第 3 章　图像的频率域增强

3.1　一维离散数列的傅里叶变换

在第 1 章中介绍了连续函数的傅里叶变换，现在由连续函数的傅里叶变换推导出离散数列的傅里叶变换。已知一维连续函数 $f(x)$ 的傅里叶变换公式为：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux}\mathrm{d}x \tag{3-1}$$

它的逆变换公式为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ux}\mathrm{d}u \tag{3-2}$$

连续信号 $f(x)$ 按坐标 x 的等间隔 Δx 取样后的 $f(n\Delta x)$ $(n=0,\pm1,\cdots)$ 就成为离散数列。$f(x)$ 按 x 的等间隔 Δx 取样可以用取样函数

$$s_{\Delta x}(x)=\sum_{n=0,\pm1,\cdots}\delta(x-n\Delta x) \tag{3-3}$$

来实现，其中 $\delta(x-n\Delta x)$ 是 δ 函数。令

$$\tilde{f}(x)=f(x)s_{\Delta x}(x)=\sum_{n=0,\pm1,\cdots} f(x)\delta(x-n\Delta x) \tag{3-4}$$

虽然 $\tilde{f}(x)$ 仍是连续函数，但它同离散数列 $\{f(n\Delta x),n=0,\pm1,\cdots\}$ 已十分接近，仅相差一个积分步骤：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0,\pm1,\cdots}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-n\Delta x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0,\pm1,\cdots} f(n\Delta x) \tag{3-5}$$

可以把 $\tilde{f}(x)$ 看成是连续函数 $f(x)$ 按等间隔 Δx 取样后得到的离散数列 $\{f(n\Delta x),n=0,\pm1,\cdots\}$ 的模拟。由于 $\tilde{f}(x)$ 是连续函数，故可以按式（3-1）来计算它的傅里叶变换：

$$\begin{aligned}\Im\{\tilde{f}(x)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux}\mathrm{d}x=\sum_{n=0,\pm1,\cdots}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0,\pm1,\cdots} f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi un\Delta x}\equiv\tilde{F}(u)\end{aligned} \tag{3-6}$$

可以证明，$\tilde{F}(u)$ 是一个周期为 $u_{\mathrm{s}}=1/\Delta x$ 的周期函数：

$$\tilde{F}(u-ku_{\mathrm{s}})=\tilde{F}(u),\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3-7}$$

$$\tilde{F}(u-ku_{\mathrm{s}})=\sum_{n=0,\pm1,\cdots}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(u-ku_{\mathrm{s}})n\Delta x}=\sum_{n=0,\pm1,\cdots}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi un\Delta x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn}$$
$$=\sum_{n=0,\pm1,\cdots}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi un\Delta x}=\tilde{F}(u)\qquad(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn}=1)$$

不失一般性，考虑以下情况：①连续函数 $f(x)$ 是实函数。② $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(u)$ 的频谱宽度为 B（全宽度为 $2B$），即当 $|u|>B$ 时，$F(u)=0$。根据取样定理，取样间隔 $\Delta x<1/(2B)$，或取样频率（在 x 的单位间隔内取样点的数目）$u_{\mathrm{s}}=1/\Delta x>2B$。③对于非周期函数 $f(x)$，在 x 空间的一个宽度为 C 的区域内，$f(x)\neq 0$，在此区域外 $f(x)=0$。将坐标原点 $x=0$ 取在 $f(x)\neq 0$ 区域的最左边，即 $f(x)\neq 0$ 的区域为 $x=0$～C。由取样间隔 Δx，可以算出取样点的总数为 $M=C/\Delta x$。对 Δx 做微小变动，如 Δx 减小一点，使 M 成为偶的整数。取样函数式（3-3）变为

$$s_{\Delta x}(x)=\sum_{n=0}^{M-1}\delta(x-n\Delta x) \tag{3-8}$$

④对于周期为 L 的周期函数 $f(x)$，取样点限于一个周期内，取样点的总数为 $M=L/\Delta x$。用同样方法使 M 成为偶的整数，取样函数也用式（3-8）表示。无论 $f(x)$ 是否是周期函数，$\tilde{f}(x)$ 均可表示为

$$\tilde{f}(x)=f(x)s_{\Delta x}(x)=\sum_{n=0}^{M-1}f(x)\delta(x-n\Delta x) \tag{3-9}$$

