第1章　光的电磁理论

1.1　学习目的和要求

1. 了解积分和微分形式的麦克斯韦方程组、物质方程。
2. 掌握光的电磁波表达形式和电磁场的复振幅描述。
3. 理解光强的概念,掌握相对光强的计算。
4. 掌握光在介质界面上的反射、折射和全反射。熟悉用菲涅耳公式计算反射或透射光波的振幅、强度和能流,理解半波损失。
5. 掌握布儒斯特定律。
6. 了解光的吸收、色散和散射现象及经典理论。

1.2　基本概念和基本公式

1. 麦克斯韦方程组

光是一种电磁波。

麦克斯韦方程组:

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.1}$$

2. 波动方程

光波在各向同性介质中传播的波动方程:

$$\begin{cases} \nabla^2\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \\ \nabla^2\boldsymbol{B}-\dfrac{1}{\boldsymbol{v}^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

3. 光速

$$\boldsymbol{v}=1/\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{1.3}$$

其中,ε 和 μ 分别是介质的介电常数和磁导率。

真空中光速为　$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=2.99794\times10^8\,\mathrm{m/s}\approx3\times10^8\,\mathrm{m/s}$

介质的绝对折射率为　$$n=\frac{c}{\boldsymbol{v}}=\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}=\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}} \tag{1.4}$$

其中,ε_{r} 和 μ_{r} 分别是介质的相对介电常数和相对磁导率。对大部分透明光学介质,$\mu_{\mathrm{r}}\approx1$,

$n=\sqrt{\varepsilon_r}$。介质的折射率是光波频率的函数。

4. 波长

真空中可见光的波长范围为 390 ~ 780nm，平均波长为 550nm，对应的频率范围为 $3.84\times10^{14}\sim7.69\times10^{14}$ Hz。正常视力的人眼对波长为 555nm 的绿色光最为敏感。

5. 光矢量

由于光波对物质的磁场作用远比电场作用弱，所以讨论光场振动性质时通常只考虑电矢量 $\boldsymbol{E}$，也称为光矢量。

6. 单色平面波表达式

复数形式：
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t-\phi_0)] \tag{1.5}$$

复振幅：
$$\tilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{A}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot r) \tag{1.6}$$

波函数也可用三角函数表示。例如，沿 z 轴传播的平面波为
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-vt)-\phi_0\right] \tag{1.7}$$

或
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\cos(kz-\omega t-\phi_0) \tag{1.8}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 是常矢量，表示单色光波电场的振幅。光波圆波数 k、频率 ν、周期 T、波速 $\boldsymbol{v}$ 及波长 λ 之间的关系为
$$k=2\pi/\lambda \quad \nu=1/T=v/\lambda \quad \omega=2\pi\nu \quad \lambda=\lambda_0/n \tag{1.9}$$

其中，λ_0 为光波在真空中的波长。

7. 单色球面波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})=\frac{A_1}{r}\cos(kr-\omega t) \tag{1.10}$$

复数表达形式为
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})=\frac{A_1}{r}\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t)] \tag{1.11}$$

复振幅为
$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t})=\frac{A_1}{r}\exp[\mathrm{i}kr] \tag{1.12}$$

其中，A_1 是距源点单位距离处的振幅；r 的计算起点为光波的源点。

8. 坡印廷矢量

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{1.13}$$

9. 光强、相对光强

光强：
$$I=\langle S\rangle=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}A^2\text{（平面波）} \tag{1.14}$$

相对光强：
$$I=A^2\text{（平面波）} \tag{1.15}$$

10. 折射定律（斯涅耳定律，Snell's law）

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2 \tag{1.16}$$

其中，θ_1 和 θ_2 分别是入射角和折射角。

11. 全反射

光波从光密介质射向光疏介质，发生全反射的临界角为

$$\theta_c = \arcsin n_{21} \tag{1.17}$$

其中，$n_{21}=n_2/n_1$ 为相对折射率。

全反射时，反射光中 s 波和 p 波有位相差 δ，且

$$\tan\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\delta_s - \delta_p}{2} = \frac{\cos\theta_1 \sqrt{\sin^2\theta_1 - n_{21}^2}}{\sin^2\theta_1} \tag{1.18}$$

12. 菲涅耳公式

$$\begin{cases} r_p = \dfrac{A'_{1p}}{A_{1p}} = \dfrac{n_2\cos\theta_1 - n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \dfrac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)} \\ r_s = \dfrac{A'_{1s}}{A_{1s}} = \dfrac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = -\dfrac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \\ t_p = \dfrac{A_{2p}}{A_{1p}} = \dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_2} = \dfrac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)} \\ t_s = \dfrac{A_{2s}}{A_{1s}} = \dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} = \dfrac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} \end{cases} \tag{1.19}$$

其中，r 是振幅反射率（即反射系数），如 r_s 是 s 波的振幅反射率；t 是振幅透射率（即透射系数），如 t_s 是 s 波的振幅透射率；A_1 和 A'_1分别是入射波和反射波的振幅，而 A_2 是透射波的振幅，如 A_{1s}是入射 s 波振幅，A_{2s}是透射 s 波振幅。

13. 反射率和透射率

强度反射率和透射率分别为

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_p \equiv \dfrac{I'_{1p}}{I_{1p}} = |r_p|^2 \\ \mathfrak{R}_s \equiv \dfrac{I'_{1s}}{I_{1s}} = |r_s|^2 \\ \mathcal{T}_p \equiv \dfrac{I_{2p}}{I_{1p}} = \dfrac{n_2}{n_1}|t_p|^2 \\ \mathcal{T}_s \equiv \dfrac{I_{2s}}{I_{1s}} = \dfrac{n_2}{n_1}|t_s|^2 \end{cases} \tag{1.20}$$

能流反射率和透射率（常简称为反射率和透射率）分别为

$$\begin{cases} R_p \equiv \dfrac{W'_{1p}}{W_{1p}} = \mathfrak{R}_p \\ R_s \equiv \dfrac{W'_{1s}}{W_{1s}} = \mathfrak{R}_s \\ T_p \equiv \dfrac{W_{2p}}{W_{1p}} = \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}\mathcal{T}_p \\ T_s \equiv \dfrac{W_{2s}}{W_{1s}} = \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}\mathcal{T}_s \\ R_p + T_p = 1,\ R_s + T_s = 1 \end{cases} \tag{1.21}$$

自然光入射时的反射率和透射率分别为

$$R=\mathfrak{R}=\frac{W_1'}{W_1}=\frac{1}{2}(R_p+R_s)=\frac{1}{2}(\mathfrak{R}_p+\mathfrak{R}_s)$$

$$\mathcal{T}=\frac{I_2}{I_1}=\frac{1}{2}(\mathcal{T}_p+\mathcal{T}_s) \tag{1.22}$$

$$T=\frac{W_2}{W_1}=\frac{1}{2}(T_p+T_s)=\frac{1}{2}(\mathcal{T}_p+\mathcal{T}_s)\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}=\mathcal{T}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

垂直入射时的反射率和透射率分别为

$$\begin{cases} r_p=\dfrac{n_2-n_1}{n_2+n_1}=-r_s \\ t_p=t_s=\dfrac{2n_1}{n_2+n_1} \\ R_p=R_s=\mathfrak{R}_p=\mathfrak{R}_s=\left(\dfrac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2 \\ T_p=T_s=\mathcal{T}_p=\mathcal{T}_s=\dfrac{4n_1n_2}{(n_2+n_1)^2} \end{cases} \tag{1.23}$$

14. 布儒斯特角

使振幅反射率的 p 分量等于零($r_p=0$),反射光只有 s 分量的特殊入射角称为布儒斯特角。该入射角由布儒斯特定律给出:

$$\theta_B=\arctan n_{21} \tag{1.24}$$

其中,θ_B 为布儒斯特角。这时 $\theta_1+\theta_2=90°$,即反射光出射方向与折射光出射方向垂直。

15. 斯托克斯倒逆关系

$$r^2+tt'=1,\ r'=-r \tag{1.25}$$

其中,r、t 分别是光从折射率为 n_1 的介质入射时的振幅反射率和透射率;r'、t'分别是光从折射率为 n_2 的介质入射时振幅的反射率和透射率(对 p 波、s 波均适用)。

16. 半波损失

当平面波在接近正入射或者掠入射下从光疏介质与光密介质的分界面反射时,反射光振动相对于入射光振动发生了 π 的位相跃变,即产生了半个波长的跃变。

$$\mathscr{D}'=\mathscr{D}\pm\frac{\lambda}{2}$$

其中,$\mathscr{D}$ 是表观光程差,$\mathscr{D}'$是有效光程差。

17. 光在金属中的传播

金属中电磁场的波动方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0 \tag{1.26}$$

平面波为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)] \tag{1.27}$$

若平面波沿垂直金属表面传播(如 z 轴),则式(1.27)变为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\exp[-\alpha z]\exp[\mathrm{i}(\beta z-\omega t)] \tag{1.28}$$

