

第 1 章 随机事件及其概率

在现实世界中，存在着各种各样的现象，但从概率的观点来看，大体可分为两种：确定性现象和随机现象。所谓确定性现象是指在一定条件下必然发生或必然不发生的现象。例如，向上抛一石头必然要下落；再如，在标准大气压下，水加热到 100°C 时必然会沸腾，等等。所谓随机现象是指在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，且在试验或观察之前不能预知确切的结果。例如，在相同条件下，向上抛一枚硬币，其结果可能正面朝上，也可能反面朝上，且每次抛之前并不知道会出现哪个结果；再如，打靶射击时，每次弹着点的位置是不确定的，且事先不能预测的，等等。

概率论与数理统计就是从数量化的角度来研究现实世界中的随机现象及其规律性的一门应用数学学科。

1.1 随机事件

一、随机试验与样本空间

对随机现象进行一次观测，我们称为一个随机试验。它具有下列 3 个特点：

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行；
- (2) 试验的结果不止一个，但所有结果在事先都明确可知；
- (3) 每次试验之前无法预料哪个结果会出现。

为研究方便，我们通常将随机试验用字母 E 表示，下面举例说明。

例 1.1 下列试验都是随机试验。

E_1 : 掷一枚骰子，观察朝上的那一面的点数；

E_2 : 将一枚硬币连抛两次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况；

E_3 : 射击某一目标，直至击中为止，观察射击的次数；

E_4 : 在 n 件产品中，观察其正品的件数；

E_5 : 从一批同型号的灯泡中，任取一只，观测其寿命。

我们将随机试验中每一个可能的结果称为一个样本点（或基本事件），并用小写希腊字母 ω 表示。将样本点的全体称为样本空间，记为 Ω ，于是样本点 ω 就是样本空间 Ω 的一个元素，即有 $\Omega = \{\omega\}$ 。

在例 1.1 中，这五个随机试验所对应的样本空间分别是：

$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ ，其中 ω_i 分别表示“朝上那一面的点数为 i ”，且 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ；

$\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$ ；

$\Omega_3 = \{1, 2, 3, \dots\}$ ；

$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ ；

$\Omega_5 = \{t | t \geq 0\}$ 。

通常样本空间有如下 3 种类型：

- (1) 有限集合：样本空间中样本点的个数是有限的，如 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4$ ；
- (2) 无限可列集合：样本空间中样本点的个数是无限的，但可列出，如 Ω_3 ；
- (3) 无限不可列集合：样本空间中样本点的个数是无限的，且不可列出，如 Ω_5 。

二、随机事件

一般地，我们将随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集，称为 E 的随机事件，简称事件，用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。

例如，在例 1.1 的随机试验 E_1 中，设随机事件 A 表示“朝上那一面的点数为偶数”，则 $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ ；设随机事件 B 表示“朝上那一面的点数不超过 3”，则 $B = \{1, 2, 3\}$ 。

再如，在例 1.1 的随机试验 E_2 中，设随机事件 A 表示“两次出现同一面”，则 $A = \{HH, TT\}$ ；设随机事件 B 表示“两次中至少出现一次正面”，则 $B = \{HH, HT, TH\}$ 。

样本空间 Ω 有两个特殊的子集，一个是 Ω 本身，另一个是空集 Φ 。由于 Ω 包含了随机试验中的所有可能结果，因此在每次试验中它总是发生的，于是 Ω 称为必然事件。而空集 Φ 不包含任何样本点，因此每次试验中它都不发生，于是 Φ 称为不可能事件。

三、事件之间的关系及其运算

在一个样本空间中，显然可以有許多随机事件，而在实际问题中，我们往往希望通过了解简单随机事件来掌握复杂随机事件。为此，我们需要研究随机事件之间的关系及其运算。

由于随机事件是一个集合，因此随机事件之间的关系和运算，我们可以按照集合论中集合之间的关系和运算来处理。

1. 事件的包含与相等

若随机事件 A 发生，必然导致随机事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点均属于 B ，则称随机事件 B 包含随机事件 A ，记作 $A \subset B$ 。

若 $A \subset B$ ，且 $B \subset A$ ，则称随机事件 A 与随机事件 B 相等，记作 $A = B$ 。

2. 事件的和（或并）

设随机事件 A 和 B ，若把 A 的样本点和 B 的样本点合在一起组成一个新的随机事件，则此新随机事件称为 A 与 B 的和事件（或并事件），记作 $A+B$ （或 $A \cup B$ ）。

显然，随机事件 $A+B$ 的发生当且仅当 A 和 B 至少有一个发生。

一般地， n 个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件记为

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少一个发生；而可列个随机事件 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 的和事件记为

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 中至少一个发生。

3. 事件的积（或交）

设随机事件 A 和 B ，若把 A 和 B 中共有的样本点组成一个新的随机事件，则此新随机事件称为 A 与 B 的积事件（或交事件），记作 AB （或 $A \cap B$ ）。

显然，随机事件 AB 发生当且仅当 A 与 B 都发生。

一般地， n 个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的积事件记为

$$A_1 A_2 \dots A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生；而可列个随机事件 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 的积事件记为

$$A_1 A_2 A_3 \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

它表示随机事件 $A_1, A_2, A_3, \dots$ 都同时发生。

4. 事件的差

设随机事件 A 和 B ，若从 A 的样本点中去除 B 的样本点后，余下的样本点组成的新随机事件称为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$ 。

显然，随机事件 $A-B$ 表示随机事件 A 发生但随机事件 B 不发生。

5. 事件的互斥（或互不相容）

若随机事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB = \Phi$ ，则称 A 与 B 是互斥事件或互不相容事件。

6. 事件的互逆（或对立）

对于随机事件 A 和 B ，若 $AB = \Phi$ ，且 $A+B = \Omega$ ，则称 A 与 B 是互逆事件或对立事件，记作 $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$ 。

显然有

$$\overline{\overline{A}} = A, \quad A \overline{A} = \Phi, \quad A + \overline{A} = \Omega$$

若 A 与 B 是对立事件, 则 A 与 B 一定是互斥事件; 反之不一定。

7. 事件的运算律

与集合的运算相类似, 随机事件之间的运算也满足下列的运算律。

- (1) 交换律: $A + B = B + A, \quad AB = BA$;
- (2) 结合律: $(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC)$;
- (3) 分配律: $A(B \pm C) = AB \pm AC$;
- (4) 对偶律: $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ 。

这些运算律可以推广到任意多个随机事件的情形。

例 1.2 设 A, B, C 为三个随机事件, 由事件之间的关系与运算, 试用 A, B, C 表示下列事件:

- ① A 发生, B, C 都不发生;
- ② A 发生, B, C 至少有一个发生;
- ③ A, B, C 中恰有一个发生;
- ④ A, B, C 中至少有一个不发生;
- ⑤ A, B, C 中不多于一个事件发生。

解 ① $A \overline{B} \overline{C}$; ② $A(B + C)$; ③ $A \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C$; ④ $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$;
⑤ $A \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} \overline{B} \overline{C}$ 。

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

- (1) 掷两枚均匀的骰子, 观察出现的点数之和;
- (2) 5 件产品中 2 件是次品, 逐件进行检测直至将所有次品找到为止, 记录测试的次数;
- (3) 从编号为 1, 2, 3, 4 的四个球中一次随机地取 2 个, 记录取到的球的号码;
- (4) 记录某城市 110 报警台在一小时内收到的报警次数;
- (5) 测量在 0 和 1 之间取值的两个物理量 x 和 y 的数值 (不含 0 和 1)。

2. 设 A, B, C 表示三个随机事件, 试将下列事件用 A, B, C 表示:

- (1) A 与 B 都发生, 而 C 不发生;
- (2) A, B, C 中至少有一个发生;
- (3) A, B, C 都不发生;
- (4) A, B, C 不都发生;