现在 $\tilde{f}(x)$ 的傅里叶变换式（3-6）表示为

$$\Im\{\tilde{f}(x)\}=\tilde{F}(u)=\sum_{n=0}^{M-1}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi un\Delta x} \tag{3-10}$$

已知 $f(x)$ 的傅里叶频谱 $F(u)$ 的全宽度为 $2B$，频率 u 的取值范围是 $u=-B$～B。由式（3-7）知，作为离散数列 $f(n\Delta x)(n=0,1,\cdots,M-1)$ 模拟的连续函数

$$\tilde{f}(x)=\sum_{n=0}^{M-1}f(x)\delta(x-n\Delta x) \tag{3-11}$$

在傅里叶变换下得到的频谱 $\tilde{F}(u)=\tilde{F}(u-ku_{\mathrm{s}})(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是周期为 $u_{\mathrm{s}}=1/\Delta x$ 的周期连续函数。在 $k=0$ 的第一个周期中，$\tilde{F}(u)$ 的全宽度是周期 $u_{\mathrm{s}}=1/\Delta x$，频率 u 的取值范围是 $u=-u_{\mathrm{s}}/2$～$u_{\mathrm{s}}/2$。由于 $u_{\mathrm{s}}>2B$，$\tilde{F}(u)$ 的频谱必定包含了 $f(x)$ 的全部频谱。然而，$\tilde{F}(u)$ 只是连续函数 $\tilde{f}(x)$ 的连续频谱，还不是离散数列 $f(n\Delta x)(n=0,1,\cdots,M-1)$ 的离散频谱。当连续函数 $\tilde{f}(x)$ 变成坐标 x 空间中含有间隔为 Δx 的 M 个元素的离散数列 $\{f(n\Delta x),n=0,1,\cdots M-1\}$ 时，$\tilde{F}(u)$ 应该变成频率 u 空间中含有间隔为 $\Delta u=u_{\mathrm{s}}/M$ 的 M 个元素的离散数列 $F(m\Delta u)(m=0,1,\cdots,M-1)$。将 $u=m\Delta u=mu_{\mathrm{s}}/M$ 代入式（3-10），得

$$F(m\Delta u)=\sum_{n=0}^{M-1} f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m\Delta u n\Delta x}=\sum_{n=0}^{M-1} f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m u_{\mathrm{s}} n\Delta x/M}$$

再将 $u_{\mathrm{s}}=1/\Delta x$ 代入上式，得

$$F(m\Delta u)=\sum_{n=0}^{M-1} f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} \tag{3-12}$$

这就是离散数列 $\{f(n\Delta x);n=0,1,\cdots,M-1\}$ 的傅里叶变换。可以证明，式（3-12）的逆变换为

$$f(n\Delta x)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F(m\Delta u)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M}, \qquad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-13}$$

令 $f(n\Delta x)\equiv f(n)$，$F(m\Delta u)\equiv F(m)$，离散数列 $\{f(n);n=0,1,\cdots,M-1\}$ 的傅里叶变换式（3-12）与它的逆变换式（3-13）简化为

$$F(m)=\sum_{n=0}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M},\quad m=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-14}$$

$$f(n)=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M},\quad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-15}$$

在前面推导出离散数列 $\{f(n);n=0,1,\cdots,M-1\}$ 的傅里叶变换式（3-12）或式（3-14）时，还不能肯定这个公式一定正确。因为这里有主观推断：认为当 $\tilde{f}(x)$ 变成 x 空间间隔为 Δx 的 M 个 $f(n)(n=0,1,\cdots,M-1)$ 时，$\tilde{F}(u)$ 应变成 u 空间间隔为 $\Delta u=u_{\mathrm{s}}/M=1/(\Delta x M)$ 的 M 个 $F(m)(m=0,1,\cdots,M-1)$。只有在 $\{f(n);n=0,1,\cdots,M-1\}$ 的傅里叶变换 $\{F(m);m=0,1,\cdots,M-1\}$ 是正确的条件下，才能由它组合成 $\{f(n);n=0,1,\cdots,M-1\}$。考虑到傅里叶变换 $F(m)$ 的总体大小并不重要，重要的是不同 m 的 $F(m)$ 相对大小。因此，式（3-15）中的常数因子 $1/M$ 可以转移到式（3-14）中，

$$F(m)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M},\quad m=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-16}$$

$$f(n)=\sum_{m=0}^{M-1} F(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M},\quad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-17}$$