对于金属良导体,$\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\gg1$,则

$$\alpha \approx \beta \approx \left(\frac{\omega\mu\sigma}{2}\right)^{1/2} \tag{1.29}$$

穿透深度为 $$z_0 = 1/\alpha \tag{1.30}$$

18. 光的吸收、色散和散射

(1) 吸收

朗伯定律(或称布格尔定律):经传播距离 z 后光强减小为

$$I = I_0 \exp[-\bar{\alpha} z] \tag{1.31}$$

其中,$\bar{\alpha}$是介质的吸收系数。

比尔定律: $$I = I_0 \exp[-\beta C z] \tag{1.32}$$

式中,C 是溶液浓度,β 是比例常数。

(2) 色散

色散是指一种光在介质中传播时其折射率(速度)随频度(或波长)变化的现象。随着光的波长增加,吸收物质的折射率和色散率增大的称为反常色散。反之,随着光的波长增加,透明物质的折射率和色散率单调下降的称为正常色散。正常色散的规律由经验公式,即柯西色散公式给出:

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} \tag{1.33}$$

其中,a、b 和 c 是只与物质有关而与波长无关的常数。

(3) 散射

瑞利散射定律:

$$I \propto 1/\lambda^4 \tag{1.34}$$

1.3 常见习题分类及典型例题分析

题型一 已知单色平面波或球面波的表达式,求频率、波长、周期、振幅、相速度、传播方向及某个平面上的复振幅分布;或相反地,给出振幅、频率、波长等求波的表达式。

基本解题思路 对比波的标准表达式和各物理量的关系式(1.5)~(1.12)求之;利用麦克斯韦方程组,由给出的电场求磁场,反之亦然。

例 1.1 写出在 oyz 平面内沿与 y 轴成 θ 角的 $\boldsymbol{r}$ 方向传播的平面波的复振幅。

解 该平面波波矢的三个分量分别为

$$k_x = 0, \quad k_y = k\cos\theta, \quad k_z = k\sin\theta$$

其位相分布为 $$\phi(r) = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \phi_0 = k(y\cos\theta + z\sin\theta) - \phi_0$$

其中,ϕ_0 是原点处的初相。

设平面波振幅大小为 A,则其复振幅为

$$\tilde{E}(r) = A\exp\{\mathrm{i}[k(y\cos\theta + z\sin\theta) - \phi_0]\}$$

例 1.2 一个平面电磁波可以表示为 $E_x = 0, E_y = 2\cos\left[2\pi\times10^{14}\left(\frac{z}{c} - t\right) - \frac{\pi}{2}\right], E_z = 0$。求:

(1) 该电磁波的频率、波长、振幅和原点的初相是多少?

(2) 波的传播和电矢量的振动取哪个方向?

（3）与电场相联系的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的表达式。

解 （1）把题给条件与式(1.8)和式(1.9)比较可知：

振幅 $A=2$，频率 $\nu=\dfrac{\omega}{2\pi}=10^{14}\mathrm{Hz}$，波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=3.0\times10^{-6}\mathrm{m}$，初相 $\phi_0=\dfrac{\pi}{2}$。

（2）平面电磁波沿 z 轴正方向传播，又因 $E_x=0$，$E_z=0$，故矢量的振动取 y 轴方向。

（3）由麦克斯韦方程组(1.1)中的第三式：$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$，并考虑题设 $E_x=E_z=0$，以及 $\dfrac{\partial E_y}{\partial x}=0$，得 $B_y=B_z=0$，且

$$\frac{\partial B_x}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial z}=\frac{2\pi\times10^{14}}{c}\sin\left[2\pi\times10^{14}\left(\frac{z}{c}-t\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

对 t 积分得
$$B_x=\frac{2}{c}\cos\left[2\pi\times10^{14}\left(\frac{z}{c}-t\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

可见，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 互相正交且与波的传播方向垂直。

例 1.3 一平面简谐电磁波在真空中沿正 x 方向传播，其频率为 $4\times10^{14}\mathrm{Hz}$，电场振幅为 14.14V/m，如果该电磁波的振动面与 xy 平面呈 45°角，试写出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的表达式。

解 已知频率 $\nu=4\times10^{14}\mathrm{Hz}$，则波数

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi\nu}{c}=\frac{2\pi\times4\times10^{14}}{3\times10^8}=2.7\pi\times10^6(\mathrm{m}^{-1})$$

因波沿 x 方向传播，所以

$$E_x=0$$

$$E_z(x,t)=E_0\cos45^\circ\exp[\mathrm{i}k(x-vt)]=14.14\times\frac{\sqrt{2}}{2}\exp[\mathrm{i}2.7\times10^6\pi(x-3\times10^8t)]$$
$$=10\exp[\mathrm{i}2.7\times10^6\pi(x-3\times10^8t)]$$
$$E_y(x,t)=E_0\sin45^\circ\exp[\mathrm{i}k(x-vt)]=10\exp[\mathrm{i}2.7\times10^6\pi(x-3\times10^8t)]$$

所以
$$\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{B}$ 垂直于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{k}$，又 $|\boldsymbol{E}|=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}|\boldsymbol{B}|$，故可得

$$B_{0z}=B_{0y}=\frac{10}{3\times10^8}=3.33\times10^{-6}$$

$$B_y(x,t)=B_{0y}\exp[\mathrm{i}k(x-vt)]=3.33\times10^{-6}\exp[\mathrm{i}2.7\times10^6\pi(x-3\times10^8t)]$$
$$B_z(x,t)=B_{0z}\exp[\mathrm{i}k(x-vt)]=3.33\times10^{-6}\exp[\mathrm{i}2.7\times10^6\pi(x-3\times10^8t)]$$
$$\boldsymbol{B}=-B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$$

题型二 求反射率、透射率、反射和透射光的光强度或偏振度。

基本解题思路 利用菲涅耳公式、布儒斯特定律及全反射临界角求解。

例 1.4 试证明反射光与透射光的振幅及位相满足斯托克斯倒逆关系：$r^2+tt'=1$ 和 $r'=-r$。式中，r、t 分别是光从第一介质到第二介质的振幅反射系数和振幅透射系数，r'、t' 则是从第二介质到第一介质的相应值。

证明 设第一介质折射率为 n_1，第二介质折射率为 n_2。若振幅为 E_0 的光入射，则反射光为 rE_0，折射光为 tE_0 如图 1.1(a)所示。

若反射光与折射光以原来的振幅 rE_0 和 tE_0 逆着原来的光路传播，其反射和折射的振幅如

图 1.1(b)、(c)所示。

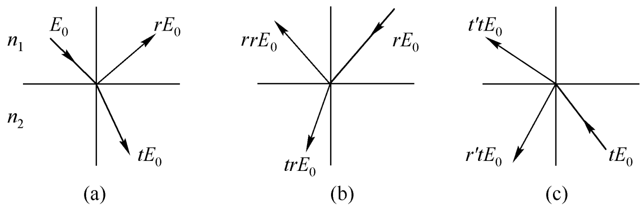

图 1.1　例 1.4 用图

根据光的可逆性原理,$r'tE_0$、trE_0 应相互抵消,$t'tE_0$、rrE_0 应合成原入射光的振幅,即

$$trE_0 + r'tE_0 = 0, rrE_0 + tt'E_0 = E_0$$

由此可得到斯托克斯倒逆关系式:

$$r' = -r, tt' + r^2 = 1$$

例 1.5　平行光以布儒斯特角从空气射到玻璃($n = 1.5$)上,求:

(1) 能流反射率 R_p 和 R_s;　(2) 能流透射率 T_p 和 T_s。

解　光以布儒斯特角入射时,反射光无 p 分量,即 $R_p = 0$。

布儒斯特角为　$\theta_1 = \theta_B = \arctan 1.5 \approx 56.3°, \theta_1 + \theta_2 = 90°$

s 分量的能流反射率为

$$R_s = |r_s|^2 = \left[\frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)}\right]^2 = \sin^2(90° - 2\theta_B) \approx 14.8\%$$

因能量守恒,故能流透射率分别为

$$T_p = 1 - R_p = 1;\quad T_s = 1 - R_s \approx 85.2\%$$

能流透射率也可以直接通过式(1.21)中的第三、第四式,以及式(1.19)和式(1.20)中的第三、第四式求出。但这种计算方法不仅繁复,而且往往因为忽视能流透射率和强度透射率的差别容易出错。因此,在不考虑介质吸收的情况下,可求出能流反射率,再利用能量守恒求能流透射率。

题型三　求解有关色散、吸收和散射的问题。

基本解题思路　利用科希色散公式求解色散问题;用朗伯定律或比尔定律解决吸收问题;用瑞利散射定律解释一些现象。

例 1.6　强度为 I_0 的光射入一段 20m 的光纤,光纤出射端的光强度的测量值为 I_1。将光纤截为 10m 长,用相同强度 I_0 的光再射入光纤,其输出的光强度的测量值为 I_2。已知 $I_2/I_1 = \exp[2]$,则光纤对光的衰减系数 $\overline{\alpha}$(m^{-1})为多大?