- (5) A, B, C 中恰有两个发生;
- (6) A, B 至少有一个发生, 而 C 不发生。
3. 设某工人连续生产了 4 个零件, A_i 表示生产的第 i 个零件是正品 ($i=1, 2, 3, 4$), 试用 A_i 表示下列各事件:
- (1) 没有一个是次品;
- (2) 至少有一个是次品;
- (3) 只有一个是次品;
- (4) 至少有三个不是次品;
- (5) 恰好有三个是次品。
4. 设 A 表示事件“甲产品畅销, 乙产品滞销”, 则对立事件 $\bar{A}$ 表示的意义是什么?
5. 设 A, B, C 是三个随机事件, 请说明下列各关系式的意义:
- (1) $ABC = A$; (2) $A+B+C = A$; (3) $AB \subset C$; (4) $A \subset \overline{BC}$ 。

1.2 随机事件的概率

除必然事件和不可能事件外, 对于一个随机事件来说, 它在一次试验中可能发生, 也可能不发生。但我们只讨论某一随机事件是否发生是不够的, 我们还希望知道它在一次试验中发生的可能性大小。例如, 商业保险机构为获得较大利润, 就必须研究个体意外事件发生的可能性大小, 才由此去计算保险费和赔偿费的多少。为了找到一个合适的数量来表征随机事件在一次试验中发生的可能性大小, 我们首先引入频率, 用它来描述随机事件发生的频繁程度; 进而再引出表征随机事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率。

一、频率

定义 1.1 设随机事件 A 在 n 次的重复试验中, 出现了 r 次, 则称 r 为随机事件 A 发生的频数; 将比值 $\frac{r}{n}$ 称为随机事件 A 发生的频率, 记作 $f_n(A)$, 即

$$f_n(A) = \frac{r}{n}$$

由定义 1.1 可知, 频率具有以下性质:

- (1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- (2) $f_n(\Omega) = 1$;
- (3) 若 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 是一组两两互不相容的随机事件, 则

$$f_n(A_1 + A_2 + \dots + A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$$

通过大量的试验, 人们发现, 当重复试验的次数 n 逐渐增大时, 频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性, 即逐渐稳定于某个常数。例如在历史上, 就有很多人做过重复上抛一枚硬币, 记录正面朝上的次数的试验, 如数学家德·摩根、蒲丰, 等等; 表 1-1 所示的就是他们试验的结果。

表 1-1 德·摩根等人的试验记录表

实验者	试验次数 n	正面朝上的次数 r	出现正面的频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由此表可以看出，当试验次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于常数 0.5。

虽然由频率的稳定性可知 $f_n(A)$ 是一个常数，且用它来表征随机事件 A 发生可能性的 大小是合适的，但是它是通过大量重复试验得到的结果。而在实际中，我们不可能对每个 随机事件都做大量的试验，况且有些试验是不可重复进行的，这样就无法计算随机事件发 生的频率。因此，我们需要引出另一个也能表征随机事件 A 发生可能性大小的数，即随机 事件 A 的概率。

二、概率

定义 1.2 设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对于 Ω 中的任一随机事件 A ，都赋予一个 实数 $P(A)$ ，若 $P(A)$ 同时满足下列三个条件：

(1) 非负性：对任一随机事件 A ，都有 $P(A) \geq 0$ ；

(2) 规范性： $P(\Omega) = 1$ ；

(3) 可列可加性：若 $A_1, A_2, \dots$ 为可列无穷多个互不相容的随机事件，即对于 $i \neq j$ ，有 $A_i A_j = \Phi$ ($i, j = 1, 2, \dots$)，则

$$P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率。

此定义称为概率的公理化定义，由它可推出概率的一些重要性质。

性质 1 $P(\Phi) = 0$ ；

证明 因为 $\Phi = \Phi + \Phi + \dots$ ，所以由概率的可列可加性知

$$P(\Phi) = P(\Phi) + P(\Phi) + \dots$$

再由概率的非负性即可得出 $P(\Phi) = 0$ 。

性质 2 设随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

证明 令随机事件 $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \Phi$ ，则由概率的可列可加性，有

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) &= P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \Phi + \Phi + \dots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + P(\Phi) + P(\Phi) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \end{aligned}$$

性质 3 对任一随机事件 A , 有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

证明 因为 $A + \bar{A} = \Omega$, 且 $A\bar{A} = \Phi$, 所以有

$$P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1, \text{ 且 } P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

即有 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

于是有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质 4 对于任意随机事件 A, B , 有

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

证明 因为 $A + B = A + B\bar{A}$, 且 $A(B\bar{A}) = \Phi$, 所以有

$$P(A + B) = P(A + B\bar{A}) = P(A) + P(B\bar{A})$$

而 $B = BA + B\bar{A}$, 且 $(BA)(B\bar{A}) = \Phi$, 于是有

$$P(B) = P(BA) + P(B\bar{A})$$

即有 $P(B\bar{A}) = P(B) - P(BA)$

因此有 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

此性质称为概率的加法公式, 它可以推广到多个随机事件的情形。例如, 设 A_1, A_2, A_3 是任意三个随机事件, 则有

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

一般地, 对于任意 n 个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 则可用数学归纳法得到

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_iA_jA_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \dots A_n)$$

性质 5 若随机事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \text{ 且 } P(B) \geq P(A)$$

证明 因为 $A \subset B$, 所以有

$$B = A + (B - A), \text{ 且 } A(B - A) = \Phi$$

因此由性质 2 可知 $P(B) = P(A) + P(B - A)$

即有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

又因为 $P(B - A) \geq 0$, 所以有 $P(B) \geq P(A)$ 。

性质 6 对任一随机事件 A , 都有 $P(A) \leq 1$ 。

证明 因为 $A \subset \Omega$, 所以由性质 5 可知

$$P(A) \leq P(\Omega) = 1$$

例 1.3 设 A, B 为两随机事件, 有 $P(B) = 0.4$, $P(A + B) = 0.7$, 求 $P(A\bar{B})$ 。

解 因为 $P(A\bar{B}) = P\{A(\Omega - B)\} = P(A\Omega - AB)$
 $= P(A - AB) = P(A) - P(AB)$

而 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

则有 $P(A) - P(AB) = P(A + B) - P(B) = 0.7 - 0.4 = 0.3$

因此有 $P(A\bar{B}) = 0.3$

例 1.4 已知 $P(\bar{A})=0.5$, $P(\bar{A}B)=0.2$, $P(B)=0.4$, 求 $P(\bar{A}\bar{B})$ 。

解 因为 $P(\bar{A})=0.5$, 所以

$$P(A)=1-P(\bar{A})=0.5$$

又因为

$$P(\bar{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(BA)$$

所以有

$$P(BA)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.4-0.2=0.2$$

因此

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] \\ &= 1 - [0.5 + 0.4 - 0.2] = 0.3 \end{aligned}$$

例 1.5 设 A, B, C 是两两互不相容的三个随机事件, 且 $P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, 求 $P[(A+B)-C]$ 。

解 因为

$$\begin{aligned} P[(A+B)-C] &= P(A\bar{C} + B\bar{C}) \\ &= P(A\bar{C}) + P(B\bar{C}) - P(AB\bar{C}) \\ &= P(A) - P(AC) + P(B) - P(BC) - P(AB\bar{C}) \end{aligned}$$

而 A, B, C 两两互不相容, 于是有

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=0, \quad P(AB\bar{C})=P(AB)-P(ABC)=0$$

所以

$$P[(A+B)-C] = P(A) + P(B) = 0.5$$

例 1.6 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$, 求随机事件 A, B, C 全不发生的概率。

解

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) &= 1 - P(A+B+C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)] \\ &= 1 - [\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 0] \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

习题 1.2

1. 设 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.3$, $P(A+B)=0.4$, 求 $P(\bar{A}\bar{B})$ 。

2. 设 $P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 求 $P(\bar{A}B)$ 。

3. 设 A, B 是互不相容的两个随机事件, 且 $P(A)=0.4$, $P(A+B)=0.7$, 求 $P(B)$ 。

4. 设 $A \subset B$, $P(A)=0.1$, $P(B)=0.5$, 求 (1) $P(AB)$; (2) $P(A+B)$; (3) $P(\bar{A} + \bar{B})$