也可以在正反（逆）傅里叶变换公式中都放上同一个因子 $1/\sqrt{M}$，

$$F(m)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{n=0}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M},\quad m=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-18}$$

$$f(n)=\frac{1}{\sqrt{M}}\sum_{m=0}^{M-1} F(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M},\quad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{3-19}$$

显然，离散数列的傅里叶变换总是存在的。这里要强调的是，$F(m)$ 是 $F(m\Delta u)$ 的简化式，它表示频率为 $u=m\Delta u=m/M\Delta x$ 的相对强度。由于 $m=0,1,\cdots,M-1$，可以

得到 M 个不同频率的相对强度，这 M 个频率叫作测量频率或分析频率。

一维离散数列傅里叶变换有以下一些性质：

（1）设 $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 的傅里叶变换分别是 $F_1(m)$ 与 $F_2(m)$，则 $af_1(n)+bf_2(n)$ 的傅里叶变换是 $aF_1(m)+bF_2(m)$，其中 a 与 b 是常数。这是傅里叶变换的线性特性。这个性质是显然的。

（2）离散数列傅里叶变换 $F(m)$ 是周期为 M 的周期函数：

$$F(m-kM)=F(m)\text{，}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3-20}$$

这是因为

$$F(m-kM)=\sum_{n=0}^{M-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(m-kM)n/M}=\sum_{n=0}^{M-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn}$$

其中 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi kn}=1$，故有 $F(m-kM)=F(m)$。类似地，由傅里叶逆变换式（3-15）确定的 $f(n)$ 也是周期为 M 的周期函数：

$$f(n-kM)=f(n)\text{，}\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{3-21}$$

这很容易证明：

$$\begin{aligned}f(n-kM)&=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}F(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m(n-kM)/M}=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}F(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mk}\\&=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}F(m)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M}=f(n),\quad(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mk}=1)\end{aligned}$$

如果 $f(n)$ 原来就是周期离散数列，这个结果是很自然的。如果 $f(n)$ 原来是非周期离散数列，这个结果表示，为了符合离散数列傅里叶变换的性质，$f(n)$ 应该扩展为周期离散数列 $f(n-kM)=f(n)$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

（3）对于周期离散数列 $f(n)=f(n-kM)$，$k=0,\pm1,\cdots$，可以证明，用任一点作为起始点来计算一个完整周期的离散数列的傅里叶变换，结果都是一样的。式（3-14）是以 $n=0$ 作为起始点来计算一个完整周期离散数列的傅里叶变换的。令 l 是小于 M 的正整数，计算以 $n=-l$ 为起始点的一个完整周期的离散数列 $f(n)$ 的傅里叶变换，

$$F'(m)=\sum_{n=-l}^{M-1-l}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M}=\sum_{n=-l}^{-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M}+\sum_{n=0}^{M-1-l}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} \tag{3-22}$$

式中，

$$\begin{aligned}\sum_{n=-l}^{-1}f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M}&=f(-l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(-l)/M}+f(-l+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(-l+1)/M}+\cdots\\&\quad+f(-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(-1)/M}\end{aligned} \tag{3-23}$$

利用 $f(n)$ 的周期性 $f(n)=f(n+M)$，以及 $1=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mM/M}$，将上式每一项中的 $f(n)$ 变为 $f(n+M)$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M}$ 乘以 $1=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mM/M}$，得

$$\sum_{n=-l}^{-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} = f(M-l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(M-l)/M} + f(M-l+1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(M-l+1)/M} + \cdots + f(M-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(M-1)/M} = \sum_{n=M-l}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} \tag{3-24}$$

