加指数权来人为地强调当前数据的作用, 这种权函数的作用相当于给平方误差加一个一阶滤波器, 或者说对以前的测量数据加上一个遗忘因子, 以逐渐降低旧数据提供的信息量, 增大新数据提供的信息量, 又称这种方法为渐消记忆最小二乘方法。

通过对式(3.50)取极小便可以得到带指数窗的参数估计实时算法

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{m+1} &= \hat{\theta}_m + \mathbf{K}_{m+1} [z(m+1) - \mathbf{h}(m+1)\hat{\theta}_m] \\ \mathbf{K}_{m+1} &= \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1) [\lambda \mathbf{I} + \mathbf{h}(m+1) \mathbf{P}_m \mathbf{h}^T(m+1)]^{-1} \\ \mathbf{P}_{m+1} &= \frac{1}{\lambda} [\mathbf{I} - \mathbf{K}_{m+1} \mathbf{h}(m+1)]^{-1} \mathbf{P}_m \end{aligned}$$

对于渐消记忆最小二乘递推算法, 一般取  $0 < \lambda < 1$ 。  $\lambda$  取得越小, 意味着旧数据对参数估计的影响降低, 新数据影响加大, 算法能很好地跟踪时变参数。但是,  $\lambda$  越小, 噪声干扰影响越大, 估计误差的方差越大。究竟  $\lambda$  取多少合适, 需视具体被辨识对象并根据经验选定, 常常通过实验来选择, 一般取  $0.9 < \lambda < 0.99$ 。

## 3.4 递推阻尼最小二乘算法

### 3.4.1 递推阻尼最小二乘算法的基本原理

在模型参数辨识的过程中, 常用方法是上述的递推最小二乘法, 但最小二乘法也存在一些缺点, 如随着协方差矩阵的减小, 参数易产生爆发现象; 参数向量和协方差矩阵初始值选择不当会使辨识过程在收敛之前结束等。为防止辨识参数产生爆发现象, 在最小二乘参数辨识的目标函数中增加一个对参数变化量的阻尼项, 来增加算法的稳定性, 因此称该算法为递推阻尼最小二乘法。

在式(3.24)的基础上加入阻尼项, 则得递推阻尼最小二乘法的目标函数为

$$J = [(Y_m - \mathbf{H}_m \hat{\theta}_m)^T \mathbf{W}_m (Y_m - \mathbf{H}_m \hat{\theta}_m)] + \mu [\hat{\theta}_m - \hat{\theta}_{m-1}]^T [\hat{\theta}_m - \hat{\theta}_{m-1}] \quad (3.51)$$

式中,  $J$  为递推阻尼最小二乘估计的目标函数;  $\mathbf{T}$  为矩阵的转置;  $\mu$  ( $\mu > 0$ ) 为阻尼因子。  $\mu$  的大小描述了自变量增量与目标函数  $J$  取极小时的相对重要性。即如果模型的线性程度较大, 那么对于很小的  $\mu$  就能使  $\hat{\theta}$  对  $\theta$  有较好的修正; 反之, 必需较大的  $\mu$ , 才能保证  $\hat{\theta}$  对  $\theta$  有较好的修

正。当  $\mu=0$  时,递推阻尼最小二乘法就变成一般递推最小二乘法。

### 3.4.2 递推阻尼最小二乘算法的分析与设计

为简便起见,这里以图 3-4 所示的 SISO 系统为辨识对象,于是被辨识模型的差分方程为

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + v(k) \quad (3.52)$$

式中,  $y(k)$  为系统输出量的第  $k$  次观测值,  $y(k-1)$  为系统输出量的第  $k-1$  次观测值,以此类推;  $u(k)$  为系统的第  $k$  个输入值,  $u(k-1)$  为系统的第  $k-1$  个输入值;  $v(k)$  是均值为 0 的随机噪声。

将式(3.52)写成向量的形式

$$y(k) = \mathbf{h}(k)\boldsymbol{\theta} + v(k) \quad (3.53)$$

式中,  $\mathbf{h}(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad \cdots \quad -y(k-n) \quad u(k-1) \quad \cdots \quad u(k-n)]$  为系数矩阵;  $\boldsymbol{\theta} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T$  为待估的模型参数。