的值。

5. 甲乙两人下棋, 甲胜的概率为 0.6, 乙胜的概率为 0.4。设 A 为甲胜, B 为乙胜, 则下列表示甲胜乙输的概率计算正确的是_____。

$$(A) \quad P(\overline{AB}) = P(A)P(\overline{B}) = 0.6 \times (1 - 0.4) = 0.36;$$

$$(B) \quad P(\overline{AB}) = P(A - AB) = 0.6 - 0.6 \times 0.4 = 0.36;$$

$$(C) \quad P(\overline{AB}) = P(A) - P(B) = 0.6 - 0.4 = 0.2;$$

$$(D) \quad P(\overline{AB}) = P(A) = 0.6.$$

6. 设当随机事件 A 与 B 同时发生时, 随机事件 C 必发生, 则下列各式正确的是_____。

$$(A) \quad P(C) \leq P(A) + P(B) - 1;$$

$$(B) \quad P(C) \geq P(A) + P(B) - 1;$$

$$(C) \quad P(C) = P(AB);$$

$$(D) \quad P(C) = P(A + B).$$

7. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$,

$P(AC) = \frac{1}{8}$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率。

8. 设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 证明 $P(AB) = P(\overline{AB})$ 。

1.3 古典概型与几何概型

如何计算一个随机事件 A 的概率 $P(A)$ 是本章的一个重点。在上一节中, 我们学习了概率的公理化定义, 虽然给出了概率的严格的数学定义, 但在处理实际问题中, 按照此定义来计算随机事件发生的概率是比较复杂的, 而且不同类型的随机试验 (又称为概型) 常有不同的计算方法。下面我们讨论两种最简单的概型: 古典概型和几何概型。

一、古典概型

定义 1.3 若一个随机试验同时满足下列两个条件:

(1) 样本空间中只含有限个样本点;

(2) 每一个样本点发生的可能性相同, 则此随机试验称为等可能概型。

由于等可能概型是概率论发展初期的主要研究对象, 因此也称之为古典概型。

下面我们讨论古典概型中随机事件的概率计算公式。

定理 1.1 设在古典概型中样本空间 Ω 有 n 个样本点, 且 Ω 的某一随机事件 A 中有 k 个样本点, 则 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

证明 设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 而由古典概型的定义可知

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \dots = P(\omega_n)$$

由于各样本点之间是两两互斥的, 因此有

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(\{\omega_1\} + \{\omega_2\} + \dots + \{\omega_n\}) \\ &= P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \dots + P(\{\omega_n\}) \end{aligned}$$

$$=nP(\{\omega_i\})$$

则有

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i=1,2,\dots,n$$

因为随机事件 A 中含有 k 个样本点, 不妨设为 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$, 所以有

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n}$$

例 1.7 一袋中装有 10 个大小相同的球, 其中 6 个红球, 4 个白球, 求:

(1) 从袋中任取一球, 这个球是白球的概率;

(2) 从袋中任取两球, 刚好是一白一红的概率。

解 由题意可知, 这个随机试验是一个古典概型。

(1) 从 10 个球中任取一球, 共有 C_{10}^1 种取法, 而 10 个球中有 4 个白球, 则从袋中取到白球就有 C_4^1 种取法。设随机事件 A 表示“取到的是白球”, 则有

$$P(A) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} = \frac{2}{5}$$

(2) 从 10 个球中任取两球, 共有 C_{10}^2 种取法, 而这两个球是一白一红的取法有 $C_4^1 C_6^1$ 种。

设随机事件 B 表示“取到的球是一白一红”, 则有

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}$$

例 1.8 将一枚均匀骰子连掷两次, 求两次掷出的点数之和等于 10 的概率。

解 设随机事件 A 表示“两次掷出的点数之和等于 10”, 则 A 中的样本点有三个: (4, 6), (5, 5) 和 (6, 4), 而将一枚骰子连掷两次的样本点个数为 6×6 , 于是

$$P(A) = \frac{3}{6 \times 6} = \frac{1}{12}$$

例 1.9 (摸球问题) 盒中有 6 个红球和 4 个白球, 现以下列两种方式取出两球: 有放回的方式 (即一次取一个球, 观察其颜色后再放回盒中, 然后再取第二球)、不放回的方式 (即一次取一个球后不再放回盒中, 然后再取第二球), 求取到两个红球的概率和取到两个球颜色不同的概率。

解 设随机事件 A 表示“取到两个红球”, 随机事件 B 表示“取到两个颜色不同的球”, 则在有放回的方式和不放回的方式下分别求 $P(A)$ 和 $P(B)$ 。

(1) 有放回的方式。

从 10 个球中取出两球, 共有 10^2 种取法, 即样本空间中有 10^2 个样本点, 而事件 A 中有 6^2 个样本点, 事件 B 中有 $6 \times 4 + 4 \times 6 = 48$ 个样本点, 因此有

$$P(A) = \frac{6^2}{10^2} = \frac{9}{25}; \quad P(B) = \frac{48}{10^2} = \frac{12}{25}$$

(2) 不放回的方式。

从 10 个球中取出两球, 共有 $A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$ 种取法, 而事件 A 中有 $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$ 个样

本点, 事件 B 中有 $6 \times 4 + 4 \times 6 = 48$ 个样本点, 则

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}; \quad P(B) = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

例 1.10 从10双不同尺码的鞋子中任取4只, 求至少有2只配成一双的概率。

解 方法一: 考虑一次取4只, 则 Ω 中样本点的个数为 C_{20}^4 ; 随机设事件 A 表示“至少有2只配成一双”, 则 A 的样本点有 $C_{10}^1 C_9^2 C_2^1 C_2^1 + C_{10}^2$, 即先从10双中任取一双, 再从9双中任取2双, 且从这2双中各取一只, 于是取出的4只鞋中有2只配成一双, 即有 $C_{10}^1 C_9^2 C_2^1 C_2^1$ 种取法; 而这4只鞋正好配成2双的取法有 C_{10}^2 种, 因此

$$P(A) = \frac{C_{10}^1 C_9^2 C_2^1 C_2^1 + C_{10}^2}{C_{20}^4} = \frac{99}{323}$$

方法二: 显然 Ω 中样本点的个数为 C_{20}^4 ; 设随机事件 A 表示“至少有2只配成一双”, 则随机事件 $\bar{A}$ 表示“取出的4只鞋中没有成双的”, 于是 $\bar{A}$ 的样本点有 $C_{10}^4 (C_2^1)^4$, 即从10双鞋子中任取4双, 且从这4双中各取一只, 则有取法 $C_{10}^4 (C_2^1)^4$ 种; 因此

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_{10}^4 (C_2^1)^4}{C_{20}^4} = \frac{99}{323}$$

例 1.11 (分房问题) 设有 n 个人, 每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任何一间去住 ($n \leq N$), 求

(1) 指定的 n 个房间各有一人住的概率;

(2) 恰有 n 个房间, 其中各住一个人的概率。

解 因为这 n 个人中, 每人都有 N 个房间可供选择, 所以 Ω 的样本点为 N^n 个。

(1) 设随机事件 A 表示“指定的 n 个房间各住一人”, 则这 n 个人住的方式就是一个全排列, 于是 A 的样本点为 $n!$ 个, 因此

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}$$

(2) 设随机事件 B 表示“恰有 n 个房间, 其中各住一人”, 而这 n 个房间是任选的, 因此有 C_N^n 种选法。因为对选定的这 n 个房间, n 个人住的方式就是全排列 $n!$, 因此有

$$P(B) = \frac{C_N^n \times n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!}$$

“分房问题”可用于许多方面的实际问题。例如将“ N 个房间”看成“一年中的365天”, 而每个人可以在这365天等可能地在某一天生日, 则可以求出有关生日的随机事件的概率, 这就是著名的“生日问题”。

例 1.12 (生日问题) 某班有20名同学在同一年出生 (这年按365天计算), 求下列事件的概率:

(1) 至少有2人是在同一天出生的;

(2) 至少有1人是6月1日出生的。

解 因为这20名同学在这365天出生都是等可能的, 所以样本空间 Ω 的样本点有

365^{20} 个。

(1) 设随机事件 A 表示“至少有 2 人是在同一天出生的”，则 $\bar{A}$ 表示“没有 2 人是在同一天出生的”，于是 $\bar{A}$ 的样本点个数为 A_{365}^{20} ，因此