将式（3-24）代入式（3-22），得

$$F'(m) = \sum_{n=-l}^{M-1-l} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} = \sum_{n=0}^{M-l-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} + \sum_{n=M-l}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} = \sum_{n=0}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} = F(m)$$

对于周期的离散数列的傅里叶逆变换式（3-15）也一样，可以用 m 的任一值作为起点来计算一个周期的 $f(n)$ 值。

（4）$F(m)$ 的复共轭 $F^*(m) = F(-m)$，$|F(m)| = |F(-m)|$。这是因为 $f(n)$ 是实数，

$$F^*(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M} = \sum_{n=0}^{M-1} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(-m)n/M} = F(-m) \tag{3-25}$$

对上式再进行一次复共轭，得 $F(m) = F^*(-m)$，故有

$$|F(m)| = \sqrt{F^*(m)F(m)} = \sqrt{F(-m)F^*(-m)} = |F(-m)| \tag{3-26}$$

（5）利用以上两个性质，$F^*(m) = F(-m) = F(M-m)$，对上式再进行一次复共轭，得 $F(m) = F^*(M-m)$。于是

$$|F(m)| = \sqrt{F^*(m)F(m)} = \sqrt{F(M-m)F^*(M-m)} = |F(M-m)| \tag{3-27}$$

这一性质表示，式（3-14）的 M 个 $F(m)$ 中有大约一半是重复的。只需计算 $m \leqslant M/2$ 的 $F(m)$。其实 $m > M/2$ 的 $F(m)$ 是没有意义的，因为与 $m > M/2$ 相应的频率 $u_m = mu_s/M > B$，超出了 $f(x)$ 的频谱范围，是 $f(x)$ 因取样而产生的假频，是 $f(x)$ 频谱 $F(u)$ 中的负频（$u = -B$～0）向正频方向移动一个周期 $M\Delta x$ 得到的假频。

（6）设 $f(n)$ 的傅里叶变换为 $F(m)$，则有位移 n' 的 $f(n-n')$ 的傅里叶变换为 $F(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn'/M}$，有位移 m' 的 $F(m-m')$ 的傅里叶逆变换为 $f(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m'n/M}$：

$$\Im\{f(n-n')\} = \sum_{n=0}^{M-1} f(n-n')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/M} = \sum_{t=-n'}^{M-1-n'} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi m(t+n')/M} = \sum_{t=0}^{M-1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mt/M}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn'/M} = F(m)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn'/M} \tag{3-28}$$

$$\Im^{-1}(F(m-m')) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} F(m-m')\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi mn/M} = \frac{1}{M}\sum_{t=-m'}^{M-1-m'} F(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(t+m')n/M} = \frac{1}{M}\sum_{t=0}^{M-1} F(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi tn/M}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m'n/M} = f(n)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi m'n/M} \tag{3-29}$$

在以上证明中，用到了性质（3）。

（7）设 $f(n)$ 与 $g(n)$ 的傅里叶变换分别为 $F(m)$ 与 $G(m)$，则有以下两个性质：

（a） $f(n)$ 与 $g(n)$ 卷积的傅里叶变换等于 $F(m)$ 与 $G(m)$ 的乘积：

$$\Im\{f(n) * g(n)\} = F(m)G(m) \tag{3-30}$$

（b） $f(n)$ 与 $g(n)$ 乘积的傅里叶变换等于 $F(m)$ 与 $G(m)$ 的卷积：

$$\Im\{f(n)g(n)\} = F(m) * G(m) \tag{3-31}$$

［示例 3-1］ 对连续信号函数 $f(x) = 2\sin(2\pi f_1 x) + \sin(2\pi f_2 x + \pi/4)$ 进行 10 点取样，再进行离散数列的傅里叶变换，其中 x 是时间，单位为秒，$f_1 = 1\text{kHz}, f_2 = 2\text{kHz}$。

$f(x)$ 是周期为 $T = 1/f_1 = 10^{-3}$ 秒的周期函数。在一个周期内进行 10 点取样，取样间隔 $\Delta x = T/10 = 10^{-4}$ 秒，取样频率 $u_s = 1/\Delta x = 10^4$ 点/秒。令 $x = n\Delta x, n = 0,1,\cdots,9$。

$$f(n) \equiv f(n\Delta x) = 2\sin(2\pi f_1 n\Delta x) + \sin(2\pi f_2 n\Delta x + \pi/4)$$