令  $k=1, 2, \dots, m$ , 则有

$$\mathbf{Y}_m = \mathbf{H}_m \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{e}_m \quad (3.54)$$

$$\mathbf{Y}_m = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{m-1} \\ y_m \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{H}_m = \begin{bmatrix} -y(0) & \cdots & -y(1-n) & u(0) & \cdots & u(1-n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(m-1) & \cdots & -y(m-n) & u(m-1) & \cdots & u(m-n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{m-1} \\ \mathbf{h}_m \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{W}_m = \text{diag}(\lambda^{m-1} \quad \lambda^{m-2} \quad \cdots \quad \lambda^0) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{m-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{V}_m = [v(1) \quad \cdots \quad v(m)]^T \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{m-1} \\ v_m \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

根据极值原理,要使式(3.51)成立,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  应满足

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -2\mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m (\mathbf{Y}_m - \mathbf{H}_m \hat{\boldsymbol{\theta}}_m) + 2\mu [\hat{\boldsymbol{\theta}}_m - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1}] = 0 \quad (3.59)$$

对式(3.59)整理可得

$$[\mu \mathbf{I} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m] \hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \mu \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Y}_m \quad (3.60)$$

由于  $\mu \mathbf{I} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m$  可逆,所以式(3.60)存在唯一解,为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = [\mu \mathbf{I} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m]^{-1} [\mu \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Y}_m] \quad (3.61)$$

令

$$\mathbf{P}_{m-1}^{-1} = \mu \mathbf{I} + \mathbf{H}_{m-1}^T \mathbf{W}_{m-1} \mathbf{H}_{m-1} \quad (3.62)$$

则有

$$\mathbf{P}_m = [\mu \mathbf{I} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{H}_m]^{-1} \quad (3.63)$$

将式(3.63)代入式(3.61),有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \mathbf{P}_m [\mu \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} + \mathbf{H}_m^T \mathbf{W}_m \mathbf{Y}_m] \quad (3.64)$$

进而有



$$\mathbf{H}_{m-1}^T \mathbf{W}_{m-1} \mathbf{Y}_{m-1} = \mathbf{P}_{m-1}^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} - \mu \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-2} \quad (3.65)$$

将式(3.55)至式(3.57)代入式(3.63),得

$$\mathbf{P}_m^{-1} = \mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{H}_{m-1}^T \mathbf{W}_{m-1} \mathbf{H}_{m-1} + \mathbf{h}_m^T \mathbf{h}_m \quad (3.66)$$

对式(3.66)进一步整理,且两边同时加上  $\mu \mathbf{I}$ ,得

$$\mathbf{H}_{m-1}^T \mathbf{W}_{m-1} \mathbf{H}_{m-1} + \mu \mathbf{I} = \mu \mathbf{I} + \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}_m^{-1} - \mu \mathbf{I} - \mathbf{h}_m^T \mathbf{h}_m] \quad (3.67)$$

比较式(3.62)和式(3.67),得

$$\mathbf{P}_{m-1}^{-1} = \mu \mathbf{I} + \frac{1}{\lambda} [\mathbf{P}_m^{-1} - \mu \mathbf{I} - \mathbf{h}_m^T \mathbf{h}_m] \quad (3.68)$$

将式(3.55)至式(3.57)代入式(3.64),得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \mathbf{P}_m [\mu \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} + \lambda \mathbf{H}_{m-1}^T \mathbf{W}_{m-1} \mathbf{H}_{m-1} + \mathbf{h}_m^T \mathbf{y}_m] \quad (3.69)$$

将式(3.65)和式(3.68)代入式(3.69),得

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} + \lambda \mu \mathbf{P}_m [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-2}] + \mathbf{P}_m \mathbf{h}_m^T [\mathbf{y}_m - \mathbf{h}_m \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1}] \quad (3.70)$$

综合式(3.68)和式(3.70),递推阻尼最小二乘法的公式为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_m = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} + \lambda \mu \mathbf{P}_m [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-2}] + \mathbf{P}_m \mathbf{h}_m^T [\mathbf{y}_m - \mathbf{h}_m \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1}]$$

$$\mathbf{P}_m = [\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{H}_{m-1}^T \mathbf{W}_{m-1} \mathbf{H}_{m-1} + \mathbf{h}_m^T \mathbf{h}_m]^{-1}$$