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{A_{365}^{20}}{365^{20}}$$

(2) 设随机事件 B 表示“至少有 1 人是 6 月 1 日出生的”，则 $\bar{B}$ 表示“没有人是 6 月 1 日出生的”，于是 $\bar{B}$ 的样本点个数为 364^{20} ，因此

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{364^{20}}{365^{20}}$$

例 1.13 (抽奖问题) 一盒中有 n 张奖券，其中有 k 张有奖 ($k \leq n$)。现有 n 个人依次各取一张，证明每个人抽到有奖奖券的概率相同。

证明 因为 n 个人依次各取一张奖券，所以取法共有 $n!$ 种；设随机事件 A_i 表示“第 i 人抽到有奖奖券”，则 A_i 中的样本点个数可以这样计算：第 i 个位置上安排一张有奖奖券，则共有 k 种情形；而另外 $n-1$ 张奖券可放余下的 $n-1$ 个位置的全排列，则有 $(n-1)!$ 种排法。因此第 i 个人抽到有奖奖券的抽法有 $k \times (n-1)!$ 种，即 A_i 的样本点的个数，于是

$$P(A_i) = \frac{k \times (n-1)!}{n!} = \frac{k}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

即每个人抽到有奖奖券的概率都是相同的，都等于 $\frac{k}{n}$ 。

二、几何概型

在古典概型中，随机试验的样本空间的样本点个数是有限的，且每个样本点出现的可能性相同。但在实际中，我们还会看到这样一类随机试验，虽然它的每个样本点出现是等可能的，但样本点的个数是无限的，此时样本点的全体可以组成直线上的一条线段、平面上的一区域或空间上的一立体等情形。于是我们将这类随机试验模型称为几何概型。

如何计算几何概型中随机事件的概率呢？下面我们以随机试验的样本点组成平面上的某一区域为例来说明：

设随机试验的样本空间的样本点组成平面上的区域 Ω ，记其面积为 $S(\Omega)$ ，且 Ω 上每一点出现是等可能的。而随机事件 A 的样本点组成了 Ω 中的子区域 A ，其面积记为 $S(A)$ ，于是

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

同理，如果 Ω 中样本点组成的是直线上的某一线段或空间中的某一立体，则将上式中的面积改为长度或体积。

总而言之，在几何概型中，随机事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}$$

其中几何度量是指长度、面积或体积。

例 1.14 一地铁线路上某地铁站每隔 5 分钟就有一辆地铁到达，设某人到达该地铁站的时刻是任意的，求他等候地铁时间不超过 3 分钟的概率。

解 等候地铁时间示意图如图 1-1 所示。

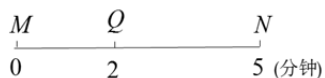


图 1-1

设随机事件 A 表示“此人等候时间不超过 3 分钟”，当他在 QN 之间到达时，等候时间不超过 3 分钟，则有

$$P(A) = \frac{QN \text{ 的长度}}{MN \text{ 的长度}} = \frac{3}{5}$$

例 1.15 甲乙两人相约上午 9:00 至 10:00 在某地会面，约定先到者等候另一人 20 分钟，过时就离开。假定两人到达的时刻是独立的，且每人可在这一小时内任何时刻到达，试求两人能会面的概率。

解 记 9:00 为计算时刻的 0 时，时间单位为分钟。设 x, y 分别表示甲、乙两人到达会面地点的时刻，则样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$$

设随机事件 A 表示“两人能会面”，则

$$A = \{(x, y) | |x - y| \leq 20, (x, y) \in \Omega\}$$

其示意图如图 1-2 所示，于是有

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

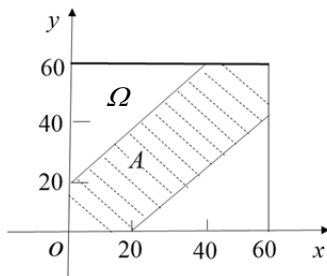


图 1-2

例 1.16 从区间 $[0, 1]$ 中随机地取两个数，求这两个数的乘积不小于 $\frac{2}{9}$ ，和不大于 1 的概率。

解 设这两个数分别为 x, y , 则 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 于是样本空间为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

设随机事件 A 表示“这两数乘积不小于 $\frac{2}{9}$, 和不大于 1”, 则有

$$A = \left\{ (x, y) \left| xy \geq \frac{2}{9}, x + y \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \right. \right\}$$

其示意图如图 1-3 所示, 则 Ω 的面积为 1, 且由积分学可知, A 的面积为

$$S(A) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(1 - x - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2$$

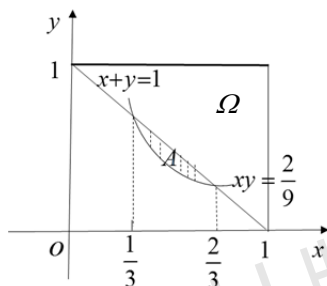


图 1-3

因此所求事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2}{1} = \frac{1}{6} - \frac{2}{9} \ln 2$$

习题 1.3

- 从编号为 1 至 15 的球中任取 3 个, 试求下列随机事件的概率:
 - 取到的球中最小号码为 5;
 - 取到的球中最大号码为 7。
- 在整数 0 至 9 中不重复地任取 4 个数字, 能构成一个四位数的偶数概率。
- 一学校某年级来了 15 名新生, 其中有 3 名是优秀运动员。现将这 15 名学生任意平均分配到三个班中, 求下列随机事件的概率:
 - 每个班级各分到一名优秀运动员;
 - 3 名优秀运动员被分配到同一个班级。
- 将 8 个女生和 7 个男生随机地排成一行, 求任意两个男生都不相邻的概率。
- 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只, 求没有成双的鞋子的概率。
- 一盒中有 8 个球, 其中 5 个红球和 3 个白球。现从中依次取出 5 个, 则分别按不放回方式和有放回方式计算下列随机事件的概率: (1) 取到的球全是红球; (2) 取到 3 个红球

和2个白球。

7. 在单位圆内随机地投掷一点 M ，求该点到原点的距离小于 $\frac{1}{3}$ 的概率。
8. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，试求这两个数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率。
9. 把长度为1的线段任意分成三段，求分得的三线段能够构成三角形的概率。

1.4 条件概率

在实际问题中，我们除了要考虑随机事件 A 的概率 $P(A)$ 外，常常还需要考虑这样一种情况：在随机事件 B 发生的条件下，求随机事件 A 发生的概率。这样的概率称为条件概率，记作 $P(A|B)$ 。

由于事件 B 的发生会对事件 A 造成一定的影响，因此一般地 $P(A|B) \neq P(A)$ 。那么怎样计算 $P(A|B)$ 呢？我们首先看一个例子。

例 1.17 设甲乙两个工人加工同一种零件共80件，质量报告如表 1-2 所示。

表 1-2 甲乙两个工人加工零件的质量报告表

	正品数	次品数	总数
甲	25	5	30
乙	40	10	50
合计	65	15	80

设事件 A 表示“从80件中任取一件是正品”，事件 B 表示“从80件中任取一件是甲加工的”，则事件 AB 表示“从80件中任取一件是甲加工的正品”，则有

$$P(A) = \frac{65}{80} = \frac{13}{16}, \quad P(B) = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}, \quad P(AB) = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}, \quad P(A|B) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

从例 1.17 中可以看出，一般地 $P(A|B) \neq P(A)$ ，原因是 $P(A|B)$ 中附加的条件所研究的问题是在甲加工的零件范围内，此时样本空间缩小了。但是我们发现

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{6}$$

与 $P(A|B) = \frac{5}{6}$ 相等，即

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B)$$

上式的成立并非偶然，而是具有普遍规律性，下面我们以古典概型为例证明它。

设古典概型的样本空间中有 n 个样本点，其中导致事件 A 、事件 B 和事件 AB 发生的样

本点分别有 m 个、 k 个和 r 个 ($r \leq m, r \leq k$)。如果 B 发生, 则导致 B 发生的 k 个样本点至少有一个发生, 因此在这个条件下导致 A 发生的样本点仅有 r 个, 于是

$$P(A|B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

同理可得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

一、条件概率的定义

定义 1.4 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。

容易验证, 条件概率 $P(A|B)$ 满足概率定义中的三个条件, 即

(1) 非负性: 对任一事件 A , 都有 $P(A|B) \geq 0$;