解　由朗伯定律 $I = I_0 \exp[-\overline{\alpha} z]$ 得

$$I_1 = I_0 \exp[-20\,\overline{\alpha}]$$

$$I_2 = I_0 \exp[-10\,\overline{\alpha}]$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \exp[10\,\overline{\alpha}] = \exp[2]$$

所以　$$\overline{\alpha} = 0.2(\mathrm{m}^{-1})$$

例 1.7　试证当媒质厚度为 1cm,吸收系数很小时,吸收率 $G = \dfrac{I_0 - I}{I_0}$ 在数值上就等于吸收

系数本身。

证明　由朗伯定律及吸收率的定义得

$$G=\frac{I_0-I}{I_0}=1-\exp[-\bar{\alpha}z]$$

按麦克劳林公式展开,得

$$G=1-\left(1-\bar{\alpha}+\frac{\bar{\alpha}^2}{2}+\cdots\right)\approx\bar{\alpha}$$

1.4　教材习题解答

1.1[①]　在真空中传播的平面电磁波,其电场表示为

$$E_x=0,\quad E_y=0,\quad E_z=(10^2\,\mathrm{V/m})\cos\left[\pi\times10^{14}\mathrm{s}^{-1}\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

求该电磁波的频率、波长、周期、振幅和初相。

解　据式(1.7),沿 z 方向振动、x 方向传播的平面波的基本表达形式为

$$E=A\cos\left[2\pi\nu\left(\frac{x}{c/n}-t\right)-\phi_0\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\nu t\right)-\phi_0\right]$$

则频率 $$\nu=\frac{\pi\times10^{14}}{2\pi}=0.5\times10^{14}(\mathrm{Hz})$$

波长 $$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{3\times10^8}{0.5\times10^{14}}=6\times10^{-6}(\mathrm{m})$$

周期 $$T=\frac{1}{\nu}=\frac{1}{0.5\times10^{14}}=2\times10^{-14}(\mathrm{s})$$

振幅 $$A_{0z}=100(\mathrm{V/m})$$

初相 $$\phi_0=\pi/2$$

1.2　一个线偏振光在玻璃中传播时可以表示为

$$E_y=0,\quad E_z=0,\quad E_x=10^2\cos\pi10^{15}\left(\frac{z}{0.65c}-t\right)$$

试求:(1)光的频率;(2)波长;(3)玻璃的折射率。

解　根据式(1.7)和式(1.9)得,沿 z 方向传播的平面波为

$$E=A\cos\left[2\pi\nu\left(\frac{z}{c/n}-t\right)\right]=A\cos\left[2\pi\left(\frac{z}{\lambda}-\nu t\right)\right]$$

把题给表达式改为 $$E_x=10^2\cos\left[2\pi\frac{10^{15}}{2}\left(\frac{z}{0.65c}-t\right)\right]$$

两式比较得:

光的频率 $$\nu=\frac{10^{15}}{2}=5\times10^{14}(\mathrm{Hz})$$

波长 $$\lambda=\frac{v}{\nu}=\frac{2\times0.65c}{10^{15}}=3.9\times10^{-7}(\mathrm{m})=390(\mathrm{nm})$$

玻璃的折射率为 $$n=\frac{1}{0.65}=1.54$$

① 此题为另加题,《物理光学》教材中习题 1.1 的解答见例 1.2。

1.3 利用波矢量 $\boldsymbol{k}$ 在直角坐标系的方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,写出平面简谐波的波函数,并且证明它是三维波动微分方程的解。

证明 平面简谐波的波函数

$$
\begin{aligned}
E(r,t) &= A\cos[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t-\phi_0]\\
&= A\cos[k_x x+k_y y+k_z z-\omega t-\phi_0]\\
&= A\cos[k(\cos\alpha x+\cos\beta y+\cos\gamma z)-\omega t-\phi_0]
\end{aligned}
$$

又因为 $\dfrac{\partial^2E}{\partial x^2}=-\cos^2\alpha\cdot k^2\cdot E$, $\dfrac{\partial^2E}{\partial y^2}=-\cos^2\beta\cdot k^2\cdot E$, $\dfrac{\partial^2E}{\partial z^2}=-\cos^2\gamma\cdot k^2\cdot E$

$$\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=-\omega^2E$$

由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, $k=2\pi/\lambda=\omega/v$,所以

$$\frac{\partial^2E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E}{\partial z^2}=-k^2E$$

而

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}=-\frac{\omega^2}{v^2}E=-k^2E$$

可见

$$\frac{\partial^2E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2E}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2E}{\partial t^2}$$

得证

1.4 一种机械波的波函数为 $y=A\cos2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda}-\dfrac{t}{T}\right)$,其中 $A=20\text{mm}$, $T=12\text{s}$, $\lambda=20\text{mm}$,试画出 $t=3\text{s}$ 时的波形曲线(从 $x=0$ 画到 $x=40\text{mm}$)。

解 按题给条件得图 1.2。

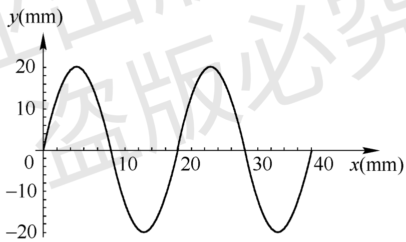

图 1.2 题 1.4 用图

1.5 在与一平行光束垂直的方向上插入一透明薄片,其厚度 $h=0.01\text{mm}$,折射率 $n=1.5$,若光波的波长 $\lambda=500\text{nm}$,试计算插入玻璃片前后光束光程和位相的变化。

解 插入玻璃片前后,光束光程的变化为

$$\mathscr{D}=(n-1)h=0.005(\text{mm})$$

位相的变化为

$$\phi_1=kz-\omega t=kz-2\pi\cdot\frac{c}{\lambda}\cdot t=\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)$$

$$\phi_2=\frac{2\pi}{\lambda/n}\left(z-\frac{c}{n}\cdot t\right)$$

则

$$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=(n-1)kz=k(n-1)h=20\pi$$

1.6 地球表面每平方米接收到来自太阳光的功率约为 1.33kW,试计算投射到地球表面的太阳光的电场强度。假设可以把太阳光看做是波长 $\lambda=600\text{nm}$ 的单色光。

解 由 $I=\dfrac{1}{2}c\varepsilon_0A^2$,得电场强度为

$$A=\sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{2\times 1.33\times 10^3}{3.0\times 10^8\times 8.8542\times 10^{-12}}}\approx 10^3(\mathrm{V/m})$$

1.7 在离无线电发射机 10km 远处飞行的一架飞机，收到功率密度为 $10\mu\mathrm{W/m^2}$ 的信号。试计算：(1) 在飞机上来自此信号的电场强度大小；(2) 相应的磁感强度大小；(3) 发射机的总功率。

假设发射机各向同性地辐射，且不考虑地球表面反射的影响。

解 (1) 由 $I=\frac{1}{2}c\varepsilon_0 A^2$ 得

$$A=\sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{2\times 10\times 10^{-6}}{3.0\times 10^8\times 8.8542\times 10^{-12}}}\approx 8.7\times 10^{-2}(\mathrm{V/m})$$

(2) $B=\frac{E}{c}=\frac{8.7\times 10^{-2}}{3\times 10^8}=2.9\times 10^{-10}(\mathrm{T})$

(3) 因发射机各向同性地辐射，所以其总功率为

$$P=4\pi R^2 I=4\pi\times(10\times 10^3)^2\times 10\times 10^{-6}=1.26\times 10^4(\mathrm{W})$$

1.8 沿空间 $\boldsymbol{k}$ 方向传播的平面波可以表示为

$$E=100\exp\{\mathrm{i}[(2x+3y+4z)-16\times 10^5 t]\}$$

试求 $\boldsymbol{k}$ 方向的单位矢 $\boldsymbol{k}_0$。

解 因为 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_x x+k_y y+k_z z=2x+3y+4z$

则 $k_x=2, k_y=3, k_z=4$，所以 $\boldsymbol{k}_0=\frac{1}{\sqrt{29}}(2\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y+4\boldsymbol{e}_z)$。