递推阻尼最小二乘法式(3.70)具有明显的物理意义: $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1}$ 为前一时刻的参数估值; $\mathbf{y}_m - \mathbf{h}_m \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1}$ 为预测误差,是前一时刻估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1}$ 与实际参数的偏差形成的,又称为新息; $\mathbf{P}_m \mathbf{h}_m^T$ 是修正偏差的系数,称为增益矩阵; $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-1} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m-2}$ 是前两个时刻估计值的偏差; $\lambda, \mu, \mathbf{P}_m$ 是估计值偏差的系数,由阻尼系数、遗忘因子和估计误差的协方差构成。

### 3.4.3 仿真实例

用递推阻尼最小二乘法对以下数学模型进行参数辨识

$$z(k) + a_1 z(k-1) + a_2 z(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + V(k)$$

式中,理想的系数值  $a_1 = 1.6, a_2 = -0.7, b_1 = 1.0$  和  $b_2 = 0.5$ ;  $V(k)$  是服从  $N(0, 1)$  的随机噪声;输入  $u(k)$  是服从  $N(0, 1)$  的随机噪声。在辨识过程中,递推阻尼最小二乘法选  $\lambda = 0.95, \mu = 0.95$ 。

利用递推阻尼最小二乘法进行辨识,其 MATLAB 仿真程序见 chap3\_4.m。其输入、输出及辨识结果分别如图 3-15、图 3-16 和图 3-17 所示,辨识的参数如表 3-4 所示。

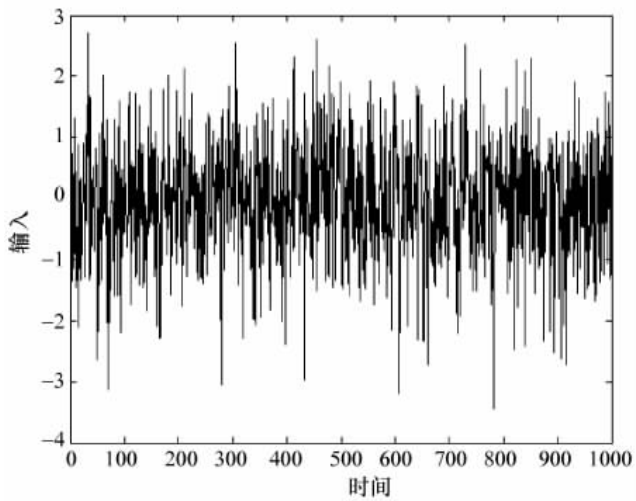


图 3-15 输入信号  $u(k)$

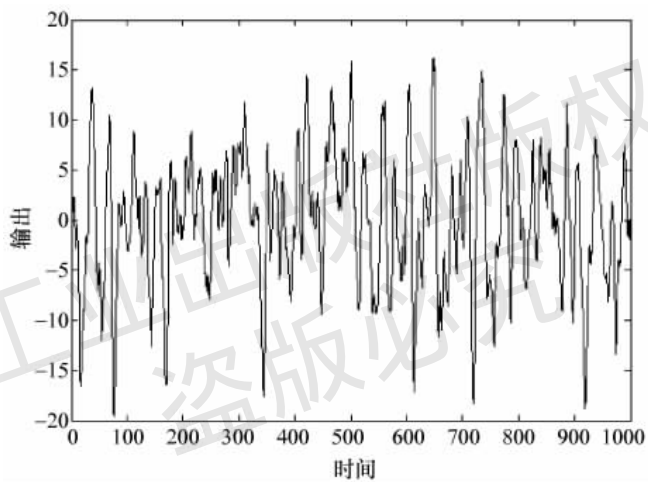


图 3-16 输出信号  $y(k)$

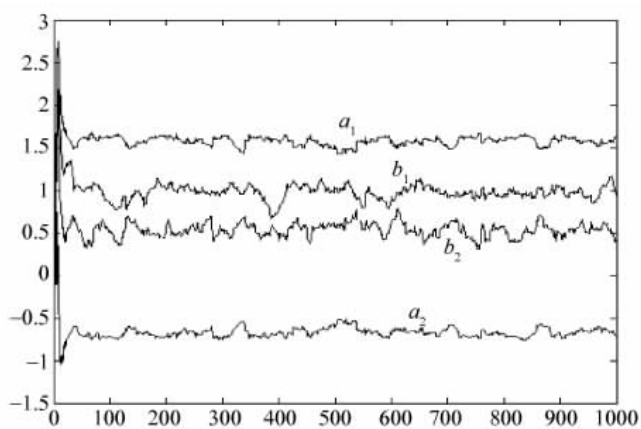


图 3-17 递推阻尼最小二乘法的辨识结果