(2) 规范性: $P(\Omega|B) = 1$;

(3) 可列可加性: $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$, 其中 $A_1, A_2, \dots$ 为两两互不相容事件。

条件概率还满足概率所具有的性质与关系式, 例如

$$P(\Phi|B) = 0$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

$$P[(A_1 + A_2)|B] = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 A_2|B)$$

等等。

由以上分析, 我们可依据具体情况而定, 选取下列两种方法之一来计算条件概率 $P(A|B)$:

(1) 在缩减后的样本空间 Ω_A 中计算, 如例 1.17;

(2) 在原有的样本空间 Ω 中, 利用定义 1.4 中的公式

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

来求。

例 1.18 甲乙两班共有 70 名学生, 其中女生有 40 名, 设甲班有 30 名学生, 而女生为 15 名。试问在碰到甲班学生时, 正好碰到的是一名女生的概率。

解 设随机事件 A 表示“碰到的是女生”, 随机事件 B 表示“碰到的是甲班的学生”, 于是随机事件 $A|B$ 表示“碰到的甲班的学生时, 正好是女生”。因为

$$P(AB) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}, \quad P(B) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$$

所以有
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

当然此例也可以这样做：样本空间 Ω_B 的样本点个数为 30，而事件 $A|B$ 的样本点个数为 15，因此有

$$P(A|B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

例 1.19 人寿保险公司常常需要知道存活到某一年龄段的人在下一年仍存活的概率。根据统计资料可知，某市的人活到 50 岁的概率为 0.90718，而活到 51 岁的概率为 0.90135。问现在已经 50 岁的人，能够活到 51 岁的概率为多少？

解 设随机事件 A 表示“活到 51 岁”，随机事件 B 表示“活到 50 岁”，显然有 $A \subset B$ ，则有 $AB = A$ ，下求 $P(A|B)$ 。

因为 $P(B) = 0.90718$ ， $P(A) = 0.90135$
所以有 $P(AB) = P(A) = 0.90135$

因此有
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.90135}{0.90718} \approx 0.99357$$

由此可知，该市的人在 50 岁到 51 岁之间死亡的概率为 0.00643，也就是说平均每一千人中约有 6.43 人死亡。

二、乘法公式

由条件概率定义中的公式，可直接得到如下乘法公式。

定理 1.2 设 A, B 为两事件，且 $P(B) > 0$ ，则有

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

同理，当 $P(A) > 0$ 时，有 $P(AB) = P(B|A) \cdot P(A)$ 。

此公式可推广到有限个的情形：

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个随机事件，且 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) > 0$ ，则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

证明 因为 $P(A_1) \geq P(A_1 A_2) \geq \cdots \geq P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$
所以
$$\begin{aligned} & P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \\ &= P(A_1) \cdot \frac{P(A_1 A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 A_2 A_3)}{P(A_1 A_2)} \cdots \frac{P(A_1 A_2 \cdots A_n)}{P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})} \\ &= P(A_1 A_2 \cdots A_n) \end{aligned}$$

例 1.20 一批同型零件共有 100 个，其中合格品为 95 个，采取不放回抽样依次抽取 3 次，每次抽取一个，求第三次才抽到合格品的概率。

解 设随机事件 A_i 表示“第 i 次抽到合格品” ($i=1, 2, 3$)，随机事件 B 表示“第三次才抽到合格品”，则 $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ ，根据乘法公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2) \\ &= \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{95}{98} \approx 0.00196 \end{aligned}$$

例 1.21 (Pólya 模型) 设袋中有 a 个红球和 b 个黑球, 每次从中任取一个, 记下颜色后放回袋中, 并加入 c 个同色球。如此进行 n 次, 求前 m 次都取到黑球, 后 $n-m$ 次都取到红球的概率 ($m < n$)。

解 设随机事件 A_i 表示“第 i 次取到黑球”, 则 $\bar{A}_i$ 表示“第 i 次取到红球”; 而随机事件 B 表示“前 m 次取到黑球, 后 $n-m$ 次取到红球”, 则有

$$B = A_1 A_2 \cdots A_m \bar{A}_{m+1} \bar{A}_{m+2} \cdots \bar{A}_n$$

因为

$$P(A_1) = \frac{b}{a+b}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{b+c}{a+b+c}$$

$$P(A_3 | A_1 A_2) = \frac{b+2c}{a+b+2c}$$

.....

$$P(A_m | A_1 A_2 \cdots A_{m-1}) = \frac{b+(m-1)c}{a+b+(m-1)c}$$

$$P(\bar{A}_{m+1} | A_1 A_2 \cdots A_m) = \frac{a}{a+b+mc}$$

$$P(\bar{A}_{m+2} | A_1 A_2 \cdots A_m \bar{A}_{m+1}) = \frac{a+c}{a+b+(m+1)c}$$

.....

$$P(\bar{A}_n | A_1 A_2 \cdots A_m \bar{A}_{m+1} \cdots \bar{A}_{n-1}) = \frac{a+(n-m-1)c}{a+b+(n-1)c}$$

所以由概率的乘法公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 \cdots A_m \bar{A}_{m+1} \bar{A}_{m+2} \cdots \bar{A}_n) \\ &= P(A_1)P(A_2 | A_1) \cdots P(A_m | A_1 A_2 \cdots A_{m-1})P(\bar{A}_{m+1} | A_1 A_2 \cdots A_m) \cdots P(\bar{A}_n | A_1 A_2 \cdots A_m \bar{A}_{m+1} \cdots \bar{A}_{n-1}) \\ &= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} \cdots \frac{b+(m-1)c}{a+b+(m-1)c} \cdot \frac{a}{a+b+mc} \cdots \frac{a+(n-m-1)c}{a+b+(n-1)c} \end{aligned}$$

习题 1.4

1. 设 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(A+B)$ 。
2. 设 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(B|\bar{A}) = 0.4$, 求 $P(A|\bar{B})$ 。
3. 某动物活 10 年的概率为 0.8, 活 15 年的概率为 0.5, 求现已活 10 年的这种动物活到

15年的概率。

4. 小王忘了朋友家电话号码的最后一位数字, 他只能随意拨最后一个号码, 他连拨三次, 求第三次才拨通的概率。

5. 设一批产品的不合格率为4%, 而合格品中的一等品为75%, 求在该批产品中任取一件, 恰好取到的是一等品的概率。

6. 设一袋中有5个球: 3个红球和2个白球, 每次取一个, 观察颜色后放回且再放入同色球2个, 试求连续三次取到的是白球的概率。

7. 某项技能考试, 规定每个人最多可参加3次考试, 小李第一次参加考试能通过的概率为60%; 如果第一次未通过, 经过培训后参加第二次考试, 他通过的概率为80%; 如果第二次还未通过, 再去参加第三次考试, 则此时通过的概率为90%, 试求小李最多三次能通过考试的概率。

1.5 全概率公式与贝叶斯公式

对于复杂事件的概率求解问题, 我们常希望能将复杂事件分解成若干个简单事件, 而这些简单事件的概率较易求出, 于是再利用概率的加法公式或乘法公式, 解决所要求的复杂事件的概率。下面我们学习两个计算复杂事件概率的重要公式。

一、全概率公式

定义 1.5 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 中的 n 个随机事件, 且满足下列两个条件:

(1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容;

(2) $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ 。

则我们称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分, 或称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 Ω 的一个完备事件组。

例如, $A, \bar{A}$ 就是样本空间 Ω 的一个划分。

对于一个样本空间 Ω 来说, 其划分是不唯一的。对 Ω 选择何种划分, 取决于所要解决问题的需要。

定理 1.3 (全概率公式) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, 则对于任意随机事件 B , 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

证明 因为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 Ω 的一个划分, 所以有

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega, \quad A_i A_j = \Phi \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$$

于是有

$$\begin{aligned} B &= B\Omega = B(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \\ &= BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n \end{aligned}$$