将 f_1, f_2 与 Δx 的值代入上式，得

$$f(n) = 2\sin(0.2\pi n) + \sin(0.4\pi n + 0.25\pi)$$

由上式算出，

$$f(0) = 0.7071, f(1) = 2.0666, f(2) = 1.7458, f(3) = 0.9144, f(4) = 0.7216,$$
$$f(5) = 0.7071, f(6) = -0.2846, f(7) = -2.0586, f(8) = -2.8898, f(9) = -1.6296$$

$f(n)$ 的傅里叶变换公式为

$$\begin{aligned} F(m) &= \sum_{n=0}^{9} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/10} = \sum_{n=0}^{9} f(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.2\pi mn} \\ &= \sum_{n=0}^{9} f(n)[\cos(0.2\pi mn) - \mathrm{j}\sin(0.2\pi mn)] \end{aligned}$$

其中，$m = 0,1,\cdots,9$。我们只需要计算 $m \leqslant 5$ 的 $F(m)$。$F(m)$ 中的 m 表示分析频率 $u_m = mu_s/M = m\text{kHz}$。将 $f(n)$ 的值代入上式算出，除 $F(1) = 10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$ 与 $F(2) = 5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}$ 外，其他 $F(m) = 0$。$f(n)$ 的傅里叶频谱包含 $u_1 = 1\text{kHz}$ 与 $u_2 = 2\text{kHz}$ 两个成分，它们的强度之比为 $|F(1)|/|F(2)| = 2$。这同 $f(x)$ 中含有频率为 $f_1 = 1\text{kHz}$ 与 $f_2 = 2\text{kHz}$ 的两个正弦函数，并且它们的振幅之比为 2 是相符的。

［示例 3-2］ 令取样频率 $u_s = 32000$ 点/秒。对频率为 $f_1 = 8\text{kHz}$ 与 $f_2 = 8.5\text{kHz}$ 的两个正弦函数 $f_1(x) = \sin(2\pi f_1 x)$ 与 $f_2(x) = \sin(2\pi f_2 x)$ 分别进行 32 点取样，再进行离散数列的傅里叶变换。

取样间隔 $\Delta x = 1/u_s = 3.125 \times 10^{-5}$ 秒。令 $x = n\Delta x, n = 0,1,\cdots,31$。

$$f_1(n) = \sin(2\pi f_1 n\Delta x) = \sin(n\pi/2)$$

$$F(m)=\sum_{n=0}^{31}f_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/32}=\sum_{n=0}^{31}f_1(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi mn/16}$$
$$=\sum_{n=0}^{31}\sin(n\pi/2)[\cos(\pi mn/16)-\mathrm{j}\sin(\pi mn/16)]$$
$$m=0,1,2,\cdots,31$$

只要计算 $m=0,1,\cdots,16$ 的 $F(m)$ 。 $F(m)$ 中的 m 表示分析频率

$$u_m=mu_\mathrm{s}/M=m\mathrm{kHz}，\quad m=0,1,2,\cdots,31$$

由上述 $F(m)$ 的计算公式算出，除 $F(8)=-\mathrm{j}16$ 外，其他 $F(m)=0$ 。这表示 $f_1(n)$ 的傅里叶频谱只包含频率 $u_8=8\mathrm{kHz}$ 一个成分。这同 $f_1(x)=\sin(2\pi f_1x)$ 是相符的。再计算 $f_2(x)$ 的傅里叶变换：

$$F(m)=\sum_{n=0}^{31}f_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi mn/32}=\sum_{n=0}^{31}f_2(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi mn/16}$$
$$=\sum_{n=0}^{31}\sin(0.53125\pi n)[\cos(\pi mn/16)-\mathrm{j}\sin(\pi mn/16)]$$

其中 $m=0,1,\cdots,16$ 。分析频率 $u_m=mu_\mathrm{s}/M=m\mathrm{kHz}$ 。由上式算出的 $F(m)$ 列于表 3-1。