1.9 球面电磁波的电场 E 是 r 和 t 的函数，其中 r 是一定点到波源的距离，t 是时间。(1) 写出与球面波相应的波动方程的形式； (2) 求出波动方程的解。

解 据式(1.2)得，直角坐标下的波动方程为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

利用球坐标 $x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$，波动方程可化为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial E}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{\partial^2 E}{\partial\theta^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

下面求具有球对称的简单解，即要求的波函数与 θ、φ 无关

$$E(r,\theta,\varphi,t)=E(r,t)$$

因此，方程中对于 θ 和 φ 的偏导数为零。波动方程为

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E}{\partial r}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

上式可化为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rE)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

r 是独立变量，与 t 无关，因此

$$r\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial^2(rE)}{\partial t^2}$$

而波动方程变为

$$\frac{\partial^2(rE)}{\partial r^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(rE)}{\partial t^2}$$

这个方程与一维波动方程有相同的形式，而一维波动方程的通解为

$$E(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$$

但要注意，在这里空间变量是 r 而不是 x，未知函数是 $rE(r,t)$ 而不是 $E(r,t)$，因此通解是

$$rE(r,t)=f(r-vt)+g(r+vt)$$

因而对应于一个逸出波：

$$E(r,t)=\frac{f(r-vt)}{r}$$

1.10 证明柱面波的振幅与柱面波到波源的距离的平方根成反比。

证明 假设波源（柱轴）上点振动的初相为零，则距离波源（柱轴）为 r 的 P 点的位相为 $(kr-\omega t)$，振幅 A_r 为径向 r 的函数，则 P 点的电场振动为

$$E=A_r\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t)]$$

因单色柱面波沿径向传播，波矢方向沿径向 r，而由于能量守恒，单位时间内通过任一柱面的能量相等，所以距波源为单位距离的 P_1 点与距波源为 r 的 P_r 点的光强 I_1 和 I_r 的关系为

$$I_1\cdot 2\pi\cdot h=I_r\cdot 2\pi r\cdot h$$

其中，h 为柱面的高度。因此 $$\frac{I_r}{I_1}=\frac{1}{r}$$

另一方面，光强与振幅成正比： $$\frac{I_r}{I_1}=\frac{A_r^2}{A_1^2}$$

比较以上两式，得 $$A_r=A_1/\sqrt{r}$$

1.11 一束线偏振光以45°角入射到空气—玻璃界面，线偏振光的电矢量垂直于入射面。假设玻璃的折射率为1.5，试求反射系数和透射系数。

解 根据菲涅耳公式得

$$r_s=\frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{\cos\theta_1-n_{21}\cos\theta_2}{\cos\theta_1+n_{21}\cos\theta_2}$$

由斯涅耳定律 $\sin\theta_1=n_{21}\sin\theta_2$，得

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_1}{n_{21}}\right)^2}$$

所以，反射系数为

$$r_s=\frac{\cos\theta_1-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_1}}=\frac{\cos 45°-\sqrt{1.5^2-\sin^2 45°}}{\cos 45°+\sqrt{1.5^2-\sin^2 45°}}=-0.3034$$

透射系数为

$$t_s=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1+n_{21}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_1}{n_{21}}\right)^2}}=\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_1}}=0.6966$$

1.12 假设窗玻璃的折射率为1.5，斜照的太阳光（自然光）的入射角为60°，试求太阳光的透射率。

解 $$t_s=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}=\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1+n_{21}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_1}{n_{21}}\right)^2}}=\frac{2\cos\theta_1}{\cos\theta_1+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_1}}=0.58$$

$$t_p=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}=\frac{2\cos\theta_1}{n_{21}\cos\theta_1+\cos\theta_2}=\frac{2\cos\theta_1}{n_{21}\cos\theta_1+\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta_1}{n_{21}}\right)^2}}=0.638$$

根据式(1.20)~式(1.22)

$$T=\frac{1}{2}(T_p+T_s)=\frac{1}{2}(|t_p|^2n_{21}+|t_s|^2n_{21})\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

$$=\frac{1}{2}(|t_p|^2+|t_s|^2)\frac{\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_1}}{\cos\theta_1}=83\%$$

1.13 利用菲涅耳公式证明:(1) $R_s+T_s=1$;(2) $R_p+T_p=1$。

证明 据菲涅耳公式(1.19)及式(1.20)、式(1.21),证明如下。

(1) $$R_s+T_s=r_s^2+\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t_s^2=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}$$

根据斯涅耳定律(式(1.16)),上式变为

$$R_s+T_s=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1}\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}=\frac{\sin^2(\theta_1-\theta_2)+4\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}=1$$

(2) $$R_p+T_p=r_p^2+\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}t_p^2$$

$$=\frac{\tan^2(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\ \frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan^2(\theta_1+\theta_2)}+\frac{4\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{\cos^2(\theta_1+\theta_2)\sin^2(\theta_1-\theta_2)+4\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}=1$$

1.14 光矢量垂直于入射面和平行于入射面的两束等强度的线偏振光以50°角入射到一块平行平板玻璃上,试比较两者透射光的强度。

解 设玻璃折射率 $n_2=1.5$,对应的布儒斯特角 $\theta_B\approx 56°\neq 50°$。

对于透射光,经历空气—玻璃(上表面)和玻璃—空气(下表面)两个界面:

$$t_s=t_{s1}t_{s2}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}\cdot\frac{2n_2\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_2+n_1\cos\theta_1}=0.888$$

$$\mathcal{T}_s=\frac{n_2}{n_1}|t_{s1}|^2\frac{n_1}{n_2}|t_{s2}|^2=|t_{s1}|^2|t_{s2}|^2=0.789$$

$$t_p=t_{p1}t_{p2}=\frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2}\cdot\frac{2n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_2+n_2\cos\theta_1}=0.997$$

$$\mathcal{T}_p=0.994$$

设入射光束强度均为 I_0,则两透射光的强度分别为

$$I_s=\mathcal{T}_sI_0=0.789I_0,\ I_p=\mathcal{T}_pI_0=0.994I_0$$

1.15 证明光束以布儒斯特角入射到平行平面玻璃片的上表面时,在下表面的入射角也是布儒斯特角。

证明 从图1.3可见,下表面入射角等于上表面折射角 θ_2。

又由斯涅耳定律(式(1.16))可知

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

得 $$\tan\theta_2=\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}=\frac{\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right)^2}}$$

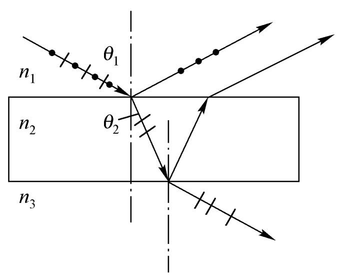

图1.3 题1.15用图

考虑上表面入射的布儒斯特角 $\tan\theta_1=\tan\theta_B=\dfrac{n_2}{n_1}$,将其代入上式得

$$\tan\theta_2=\frac{\sin\theta_1/\tan\theta_1}{\sqrt{1-(\sin\theta_1/\tan\theta_1)^2}}=\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}=\frac{n_1}{n_2}$$

与式(1.24)比较可知,θ_2 等于下表面入射的布儒斯特角。

1.16 光波在折射率分别为 n_1 和 n_2 的两介质界面上反射和折射,当入射角为 θ_1 时(折射角为 θ_2,见图 1.4(a)),s 波和 p 波的反射系数分别为 r_s 和 r_p,透射系数分别为 t_s 和 t_p。若光波反过来从 n_2 介质入射到 n_1 介质,且当入射角为 θ_2 时(折射角为 θ_1,见图 1.4(b)),s 波和 p 波的反射系数分别为 r'_s 和 r'_p,透射系数分别为 t'_s 和 t'_p。试利用菲涅耳公式证明:(1) $r_s=-r'_s$;(2) $r_p=-r'_p$;(3) $t_st'_s=T_s$;(4) $t_pt'_p=T_p$。

证 (1) 由式(1.19)的第二式得

$$r_s=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

而 $$r'_s=-\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)}=\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

所以 $r_s=-r'_s$。

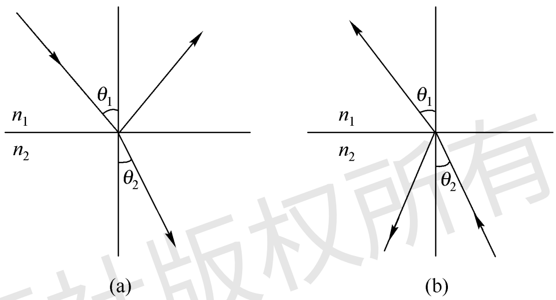

图 1.4 题 1.16 用图

(2) 由式(1.19)第一式得

$$r_p=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

$$r'_p=\frac{\tan(\theta_2-\theta_1)}{\tan(\theta_2+\theta_1)}=-\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