由于 $A_i A_j = \Phi$, 因此有 $(BA_i)(BA_j) = \Phi$, 且 $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$,

于是有

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(BA_1 + BA_2 + \cdots + BA_n) \\
 &= P(BA_1) + P(BA_2) + \cdots + P(BA_n) \\
 &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \cdots + P(B|A_n) \cdot P(A_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)
 \end{aligned}$$

全概率公式是用于计算由若干“原因”引起的复杂事件概率的有效方法。通常可用下面准则进行判定：若随机试验可以看成两个阶段进行，且第一阶段的试验结果是不确定的，要求的是第二阶段的结果发生的概率，则肯定用全概率公式。

此外，利用全概率公式时，如何选取适当的样本空间划分是至关重要的。通常可将第一阶段的所有可能结果作为样本空间的一个划分。

例 1.22 一个车间有甲、乙、丙三条流水线生产同一种产品。设甲、乙、丙流水线的产量分别占总产量的 20%、35%、45%；而它们产品的次品率分别为 5%、4%、3%；现将这些产品混在一起，并随机抽取一件，求它是次品的概率。

分析 将此随机试验分为两个阶段进行：第一阶段是将甲乙丙三条流水线上的产品混在一起，并随机抽取一件；第二阶段是观察抽取的这件产品是否为次品。因为要求的是第二阶段的结果发生的概率（即求抽取的是次品的概率），则用全概率公式解决。另外，在第一阶段中有三种可能结果，即这件产品来自于甲流水线、乙流水线、丙流水线，因此样本空间的划分可以取这三个可能结果。

解 设随机事件 A_1 表示“抽取的产品是甲流水线上的”， A_2 表示“抽取的产品是乙流水线上的”， A_3 表示“抽取的产品是丙流水线上的”，随机事件 B 表示“抽到的产品是次品”，显然， A_1, A_2, A_3 是一个划分，则由全概率公式有

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) \\
 &= \frac{5}{100} \cdot \frac{20}{100} + \frac{4}{100} \cdot \frac{35}{100} + \frac{3}{100} \cdot \frac{45}{100} \\
 &= 0.0375
 \end{aligned}$$

例 1.23 设甲盒中有 a 个白球和 b 个红球，乙盒中有 c 个白球和 d 个红球。现从甲盒中任取一球放入乙盒中，再从乙盒中取出一球，问取到的是白球的概率。

解 设随机事件 A 表示“从甲盒中任取一球是白球”，则 $\bar{A}$ 表示“从甲盒中任取一球是红球”，再设随机事件 B 表示“从乙盒中任取一球是白球”，显然， $A, \bar{A}$ 是一个划分，则由全概率公式有

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) \\
 &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1} \\
 &= \frac{a(c+1)+bc}{(a+b)(c+d+1)}
 \end{aligned}$$

二、贝叶斯 (Bayes) 公式

定理 1.4 (贝叶斯公式) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, 则对于任意随机事件 B , 当 $P(A_i) > 0, P(B) > 0$ 时, 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

证明 由条件概率可知

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i B)}{P(B)} \quad (1-5-1)$$

而根据乘法公式有

$$P(A_i B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i) \quad (1-5-2)$$

因为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是样本空间 Ω 的一个划分, 则由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i) \end{aligned} \quad (1-5-3)$$

将式 (1-5-2) 和式 (1-5-3) 代入 (1-5-1) 中, 得

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

贝叶斯公式用来计算复杂事件已发生的条件下, 引起这一复杂事件的某一种“原因”发生的概率。我们通常可用下面准则进行判别: 若随机试验可看成两个阶段进行, 且第一阶段的试验结果是不确定的, 但第二阶段的某一个结果是已知的, 要求此结果为第一阶段中某一个结果引起的概率, 则肯定用贝叶斯公式。

利用贝叶斯公式时, 如何选取样本空间 Ω 的划分也是至关重要的。和全概率公式应用一样, 通常可将第一阶段中的所有可能结果作为 Ω 的一个划分。

在例 1.22 中, 如果将甲、乙、丙三条流水线生产的产品混在一起后, 随机抽取一件, 发现它是次品, 现问这个次品是甲、乙、丙生产的概率各是多少?

分析 设事件 A_1, A_2, A_3 分别表示“抽取的产品分别是甲、乙、丙生产的”, 事件 B 表示“抽取的产品是次品”, 则要分别求出 $P(A_1|B)$ 、 $P(A_2|B)$ 和 $P(A_3|B)$ 。而由贝叶斯公式有

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^3 P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \\ &= \frac{20\% \times 5\%}{20\% \times 5\% + 35\% \times 4\% + 45\% \times 3\%} \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

同理可得, $P(A_2|B) = \frac{28}{75}$, $P(A_3|B) = \frac{9}{25}$ 。

例 1.24 依据医学调查表明, 男性有 5% 患有色盲, 女性有 0.25% 患有色盲。现从男女人数相等的人群中随机挑选一人, 恰好此人是色盲, 问此人为男性的概率。

解 设随机事件 A 表示“此人为男性”, 则 $\bar{A}$ 表示“此人为女性”; 显然 $A, \bar{A}$ 构成样本空间的一个划分。又设随机事件 B 表示“从男女人数相等的人群中随机挑选一人, 恰好是色盲患者”, 则要求 $P(A|B)$ 。

因为 $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 5\%$, $P(B|\bar{A}) = 0.25\%$

所以由贝叶斯公式可知

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} \\ &= \frac{5\% \times \frac{1}{2}}{5\% \times \frac{1}{2} + 0.25\% \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{20}{21} \end{aligned}$$

例 1.25 三个盒子中, 第一盒中有 4 个黑球和 1 个白球, 第二盒中有 3 个黑球和 3 个白球, 第三盒中有 3 个黑球和 5 个白球。现先任取一盒, 再从该盒中任取一球, 问:

(1) 取出的球是白球的概率是多少?

(2) 若取出的是白球, 则该白球是第二盒中的概率是多少?

分析 此随机试验可分为两个阶段进行, 即先取盒子, 再取球。但第一阶段的结果是不确定的, 即先取哪个盒子并不知道。(1) 中是求第二阶段结果发生的概率, 即第二阶段中取出的白球的概率, 这里要用全概率公式; (2) 中是第二阶段的结果已知, 即取出的球是白球, 现要追究此结果是第一阶段中哪一个结果引起的概率, 即此白球来自于第二个盒子的概率, 因此这里可用贝叶斯公式。

又由于第一阶段有三个结果, 即可取到第一、第二或第三个盒子, 因此可将这三个结果作为样本空间的一个划分。

解 设随机事件 A_i 表示“取出第 i 个盒子” ($i=1, 2, 3$), 随机事件 B 表示“取出的是白球”, 于是有

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A_1) = \frac{1}{5}, \quad P(B|A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B|A_3) = \frac{5}{8}$$

(1) 由全概率公式可得

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{53}{120}$$

(2) 由贝叶斯公式可得

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^3 P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{20}{53}$$

习题 1.5

1. 某批产品由甲、乙、丙三个产家供货，且甲、乙和丙的产量分别占总量的 50%、25% 和 25%，它们的次品率分别为 0.02、0.02 和 0.04。现从这批产品中任取一件，求它是次品的概率。

2. 一单位的某办公室有甲乙两人，已知甲近期出差的概率为 80%；若甲出差则乙出差的概率为 10%；若甲不出差则乙出差的概率为 85%。现在已知乙出差在外，求甲也出差在外的概率是多少？

3. 在一批同型产品中，甲乙两车间生产的产品数分别占 30% 和 70%，且合格率分别为 98% 和 90%；现从中任取一件，求：

(1) 它是合格品的概率是多少？

(2) 若这一件为次品，则它是由甲车间生产的概率为多少？

4. 某工厂的车床、钻床、磨床、刨床的台数之比为 9:3:2:1，它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1:2:3:1。当一台机床需要修理时，求这台机床是车床的概率是多少？