表 3-1　由示例 3-2 的 $f_2(x)$算出的 $F(m)$，表中 $F(m)$的单位是 kHz

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(m)$	0.91	0.92	0.97	1.07	1.24	1.52	2.07	3.40	10.15
m	9	10	11	12	13	14	15	16	
$F(m)$	−10.24	−3.50	2.17	1.63	−1.36	1.21	1.13	−1.10	

由示例 3-1 与示例 3-2 可以看出，当输入信号频率 f 等于分析频率 $u_m=mu_\mathrm{s}/M$ 中的某一个 u_{m_0} 时，它使 $F(m_0)\neq0$，其他 $F(m)=0$；当输入信号频率 f 不等于分析频率 $u_m=mu_\mathrm{s}/M$ 中的任一个时，它使所有 $F(m)\neq0$ ，但 $F(m)$ 的取值是有规律的，u_m 同 f 最近的频谱$|F(m)|$最大，随 u_m 同 f 偏离加大，$|F(m)|$很快变小，当 u_m 同 f 的偏离较大时，$|F(m)|$可以忽略不计。可以通过$|F(m)|$相对 m 的分布图，由分布曲线的峰值来测定频率 f 。图 3-1 给出示例 3-2 的$|F(m)|\sim m$ 分布图，由$|F(m)|$分布曲线的峰值测定 $f_2(x)$ 的频率是 $f_2=8.5\mathrm{kHz}$ 。这正是应该有的结果。由$|F(m)|$的分布曲线的峰值来测定频率 f 是近似的。因输入信号频率 f 不等于分析频率 u_m 而使所有 $F(m)\neq0$ 的现象，叫作泄漏。泄漏是离散数列的傅里叶变换特有的性质，它使频率的测量是近似的。

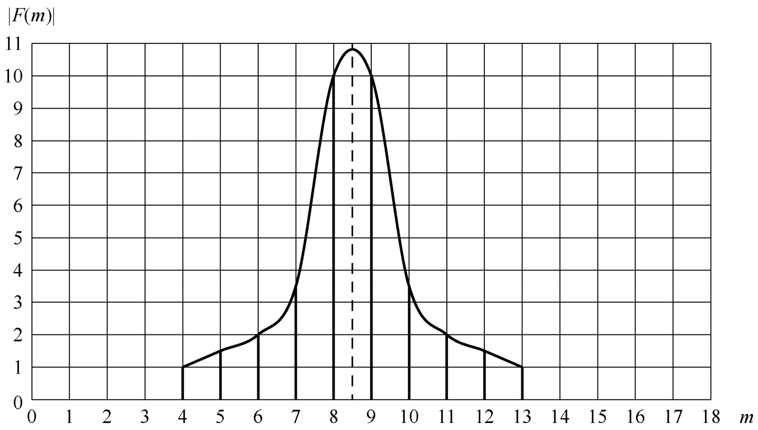


图 3-1　$|F(m)|\sim m$ 分布图

3.2　二维离散数列的傅里叶变换

在1.2 节中给出了二维连续函数 $f(x.y)$ 的傅里叶变换公式为

$$F(u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3-32}$$

它的逆变换公式为

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3-33}$$

式中，u 是 x 方向的频率，表示在 x 方向单位间隔内周期函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi ux}$ 变化的周期数；v 是 y 方向的频率，表示在 y 方向单位间隔内周期函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi uy}$ 变化的周期数。一幅矩形图像信号 $f(x,y)$ 通过 x 与 y 两个方向的等间隔 $\Delta x=\Delta y$ 取样后，成为二维离散数列 $\{f(n\Delta x,l\Delta y);n=0,1,\cdots,M-1,l=0,1,\cdots,N-1\}$，其中 M 是图像在 x 方向一列像素的个数，N 是图像在 y 方向一行像素的个数。上述图像的取样可以通过如下取样函数来实现：

$$S_{\Delta x\Delta y}(x,y)=\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\delta(x-n\Delta x,y-l\Delta y) \tag{3-34}$$