所以 $r_p=-r'_p$。

(3) 由式(1.19)、式(1.20)及式(1.21)得

$$t_s=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)},\quad t'_s=\frac{2\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_1)}$$

$$t_st'_s=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}\cdot\frac{2\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_1)}=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\,\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)}=T_s$$

(4) 由式(1.19)、式(1.20)及式(1.21)得

$$t_p=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)},\quad t'_p=\frac{2\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_1)\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

$$t_pt'_p=\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1}\,\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$=\frac{n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1}\,\frac{4\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1}{\sin^2(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}=T_p$$

1.17 导出光束正入射或以小角度入射到两介质界面时的反射系数和透射系数的表示式。

解 光束正入射或以小角度入射时,$\cos\theta_1\approx\cos\theta_2\approx 1$,因此:

(1) $$r_s=-\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}=-\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2}=-\frac{\sin\theta_1-\sin\theta_2}{\sin\theta_1+\sin\theta_2}$$

上式的分子分母同除以 $\sin\theta_2$,并注意到折射定律 $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=n_{21}$,则 $r_s=-\dfrac{n_{21}-1}{n_{21}+1}$。

（2）光束正入射或以小角度入射时，$\tan\theta \approx \sin\theta$，故

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}$$

（3）
$$t_s = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{2\sin\theta_2}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2} = \frac{2}{\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} + 1} = \frac{2}{n_{21} + 1}$$

（4）
$$t_p = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{2\sin\theta_2}{\sin\theta_1 + \sin\theta_2} = \frac{2}{n_{21} + 1}$$

1.18 证明当入射角 $\theta_1 = 45°$时，光波在任何两种介质界面上的反射都有 $r_p = r_s^2$。

证明 因为 $\theta_1 = 45°$，所以

$$r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{\dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2}}{\dfrac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2}} = \left(\frac{1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_2}\right)^2 = \left(\frac{\cos\theta_2 - \sin\theta_2}{\cos\theta_2 + \sin\theta_2}\right)^2$$

另一方面 $$r_s^2 = \left(-\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}\right)^2 = \left(-\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}\right)^2 = \left(\frac{\cos\theta_2 - \sin\theta_2}{\cos\theta_2 + \sin\theta_2}\right)^2$$

因此 $r_p = r_s^2$。此结论与界面两边的介质性质无关。

1.19 证明光波以布儒斯特角入射到两种介质的界面上时，$t_p = 1/n_{21}$，其中 $n_{21} = n_2/n_1$。

证明 由于入射角为布儒斯特角，即 $\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$，$\tan\theta_1 = n_{21}$，因此

$$t_p = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{2\cos\theta_1\cos\theta_1}{\cos\theta_1\sin\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_1} = \frac{1}{n_{21}}$$

1.20 光波垂直入射到玻璃—空气界面，玻璃折射率 $n = 1.5$，试计算反射系数、透射系数、反射率和透射率。

解 光波垂直入射到玻璃－空气界面，相对折射率 $n_{21} = 1/1.5$，由题 1.17 的结果可得反射系数和透射系数分别为

$$r_s = -\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} = -\frac{1/1.5 - 1}{1/1.5 + 1} = 0.2, \quad r_p = \frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1} = -0.2, \quad t_s = t_p = \frac{2}{n_{21} + 1} = 1.2$$

由式(1.23)得反射率和透射率分别为

$$R_p = R_s = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2 = 0.04, \quad T_p = T_s = \frac{4n_1n_2}{(n_2 + n_1)^2} = \frac{4 \times 1.5 \times 1}{(1 + 1.5)^2} = 0.96$$

1.21 光束垂直入射到45°直角棱镜的一个侧面，光束经斜面反射后从第二个侧面透出（见图1.5）。若入射光强度为 I_0，问从棱镜透出的光束的强度为多少？设棱镜的折射率为1.52，并且不考虑棱镜的吸收。

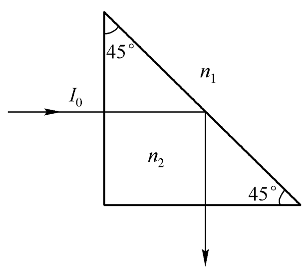

图1.5 题1.21用图

解 （1）若光束垂直入射空气－棱镜的反射率为 R_1，则光束透过第一个侧面后的强度为

$$I_1 = (1 - R_1)I_0$$

（2）从图中看出，光束在斜面的入射角为45°，对于题给的玻璃－空气，全反射的临界角

$$\sin\theta_c = n_1/n_2 = 0.66 < \sqrt{2}/2 = \sin 45°$$

因此，光束在斜面发生全反射，即反射光的光强仍为 I_1。

（3）设第二个侧面透出时的反射率为 R_2，则最后透出的光强为

$$I_2 = (1-R_2)I_1 = (1-R_1)(1-R_2)I_0$$
$$= \left[1-\left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2\right]I_0 = 0.92I_0$$

1.22　一个光学系统由两片分离的透镜组成，两片透镜的折射率分别为 1.5 和 1.7，求此系统的反射光能损失。如透镜表面镀上增透膜，使表面反射率降为 1%，则此系统的光能损失又是多少？假设光束接近于正入射通过各反射面。

解　（1）系统包括 4 个反射面，题目假设光束是接近正入射情形下通过各反射面的，因此，根据式(1.23)得各面的反射率分别为

第一界面　$R_1 = \left(\dfrac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)^2 = \left(\dfrac{1.5-1}{1.5+1}\right)^2 = 0.04$

第二界面　$R_2 = \left(\dfrac{n_{32}-1}{n_{32}+1}\right)^2 = \left(\dfrac{1/1.5-1}{1/1.5+1}\right)^2 = 0.04$

第三界面　$R_3 = \left(\dfrac{n_{43}-1}{n_{43}+1}\right)^2 = \left(\dfrac{1.7-1}{1.7+1}\right)^2 = 0.067$

第四界面　$R_4 = \left(\dfrac{n_{54}-1}{n_{54}+1}\right)^2 = \left(\dfrac{1/1.7-1}{1/1.7+1}\right)^2 = 0.067$

如果入射到系统的光能为 W，则相继透过各面的光能为

$$W_1 = (1-R_1)W = (1-0.040)W = 0.960W$$
$$W_2 = (1-R_2)W_1 = 0.960W_1 = (0.960)^2W = 0.922W$$
$$W_3 = (1-R_3)W_2 = 0.870W$$
$$W_4 = (1-R_4)W_3 = 0.757W$$

因此光能损失约为 20%。

（2）若表面反射率降为 1%，即

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 0.01$$

则

$$W_4 = (1-R_1)^4W = 0.960W$$

因而光能损失为 4%。

1.23　光束以很小的入射角射到一块平行平板上（如图 1.6 所示），试求相继从平板反射的两支光束 1′、2′和透射的两支光束 1″、2″的相对强度。设平板的折射率 $n=1.5$。

解　当光束以很小的角度入射时，由题 1.22 知，平板上表面的反射率为

$$R = \left(\frac{n_{21}-1}{n_{21}+1}\right)^2 = \left(\frac{1.5-1}{1.5+1}\right)^2 = 0.04$$

显然，把上式中的 n 和 1 对调即为光束在平板下表面的反射率，故也为 $R(=0.04)$。

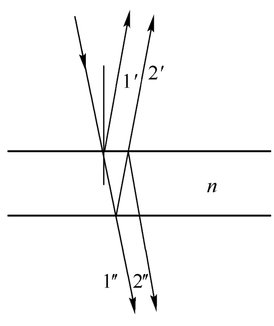

图 1.6　题 1.23 用图

设入射光强为 I，则图中第 1 支反射光束的强度为

$$I_1' = RI = 0.04I$$

第 2 支反射光束的强度为

$$I_2' = (1-R)R(1-R)I = 0.037I$$

而两支透射光束的强度分别为

$$I_1'' = (1-R)(1-R)I = (1-0.04)^2 I = 0.922I$$

$$I_2'' = (1-R)RR(1-R)I = (1-0.04)^2 0.04^2 I = 0.0015I$$

1.24 如图 1.7 所示，玻璃块周围介质（水）的折射率为 1.33。若光束射向玻璃块的入射角为 45°，问玻璃块的折射率至少应为多大才能使透入的光束发生全反射？