5. 假设箱中原来有一个球，已知此球不是白球就是黑球。现在首先将一个白球放入箱中，然后从箱中随意取出一个球，结果取到的是白球。试求箱中原来是白球的概率。

6. 假设利用某项血液化验来诊断某种疾病，已知 95% 的患者呈阳性，但有 1% 的健康人也呈阳性（称为伪阳性）。据统计资料表明，这种疾病患者占人口总数的 0.2%，求这种血液化验呈阳性的人但实际上并没有患这种疾病的概率。

7. 设甲、乙、丙三个地区爆发了某种流行病，而这三个地区感染此病的比例分别为 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{3}$ 。现从这三个地区中任取一人，问：

(1) 此人感染此病的概率是多少？

(2) 如果此人感染了此病，则此人来自于乙地区的概率为多少？

1.6 随机事件的独立性与伯努利概型

一、随机事件的独立性

在第 1.4 节中我们知道，条件概率 $P(A|B)$ 与无条件概率 $P(A)$ 一般不相等，即事件 B 的

发生对事件 A 是有影响的。但是如果 $P(A|B) = P(A)$ ，则说明事件 B 的发生对事件 A 是没有影响的，这时自然认为事件 A 与事件 B 是相互独立的。由概率的乘法公式可知，如果 $P(A|B) = P(A)$ ，则有

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

由此，我们则有如下定义：

定义 1.6 设 A, B 是任意两个随机事件，如果

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 是相互独立的。

判断事件 A 与 B 是否相互独立，对于简单事件来说，我们通常可从直觉上进行判别。例如甲、乙两人分别向上抛两枚均匀的硬币，设事件 A 表示“甲抛的硬币出现正面朝上”，事件 B 表示“乙抛的硬币出现反面朝上”，则我们可以从直觉上判别 A 与 B 相互独立。但是对于一些复杂事件来说，直觉上不易进行判别时，我们可以利用定义 1.6 中的关系式判别，也可以利用条件概率与无条件概率的相等关系判别。

例 1.26 从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，用事件 A 表示“抽到的是 K ”，事件 B 表示“抽到的是黑色的”，问事件 A 与 B 是否相互独立？

解 方法一： 因为

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

而

$$P(AB) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

显然有

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

因此事件 A 与 B 是相互独立的。

方法二： 因为

$$P(A) = \frac{1}{13}, \quad P(A|B) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

显然有

$$P(A|B) = P(A)$$

所以事件 A 与 B 是相互独立的。

关于事件 A 与 B 的独立性，则有如下性质。

性质 1 若 $P(A) > 0$ ，则 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B|A) = P(B)$ 。

值得注意的是，若 $P(A) = 0$ ，则事件 A 与任一事件 B 相互独立。

性质 2 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 B ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

证明 因为 A 与 B 相互独立，所以有

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

而

$$\begin{aligned} P(A\bar{B}) &= P(A(\Omega - B)) = P(A\Omega - AB) \\ &= P(A - AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\bar{B}) \end{aligned}$$

因此事件 A 与 $\bar{B}$ 相互独立, 于是也有 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立。

又因为 $\bar{\bar{B}} = B$, 所以 $\bar{A}$ 与 B 也相互独立。

性质 3 若 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则事件 A 、 B 相互独立与事件 A 、 B 互不相容是不能同时成立的。

证明 因为事件 A 、 B 相互独立, 所以有

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

而事件 A 、 B 互不相容, 则有 $AB = \Phi$, 于是 $P(AB) = 0$

因为 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 所以

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) > 0$$

与 $P(AB) = 0$ 是不能同时成立的。

例 1.27 甲乙两人独立地射击同一目标, 他们的命中率分别为 0.9 和 0.7, 现每人各射击一次, 求目标被击中的概率。

解 设事件 A 表示“甲击中目标”, 事件 B 表示“乙击中目标”, 事件 C 表示“目标被击中”, 于是有

$$P(A) = 0.9, \quad P(B) = 0.7, \quad \text{且 } C = A + B$$

因此有

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A + B) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.9 + 0.7 - 0.9 \times 0.7 = 0.97 \end{aligned}$$

下面将事件的独立性推广到三个或三个以上事件的独立性。

定义 1.7 设 A, B, C 是任三个事件, 如果满足

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(BC) = P(B)P(C), \quad P(AC) = P(A)P(C)$$

则称事件 A, B, C 两两独立。

定义 1.8 设事件 A, B, C 两两独立, 且有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称事件 A, B, C 相互独立。

一般地, 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n ($n \geq 2$) 个事件, 如果对于其中任意 2 个、任意 3 个、……、任意 n 个事件的积事件的概率, 都等于各事件概率之积, 则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立。

由上面定义可得以下两个推论:

推论 1 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立, 则其中 k 个 ($2 \leq k \leq n$) 事件也相互独立。

推论 2 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) 相互独立, 则将 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件后, 所得的个事件仍相互独立。

例 1.28 设有甲乙丙三门高射炮同时独立地向同一目标射击, 它们的命中率分别为 0.6、0.5 和 0.8, 问目标被击中的概率。

解 用事件 A, B, C 分别表示“甲、乙、丙射击目标”，事件 D 表示“目标被击中”，则有

$$P(A)=0.6, \quad P(B)=0.5, \quad P(C)=0.8, \quad \text{且 } D=A+B+C$$

因此有

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A+B+C) \\ &= 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \\ &= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) \\ &= 1 - 0.4 \times 0.5 \times 0.2 = 0.96 \end{aligned}$$

或者 $P(D) = P(A+B+C)$

$$\begin{aligned} &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.6 + 0.5 + 0.8 - 0.6 \times 0.5 - 0.5 \times 0.8 - 0.6 \times 0.8 + 0.6 \times 0.5 \times 0.8 \\ &= 0.96 \end{aligned}$$

例 1.29 设有 n 个人独立地破译同一密码，若每人能译出的概率都是 0.96，现在要求以 99.99% 的把握将密码译出，问至少需要多少个人来破译？

解 设事件 A_i 表示“第 i 个人能译出” ($i=1, 2, \dots, n$)，事件 B 表示“密码能被译出”，则有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) \\ &= 1 - 0.04^n \geq 0.9999 \end{aligned}$$

于是有

$$n \geq \frac{\ln 0.0001}{\ln 0.04} \approx 2.86$$

因此至少需要 3 人就能以 99.99% 的把握将密码破译。

例 1.30 甲乙丙三人同时独立地对一架飞机进行射击，命中率分别是 0.4, 0.5, 0.6。已知飞机被一人击中后而被击落的概率为 0.2；被两人击中后而被击落的概率为 0.6；若三人都击中，则飞机必定被击落，求飞机被击落的概率。

解 设事件 A_i 表示“飞机被 i 人击中” ($i=1, 2, 3$)，事件 B_1, B_2, B_3 分别表示“甲乙丙击中飞机”，事件 C 表示“飞机被击落”，于是有

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 0.4, \quad P(B_2) = 0.5, \quad P(B_3) = 0.6 \\ P(C|A_1) &= 0.2, \quad P(C|A_2) = 0.6, \quad P(C|A_3) = 1 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3 \\ A_2 &= B_1 B_2 \bar{B}_3 + B_1 \bar{B}_2 B_3 + \bar{B}_1 B_2 B_3 \end{aligned}$$

$$A_3 = B_1 B_2 B_3$$

且 B_1, B_2, B_3 相互独立, 所以有

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3 + \bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3) \\ &= P(B_1 \bar{B}_2 \bar{B}_3) + P(\bar{B}_1 B_2 \bar{B}_3) + P(\bar{B}_1 \bar{B}_2 B_3) \\ &= P(B_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2)P(B_3) \\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.38 \end{aligned}$$

同理可得

$$P(A_2) = 0.38, \quad P(A_3) = 0.12$$

于是, 由全概率公式可得

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1)P(C|A_1) + P(A_2)P(C|A_2) + P(A_3)P(C|A_3) \\ &= 0.38 \times 0.2 + 0.38 \times 0.6 + 0.12 \times 1 \\ &= 0.424 \end{aligned}$$

二、伯努利 (Bernoulli) 概型

定义 1.9 如果在同一条件下, 对某个随机试验独立地重复做 n 次, 则称为 n 次独立重复试验。

例如, 在装有若干个小球的盒中, 有放回地任取一个, 把每次取球看作一次随机试验, 则 n 次取球就是 n 次独立重复试验。

定义 1.10 如果一个随机试验只有两个可能结果 A 和 $\bar{A}$, 则称它为伯努利试验。若将伯努利试验独立地重复做 n 次, 则称为 n 重 (或 n 次) 伯努利试验。

例如, 向上抛一枚均匀硬币, 观察其正面朝上还是反面朝上, 这就是一个伯努利试验。如果在相同条件下, 连续向上抛 n 次, 则为 n 重伯努利试验。

定理 1.5 设伯努利试验中随机事件 A 发生的概率为 p ($0 < p < 1$), 则在 n 重伯努利试验中, A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

证明 因为事件 A 恰好发生 k 次, 所以事件 $\bar{A}$ 发生 $n-k$ 次, 而由 $P(A) = p$ 可知

$$P(\bar{A}) = 1 - p$$

但是, A 发生的 k 次并未指出在这 n 次试验中的哪些 k 次, 于是由组合的计算可知, 事件 A 发生有 C_n^k 种不同方式。我们用 $P_n(k)$ 表示事件 A 发生 k 次的概率, 因此有

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n)$$

例 1.31 一射手向目标连续射击 5 次, 且每次命中率都为 0.7, 求恰好命中 3 次的概率。

解 显然这是一个 5 重伯努利试验, 设事件 A 表示 “命中目标”, 事件 B 表示 “恰好命中 3 次”, 则 $P(A) = 0.7$, $P(\bar{A}) = 0.3$, 因此有

$$P(B) = P_5(3) = C_5^3 \cdot (0.7)^3 \cdot (0.3)^2 = 0.3087$$

例 1.32 随机地掷一枚骰子, 连掷 6 次, 求

(1) 恰有一次出现 “6 点” 的概率;

(2) 恰有两次出现“6点”的概率;

(3) 至少有一次出现“6点”的概率。

解 显然这是一个6重伯努利试验, 设事件 A 表示“出现6点”, 则

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$$

(1) 恰有一次出现“6点”的概率为

$$P_6(1) = C_6^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0.402$$

(2) 恰有两次出现“6点”的概率为

$$P_6(2) = C_6^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.201$$

(3) 至少有一次出现“6点”的概率为

$$p = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.665$$

习题 1.6

1. 设事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, 试求下列事件的概率:

(1) $P(A+B)$; (2) $P(A+\bar{B})$; (3) $P(\bar{A}+\bar{B})$; (4) $P(\bar{A}\bar{B})$ 。

2. 设事件 A, B 相互独立, 已知只有事件 A 发生的概率和只有事件 B 发生的概率都为 $\frac{1}{4}$,

试求 $P(A)$ 和 $P(B)$ 。

3. 三人独立地破译一份密码, 能译出的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$, 问这份密码能被破译出来的

的概率是多少?

4. 若甲乙丙三人独立地向同一目标射击, 命中率分别为 0.3, 0.5, 0.7, 求:

(1) 至少有一人击中目标的概率;

(2) 目标恰好被击中两次的概率。

5. 设在 3 次独立试验中, 事件 A 出现的概率均相等, 且至少出现 1 次的概率为 $\frac{19}{27}$, 求

在 1 次试验中, 事件 A 出现的概率为多少?

6. 设事件 A, B, C 相互独立, 证明 A 与 $B+C$ 也相互独立。

总复习题

一、填空题

1. 设事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B) = 0.5$, $P(A-B) = 0.3$, 则 $P(B-A) =$ _____。

2. 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个黄球、30 个白球, 现有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率为_____。

3. 设在 3 次独立试验中, 事件 A 出现的概率均相等, 且至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$, 则在一次试验中, A 出现的概率为_____。

4. 设 A, B 为任意两个随机事件, 则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} =$ _____。

二、选择题

1. 设 A, B 为两个互斥事件, 且 $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, 则下列结论正确的是_____。

- (A) $P(B|A) > 0$ (B) $P(A|B) = 0$
(C) $P(A|B) = P(A)$ (D) $P(AB) = P(A)P(B)$

2. 设事件 A, B 满足 $P(B|A) = 1$, 则_____。

- (A) A 为必然事件 (B) $B \subset A$
(C) $A \subset B$ (D) $P(A\bar{B}) = 0$

3. 设 A, B 为两事件, 且 $P(AB) = 0$, 则_____。

- (A) A 与 B 互不相容 (B) AB 是不可能事件
(C) AB 未必是不可能事件 (D) $P(A) = 0$ 或 $P(B) = 0$

4. 事件 A, B 相互独立的充要条件是_____。

- (A) $A+B=\Omega$ (B) $AB=\emptyset$
(C) $P(AB) = P(A)P(B)$ (D) $P(A+B) = P(A) + P(B)$

5. 设 n 张奖券中含有 m 张有奖的, k 个人购买, 每人一张, 其中至少有一个人中奖的概率为_____。

- (A) $1 - \frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$ (B) $\frac{m}{C_n^k}$
(C) $\frac{C_m^1 \cdot C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$ (D) $\sum_{r=1}^k \frac{C_m^r}{C_n^k}$

6. 设 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, 且 $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 则_____。

- (A) A 与 B 互不相容 (B) A 与 B 相互对立
(C) A 与 B 互不独立 (D) A 与 B 相互独立

7. 某人射击中靶的概率为 p ($0 < p < 1$), 则他在第 2 次中靶之前已经失败 3 次的概率为_____。

- (A) $4p^2(1-p)^3$ (B) $4p(1-p)^3$
(C) $10p^2(1-p)^3$ (D) $p^2(1-p)^3$

三、计算题

1. 把 10 本书随意地放在书架上, 求其中指定的 5 本书放在一起的概率。

2. 从1~100的这100个整数中任取一个, 求取到的整数能被3或被5整除的概率。
3. 向正方形区域 $\Omega = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ 中随机投一点 $M(x, y)$, 求:
 - (1) 方程 $t^2 + xt + y = 0$ 有两个实根的概率;
 - (2) 方程 $t^2 + xt + y = 0$ 有两个正实根的概率;
4. 设一批产品中有一、二、三等品各占50%, 30%, 20%, 现从中任取一件, 发现不是一等品, 求取到的这件产品是三等品的概率。
5. 为了防止意外, 在矿内同时装有两种报警系统 A 和 B , 每种系统单独使用时, 其有效的概率 A 为0.92, B 为0.93, 且在 A 失灵的条件下, B 有效的概率为0.85, 求:
 - (1) 发生意外时, 这两个报警系统至少一个有效的概率;
 - (2) B 失灵的条件下, A 有效的概率。
6. 在10件产品中有8件正品和2件次品, 现每次从中任取一件且取后不放回, 求下列事件的概率:
 - (1) 前两次均为正品;
 - (2) 第二次取到次品;
 - (3) 若已知第二次取到次品, 则第一次也取到次品。
7. 某发报台分别以概率为0.7和0.3发出信号“·”和“-”, 由于通信系统受到干扰, 当发出信号“·”时, 收报台未必收到信号“·”, 而是分别以概率0.9和0.1收到信号“·”和“-”; 同样, 当发出信号为“-”时, 收报台分别以概率0.8和0.2收到信号“-”和“·”, 试求:
 - (1) 收报台收到信号“·”的概率;
 - (2) 当收报台收到信号“·”时, 发报台发出信号“·”的概率。
8. 加工某一零件共需要经过四道工序, 设第一、二、三、四道工序的次品率分别是0.02, 0.03, 0.05和0.03; 假设各个工序是互不影响的, 求加工出来的零件是次品的概率。
9. 设随机事件 A, B 相互独立, 且 A, B 都不发生的概率为 $\frac{4}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 A 不发生 B 发生的概率相等, 求 $P(A)$ 和 $P(B)$ 。
10. 三人独立地各投篮一次, 他们的命中率分别为0.4, 0.6和0.7, 求:
 - (1) 至少有一人投中的概率;
 - (2) 恰好投中两次的概率。
11. 一射手命中10环的概率为0.7, 命中9环的概率为0.3, 求该射手打3发得到不少于29环的概率。