解 全反射临界角 θ_c 满足

$$\sin\theta_c = n_1/n$$

又，当光束以 45°入射时，由折射定律得

$$n_1\sin 45° = n\sin(90° - \theta_c)$$

两式结合解得 $\sin\theta_c = 0.816$

所以玻璃块的折射率至少应为

$$n = n_1/\sin\theta_c = 1.63$$

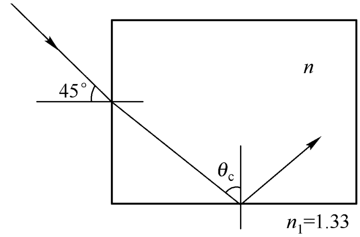

图 1.7 题 1.24 用图

1.25 线偏振光在玻璃－空气界面上发生全反射，线偏振光电矢量的振动方向与入射面成 45°角。设玻璃折射率 $n = 1.5$，问线偏振光应以多大的角度入射才能使反射光的 s 波和 p 波的位相差等于 45°。

解 由式（1.18）可知，全反射时位相差 δ 和入射角 θ 的关系为

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_1\sqrt{\sin^2\theta_1 - n_{21}^2}}{\sin^2\theta_1}$$

把上式两边平方，得到 $$\tan^2\frac{\delta}{2} = \frac{(1-\sin^2\theta_1)(\sin^2\theta_1 - n_{21}^2)}{\sin^4\theta_1}$$

整理后得 $$\left(1+\tan^2\frac{\delta}{2}\right)\sin^4\theta_1 - (n_{21}^2+1)\sin^2\theta_1 + n_{21}^2 = 0$$

将题设 $n_{21} = \frac{1}{1.5}$ 和 $\tan\frac{\delta}{2} = \tan\frac{45°}{2}$ 代入上式解得 $\theta_1 = 53°15'29''$ 或 $50°13'45''$。

1.26 线偏振光在 n_1 和 n_2 介质的界面上发生全反射，线偏振光电矢量的振动方向与入射面成 45°。证明当 $\cos\theta = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}}$ 时（θ 是入射角），反射光 s 波和 p 波的位相差有最大值。

证明 根据式（1.18），反射光 s 波和 p 波的位相差为

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\sin^2\theta}$$

δ 取最大值由满足下式的 θ 决定：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\sin^2\theta}\right) = 0$$

即 $$\frac{-\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} - 2\frac{\cos^2\theta\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\sin^3\theta} = 0$$

整理得 $$\cos\theta = \sqrt{\frac{1-n_{21}^2}{1+n_{21}^2}} = \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}}$$

1.27 图 1.8 所示是一根直圆柱形光纤，光纤纤芯的折射率为 n_1，光纤包层的折射率为 n_2，并且 $n_1 > n_2$。

（1）证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足关系式 $\sin u = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$；

（2）若 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$，则最大孔径角等于多少？

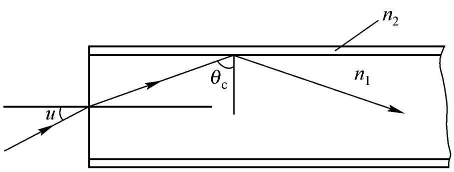

图 1.8　题 1.27 用图

解　（1）为了保证光线在光纤内的入射角大于临界角，必须使入射到光纤端面的光线限制在最大孔径角 $2u$ 范围内。在光纤端面应用折射定律：

$$\sin u=n_1\sin(90°-\theta_c)=n_1\cos\theta_c$$

而临界角 θ_c 由下式决定：

$$\sin\theta_c=n_2/n_1$$

因此　$$\sin u=n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_c}=n_1\sqrt{1-(n_2/n_1)^2}=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

（2）当 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$ 时：

$$\sin u=0.56,\quad u\approx34°$$

所以，最大孔径角为 68°。

1.28　图 1.9 所示是一根弯曲的圆柱形光纤，其纤芯和包层的折射率分别为 n_1 和 n_2（$n_1>n_2$），纤芯的直径为 D，曲率半径为 R。

（1）证明入射光的最大孔径角 $2u$ 满足关系式 $\sin u=\sqrt{n_1^2-n_2^2\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2}$。

（2）若 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$，$D=70\mu\text{m}$，$R=12\text{mm}$，则最大孔径角等于多少？

解　（1）在光纤内以临界角入射的光线与在端面以 u 角入射的光线相应，有关系式：

$$\frac{\sin\theta_c}{R}=\frac{\sin(u'+90°)}{R+\frac{D}{2}}=\frac{\cos u'}{R+\frac{D}{2}}$$

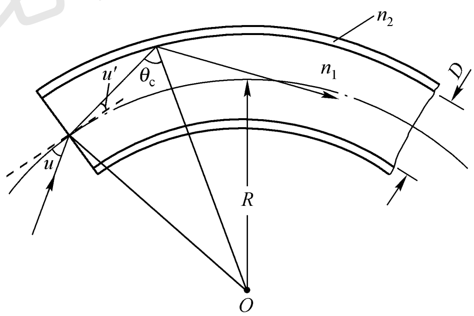

图 1.9　题 1.28 用图

因此　$$\cos u'=\left[\frac{R+\frac{D}{2}}{R}\right]\sin\theta_c=\left(1+\frac{D}{2R}\right)\sin\theta_c$$

故　$$\sin u'=\sqrt{1-\cos^2u'}=\sqrt{1-\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2\sin^2\theta_c}$$

由于 $\sin\theta_c=n_2/n_1$，故

$$\sin u'=\sqrt{1-\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

因此　$$\sin u=n_1\sin u'=n_1\sqrt{1-\left(1+\frac{D}{2R}\right)^2\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}=\sqrt{n_1^2-n_2^2\left(1+\frac{D}{2R}\right)}$$

（2）当 $n_1=1.62$，$n_2=1.52$，$D=70\mu\text{m}$，$R=12\text{mm}$ 时，

$$\sin u=\sqrt{n_1^2-n_2^2\left(1+\frac{D}{2R}\right)}=\sqrt{1.62^2-1.52^2\left(1+\frac{0.07}{24}\right)^2}=0.5483$$

$$u=33°14'$$

所以，最大孔径角为 $2u=66°28'$。

1.29 已知硅试样的相对介电常数 $\varepsilon/\varepsilon_0=12$,电导率 $\sigma=2/(\Omega\cdot\text{cm})$。证明当电磁波的频率$\nu<10^9$Hz时,硅试样将起良导体作用,并计算 $\nu=10^6$Hz 时对这种试样的穿透深度。

解 由题给条件得

$$\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}>\frac{2\times100}{12\times8.85418\times10^{-12}\times2\pi\times10^9}=299.6\gg1$$

因此,硅试样为良导体。

当 $\nu=10^6$Hz 时,试样的穿透深度为

$$z_0\approx\left(\frac{2}{\omega\mu\sigma}\right)^{1/2}=\left(\frac{2}{2\pi\times10^6\times4\pi\times10^{-7}\times2\times100}\right)^{1/2}=0.0356(\text{m})$$

1.30 试利用电磁场的边值关系证明,当平面电磁波倾斜入射到金属表面时,透入金属内的波的等相面和等幅面不互相重合。

证 设平面电磁波长真空入射,金属表面为 xOy 平面,入射面为 xOz 平面,入射角为 θ,如图 1.10 所示。

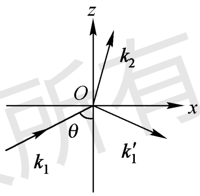

图 1.10　题 1.30 用图

由电磁场的边值关系:$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0$,可得

$$k_{1x}=k'_{1x}=k_{2x}=\frac{\omega}{c}\sin\theta,\quad k_{1y}=k'_{1y}=k_{2y}=0$$

而折射波矢为

$$\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{\beta}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}$$

即

$$k_{2x}=\beta_x+\mathrm{i}\alpha_x=\frac{\omega}{c}\sin\theta,\quad k_{2y}=\beta_y+\mathrm{i}\alpha_y=0,\quad k_{2z}=\beta_z+\mathrm{i}\alpha_z$$

可见

$$\begin{cases}\alpha_x=\alpha_y=0\\ \beta_x=\dfrac{\omega}{c}\sin\theta\end{cases}\tag{a}$$

即透射波矢 $\boldsymbol{k}_2$ 中 α 只有 z 分量,从而

$$k_2^2=k_{2x}^2+k_{2y}^2+k_{2z}^2=\left(\frac{\omega}{c}\sin\theta\right)^2+\beta_z^2-\alpha_z^2+2\mathrm{i}\beta_z\alpha_z$$

同时

$$k_2^2=(\omega\sqrt{\mu\varepsilon_2})^2=\omega^2\mu\varepsilon+\mathrm{i}\omega\mu\sigma$$

比较两式得

$$\frac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta+\beta_z^2-\alpha_z^2=\omega^2\mu\varepsilon$$

$$\beta_z\alpha_z=\frac{1}{2}\omega\mu\sigma$$

解得

$$\begin{bmatrix}\beta_z^2=\dfrac{1}{2}\left(\omega^2\mu\varepsilon-\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)+\dfrac{1}{2}\left[\left(\omega^2\mu\varepsilon-\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^2+(\omega\mu\sigma)^2\right]^{1/2}\\ \alpha_z^2=-\dfrac{1}{2}\left(\omega^2\mu\varepsilon-\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)+\dfrac{1}{2}\left[\left(\omega^2\mu\varepsilon-\dfrac{\omega^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^2+(\omega\mu\sigma)^2\right]^{1/2}\end{bmatrix}\tag{b}$$

由透射波的表达式(式(1.27))

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\exp(-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r})\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$$

得等幅面为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{r}=const$,把上述结果代入得等幅面方程为

$$\alpha_z z=const\tag{c}$$

而等相面为

$$\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t=const$$

即

$$\beta_x x+\beta_z z-\omega t=const\tag{d}$$

结合式(a)、(b),比较式(c)和式(d)得,透入金属内的波的等相面和等幅面不互相重合。

1.31 铝在 $\lambda=500\text{nm}$ 时，$n=1.5$，$n\kappa=3.2$，求正入射时的反射率和反射的位相变化。

解 正入射时反射率为

$$R=\frac{n^2+n^2\kappa^2+1-2n}{n^2+n^2\kappa^2+1+2n}=0.636$$

$$r_s=|r_s|\exp(\mathrm{i}\delta_s)=-\frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}+1}=-0.6968-0.388\mathrm{i}$$

$$r_p=|r_p|\exp(i\delta_p)=\frac{\tilde{n}-1}{\tilde{n}+1}=-\frac{n(1+i\kappa)-1}{n(1+i\kappa)+1}=0.6968+0.388\mathrm{i}$$

因此

$$\delta=\delta_s=\delta_p=29°5'$$

1.32 在正常色散区，$\tilde{n}^2\leqslant 1+\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j}{(\omega_j^2-\omega^2-\mathrm{i}\gamma_i\omega)}$ 的实部可以写为($\kappa\ll 1$)

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{f_j(\omega_j^2-\omega^2)}{(\omega_j^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma_j)^2}$$

试证明在略去 γ_j 后由上式可以得到柯西公式。

证明 略去 γ_j 后题给式子变为

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\sum_j\frac{1}{\omega_j^2}\cdot\frac{f_j}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2}$$

在正常色散区，当 $\omega\leqslant\omega_j$ 时，上式为

$$n^2=1+\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\sum\frac{f_j}{\omega_j^2}\left(1+\frac{\lambda_j^2}{\lambda^2}\right)=1+A+\frac{B}{\lambda^2}$$

其中

$$A=\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\sum\frac{f_j}{\omega_j^2},\quad B=\frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\sum\frac{f_j\lambda_j^2}{\omega_j^2}$$

1.33 冕玻璃 k9 对谱线 435.8nm 和 546.1nm 的折射率分别为 1.52626 和 1.51829，试确定柯西公式中的常数 a 和 b，并计算玻璃对波长 486.1nm 的折射率和色散率$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$。

解 把冕玻璃 k9 对两条谱线的折射率分别代入柯西公式 $n=a+\frac{b}{\lambda^2}$，得联立方程：

$$\begin{cases}1.52626=a+\dfrac{b}{435.8^2}\\[2ex]1.51829=a+\dfrac{b}{546.1^2}\end{cases}$$

解得 $a=1.5043$，$b=4.1681\times10^3\text{nm}^2$。

当 $\lambda=486.1\text{nm}$ 时，对应的折射率及色散率分别为

$$n=1.5043+\frac{4168.1}{486.1^2}=1.522$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{2b}{\lambda^3}=-\frac{2\times4168.1}{486.1^3}=-7.258\times10^{-5}(\text{nm}^{-1})$$

1.5 自 测 题

1.1 $E=E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t+kz)]$ 与 $E=E_0\exp[-\mathrm{i}(\omega t-kz)]$ 描述的是________ 传播的

光波。

A. 沿正 z 方向　　B. 沿负 z 方向

C. 分别沿正 z 和负 z 方向　　D. 分别沿负 z 和正 z 方向

1.2　玻璃折射率 $n=1.7$，当光从空气垂直入射时光强反射率 $\mathfrak{R}$ ________，光强透射率 $\mathcal{T}$ ________。

1.3　光波的能流密度 $\boldsymbol{S}$ 正比于________。

A. E 或 H　　B. E^2 或 H^2　　C. E^2，与 H 无关　　D. H^2，与 E 无关

1.4　一玻璃管长 2.5m，内装某种液体，若这种液体的吸收系数为 0.01cm^{-1}，则透射光强度的百分比为________%。

1.5　一束光由空气中以 55°的入射角进入各向同性透明介质，此时光能量没有损失。(1)这种介质的折射率为________，(2)入射的偏振态为________。

1.6　霓又称副虹，它的光谱排列方式为________。

A. 绿光位于蓝光的外侧　　B. 绿光位于红光的内侧

C. 红光位于紫光的内侧　　D. 红光位于紫光的外侧

1.7　一束光通过吸收介质传播后的光强________。

A. 与传播距离成反比　　B. 与传播距离成正比

C. 与传播距离的平方成反比　　D. 与传播距离的指数成反比

1.8　写出发散球面波和会聚球面波的复振幅。

1.9　一单色平面电磁波在自由空间沿 z 方向传播，其电矢量的振动平面在 xy 平面，电磁波的频率为 10^7Hz，振幅为 0.16V/m。(1) 求波的周期和波长；(2) 写出 $E(z,t)$ 和 $B(z,t)$ 的表达式；(3) 求振幅强度矢量的时间平均值 $<\boldsymbol{S}>$。

1.10　一平面波表示为 $\boldsymbol{E}=(-2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y)\exp[\mathrm{i}(x+\sqrt{3}y+6\times10^8t)]$，试求：(1) 波的传播方向；(2) 波的偏振方向；(3) 振幅；(4) 频率；(5) 位相速度；(6) 波长。

1.11　在一维简谐平面波函数 $E(z,t)=A\cos\omega\left(\dfrac{z}{v}-t\right)$ 中，$\dfrac{z}{v}$ 表示什么？如果把波函数写为 $E(z,t)=A\cos\left(\dfrac{\omega z}{v}-\omega t\right)$，则 $\dfrac{\omega z}{v}$ 表示什么？

1.12　频率为 6×10^{14}Hz、相速度为 3×10^8m/s 的光波，在传播方向上位相差为 $\pi/3$ 的任意两点之间的最短距离是多少？

1.13　一单色光波在真空中的波长为 0.5μm，它在折射率为 $n_2=1.5$ 的媒质中的频率是多少？速度又是多少？

1.14　光由光密媒质向光疏媒质入射时，其布儒斯特角能否大于全反射的临界角？为什么？

1.15　若白光中波长为 $\lambda_1=593$nm 的橙黄光和波长为 $\lambda_2=450$nm 的蓝光强度相等，则瑞利散射光中两者强度之比是多少？

1.16　光强为 I_0 的一束平行光通过 1m 的某气体管后，光强变为 $0.99I_0$，则该气体的吸收系数 $\bar{\alpha}$ 为多大？

1.17　在正常色散区，折射率 n 随波长 λ 的增大而如何变化？其色散率随媒质折射率 n 的减小如何变化？

1.18　天空呈现浅蓝色，而旭日和夕阳呈现红色的原因是什么？

1.19　在大风天和雾天，为了避免和对面来的车相碰，汽车必须打开雾灯。请解释为什么雾灯是橘红色的？

*1.20　光的单色性和偏振有什么关系？偏振光是否是单色光？单色光是否是偏振光？自然光可能是单色光吗？

*1.21　若线偏振光入射到两种透明媒质的界面上，则分析说明在外反射和全内反射的情况下，反射光的偏振态的变化情况。

1.22　一均匀透明各向同性固体介质和水对绿光（$\lambda=546.1\text{nm}$）的折射率完全相同，但对其他波长的折射率不尽相同，将其浸入水中。分析说明：

（1）在 $\lambda=546.1\text{nm}$ 的绿光照射下，在反射方向和透射方向将看到什么现象？

（2）在白光的照射下，在反射方向和透射方向将看到什么现象？

1.6　自测题解答

1.1　D

1.2　0.067；0.933

1.3　B

1.4　8.2

1.5　1.43；电矢量平行入射面的线偏振光（p 波）

1.6　C

1.7　D

1.8　发散球面波的复振幅 $\tilde{E}(r,t)=\dfrac{A_1}{r}\exp(\mathrm{i}kr)$

会聚球面波的复振幅 $\tilde{E}(r,t)=\dfrac{A_1}{r}\exp(-\mathrm{i}k\cdot r)$

1.9　（1）周期 $T=\dfrac{1}{\nu}=\dfrac{1}{10^7}=10^{-7}(\text{s})$；波长 $\lambda=\dfrac{c}{\nu}=\dfrac{3\times10^8}{10^7}=30(\text{m})$

（2）$E(z,t)=A\exp[\mathrm{i}(kz-\omega t)]=0.16\exp\left[\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{15}z-2\times10^7\pi t\right)\right]$

$B=\dfrac{E}{c}=\dfrac{0.16}{3\times10^8}=5.33\times10^{-6}(\text{T})$

$B(z,t)=5.33\times10^{-6}\exp\left[\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{15}z-2\times10^7\pi t\right)\right]$

（3）$\langle S\rangle=I=\dfrac{c\varepsilon_0}{2}E_0^2=\dfrac{3\times10^8\times8.85\times10^{-12}}{2}\times0.16^2=3.4\times10^{-5}(\text{W/m}^2)$

1.10　（1）传播方向 $\boldsymbol{k}=(1,\sqrt{3},0)=2\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，即与 x，y 和 z 轴的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\gamma=0$，则夹角分别为 $\alpha=60°$，$\beta=30°$，$\gamma=90°$。

（2）偏振方向 $\boldsymbol{E}_0=(-2\sqrt{3},2,0)=4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$；$\alpha=120°$，$\beta=60°$，$\gamma=90°$。

注：带＊号为选做题

（3）振幅 $A=4$

（4）频率 $\nu=\dfrac{6\times10^8}{2\pi}=9.55\times10^7(\mathrm{Hz})$

（5）位相速度 $v=\lambda\times\nu=3\times10^8(\mathrm{m/s})$

（6）波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\pi$

1.11 $\dfrac{z}{v}$表示沿 z 方向任意一点的振动落后于坐标原点（或振动源）的一个时间间隔。而$\dfrac{\omega z}{v}$表示 z 处波函数的初相，它描述位相的空间分布。

1.12 设最短距离是 l，则有$\dfrac{2\pi}{\lambda}=\dfrac{\pi/3}{l}$，将 6×10^{14} Hz 和 3×10^8 m/s 代入，得

$$l=\frac{1}{6}\lambda=\frac{1}{6}\ \frac{\nu}{v}=\frac{1}{6}\times\frac{3\times10^8}{6\times10^{14}}=8.32\times10^{-8}\mathrm{m}=83.2\mathrm{nm}$$

1.13 同一光波在不同的介质中频率是不变的。根据式（1.9），频率为

$$\nu=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\times10^8}{0.5\times10^{-6}}=6\times10^{14}(\mathrm{Hz})$$

而速度则为 $v=\dfrac{c}{n_2}=\dfrac{3\times10^8}{1.5}=2\times10^8(\mathrm{m/s})$

1.14 光密媒质入射光疏媒质时：

全反射的临界角 θ_c：$\sin\theta_c=\dfrac{n_2}{n_1}$，布儒斯特角 θ_B：$\tan\theta_B=\dfrac{n_2}{n_1}$，则有

$$\sin\theta_B=\frac{n_2}{n_1}\left(1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right)^{-1/2}=\sin\theta_c/\sqrt{1+\sin^2\theta_c}$$

可见，$\sin\theta_B<\sin\theta_c$，因而 θ_B 不可能大于 θ_c。

从另一角度看，若布儒斯特角可以大于全反射的临界角，则当自然光以布儒斯特角入射时，只有全反射的 S 波，没有折射光，也没有 P 波，因此，违反了能量守恒定律。可见 θ_B 不可能大于 θ_c。

1.15 根据瑞利散射定律式（1.34）得 $I\propto\dfrac{1}{\lambda^4}$，所以两者强度之比为

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}=\frac{450^4}{593^4}=0.33$$

1.16 根据朗伯定律，经传播距离 l 后光强减小为

$$I=I_0\exp(-\bar{\alpha}l)$$

因此吸收系数 $\bar{\alpha}=-\dfrac{1}{l}\ln\dfrac{I}{I_0}=-\ln\dfrac{0.99I_0}{I_0}\mathrm{m}^{-1}=1\mathrm{cm}^{-1}$。

1.17 由柯西色散公式 $$n=A+\frac{B}{\lambda^2}+\frac{C}{\lambda^4}$$

得色散率 $$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}=A-\frac{2B}{\lambda^3}-\frac{4C}{\lambda^5}$$

因为在正常色散区，A,B,C 均为正数，因此折射率 n 随波长 λ 的增大而减少；色散率则随波长 λ 的增大而增大。

1.18 太阳白光被大气瑞利散射，瑞利散射光强与波长的四次方成反比。短波长的散射光强

强于长波长的散射光强，因此天空呈现浅蓝色。旭日和夕阳的光线入射到地球上时经历更厚的大气层，短波长的光波被大量散射，因此看起来呈现红色。

1.19 在大风天和雾天，空气中漂浮着很多尘埃和雾滴，其线度大小正好能发生瑞利散射。按照瑞利散射定律（$I \propto \lambda^{-4}$），波长短的光容易被散射掉，为了能让灯光信号传播得更远一些，必须选用波长较长的光，因此选择橘红色。

*1.20 （1）光的单色性是描述光的频率和波长是否单一、它的两个正交分量是否相干。

偏振是描述光波电矢量的振动分量的特性。“偏振”指的是场中某一特定点处的行为，因而在场中不同地点偏振态一般将不相同。一个波可以在某些点是线偏振的或圆偏振的，而在其他点是椭圆偏振的。只有在特别情况下，如均匀平面波中各点的偏振态才会都一样。

（2）两者关系：理想单色光必定是偏振光，因为其波列无限长，它分解的两个正交分量仍然是无限的，两分量为同一频率，且两者之间的位相差，无论波传播多长时间，始终都保持恒定关系，因此这两个分量必定相干，叠加的结果，波必定是某一偏振态。但偏振光不一定是单色的，偏振光可以是由复色的光叠加在一起形成的，例如，白光通过一偏振片后即为复色偏振光。任何偏振态的正交偏振分量必定是相关的，它们之间保持一个确定的复振幅比。

（3）自然光的正交偏分量是不相关的，这种不相关来源于它的各个偏振分量是不同的随机扰动过程，而随机扰动就不是谐波，不是单色波。但若用起偏器把其中一个偏振分量滤掉，则它就成为线偏光，尽管它仍是一个随机扰动，或者它的任何两个正交分量也是随机扰动，但这两个扰动是完全相关的，换言之，尽管每个分量的复振幅都随时间变化，但各分量的振幅比却是常数。

自然光二分量在随机变化，因此它不可能是单色光，充其量是准单色光。

*1.21 当光从光疏媒质入射到光密媒质时，折射角小于入射角，光在这种情况下的反射，叫作外反射。当光从光密媒质入射到光疏媒质时，折射角大于入射角，光在这种情况下的反射，叫作内反射。内反射时，折射角随着入射角的增大而增大，当折射角等于90°时，对应的入射角为 θ_c，由折射定律 $n\sin\theta_c = n'\sin 90°$ 可知，θ_c 称作临界角。全部光能量都反回原介质，这种反射叫作光的全反射，或叫作光的全内反射。

线偏振光的两个相互垂直的振动分量的位相差是 $2m\pi$ 或者 $2m\pi+\pi$。外反射时，经过界面反射后，产生的相移为 0 或 π，因此，反射后仍为 p 态。但是，在一般情况下，由于反射时其 p 分量和 s 分量的振幅反射比 $r_\perp \neq r_{/\!/}$，因此反射波的振动要发生旋转，只有在正入射和接近 90°入射时，p 态的振动面才不转动，即与入射波的偏振态相同。

在全反射时，p 分量和 s 分量的反射相移 δ_{11} 和 $\delta_{/\!/}$ 一般不相等，均不等于 0 或 π。只有在入射角为临界角，即 θ_c 为 90°时，才有 $\delta_{11} = \delta_{/\!/}$，反射波仍为线偏振光。

1.22 （1）当固体介质和水对绿光的折射率完全相同时，在绿光照射下，将不产生反射和折射，人眼发现不了界面的存在，因而发现不了水中的固体介质。

（2）在白光照射下，水和固体介质对不同波长的光的折射率不可能均相同，除了不对 $\lambda = 546.1\text{nm}$ 的绿光无反射以外，对其他波长的光总会有些反射。

在反射方向将看到固体介质为略带缺少绿色的品红色（互补色），在透射方向因绿光透射更多些而显得更绿一些。