其中 $\delta(x-n\Delta x,y-l\Delta y)=\delta(x-n\Delta x)\delta(y-l\Delta y)$，令

$$\tilde{f}(x,y)=f(x,y)S_{\Delta x\Delta y}(x,y)=\sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}f(x,y)\delta(x-n\Delta x,y-l\Delta y) \tag{3-35}$$

$\tilde{f}(x,y)$ 是十分接近离散数列 $\{f(n\Delta x,l\Delta y)$；$n=0,1,\cdots,M-1,l=0,1,\cdots,N-1\}$ 的连续函数，二者只相差一个积分步骤：

$$\iint_{\infty} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\iint_{\infty} f(x,y)\delta(x-n\Delta x, y-l\Delta y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} f(n\Delta x, l\Delta y)$$

$\tilde{f}(x,y)$ 作为连续函数，可以由式（3-32）求出它的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u,v) &= \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x-n\Delta x, y-l\Delta y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} f(n\Delta x, l\Delta y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(un\Delta x+vl\Delta y)}\end{aligned} \tag{3-36}$$

$\tilde{F}(u,v)$ 是频率 (u,v) 空间的连续函数。当坐标空间的连续函数 $\tilde{f}(x,y)$ 变成总个数为 MN 的离散数列 $\{f(n\Delta x,l\Delta y)$； $n=0,1,\cdots,M-1, l=0,1,\cdots,N-1\}$ 时， $\tilde{F}(u,v)$ 应该变成频率空间总个数也是 MN 的离散数列 $\{F(m\Delta u,k\Delta v); m=0,1,\cdots,M-1, k=0,1,\cdots,N-1\}$，其中

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x},\quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y} \tag{3-37}$$

在式（3-36）中，令 $u=m\Delta u = m/M\Delta x, v=k\Delta v = k/N\Delta y$ ，得二维离散数列 $\{f(n\Delta x,l\Delta y)\}$ 的傅里叶变换

$$F(m\Delta u,k\Delta v) = \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} f(n\Delta x,l\Delta y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(mn/M+kl/N)} \tag{3-38}$$

$$m=0,1,\cdots,M-1；\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

可以证明式（3-38）的傅里叶逆变换为

$$f(n\Delta x,l\Delta y) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} F(m\Delta u,k\Delta v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(mn/M+kl/N)} \tag{3-39}$$

$$n=0,1,\cdots,M-1；\quad l=0,1,\cdots,N-1$$

令 $f(n\Delta x,l\Delta y)\equiv f(n,l), F(m\Delta u,k\Delta v)\equiv F(m,k)$ ，以上两式简化为

$$F(m,k) = \sum_{n=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} f(n,l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(mn/M+kl/N)} \tag{3-40}$$

$$m=0,1,\cdots,M-1；\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$f(n,l) = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} F(m,k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(mn/M+kl/N)} \tag{3-41}$$

$$n=0,1,\cdots,M-1；\quad l=0,1,\cdots,N-1$$

从现在起，不再考虑连续函数，只考虑离散数列。为了能清楚显示离散数列是什么空间的，将坐标 (x,y) 空间的离散数列 $\{f(n,l); n=0,1,\cdots,M-1, l=0,1,\cdots,N-1\}$ 表示为 $\{f(x,y)$； $x=0,1,\cdots,M-1$， $y=0,1,\cdots,N-1\}$ ；将频率 (u,v) 空间的离散数列 $\{F(m,k)$ ； $m=0,1,\cdots,M-1$， $k=0,1,\cdots,N-1\}$ 表示为 $\{F(u,v); u=0,1,\cdots,M-1, v=0,1,\cdots,N-1\}$ 。于是，坐标 (x,y) 空间的离散数列 $\{f(x,y); x=0,1,\cdots,M-1, y=0,1,\cdots,$

$N-1\}$的傅里叶变换为：

$$F(u,v)==\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)} \tag{3-42}$$

$$u=0,1,\cdots,M-1；\quad v=0,1,\cdots,N-1$$

它的逆变换为：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)} \tag{3-43}$$

$$x=0,1,\cdots,M-1；\quad y=0,1,\cdots,N-1$$

二维离散数列$f(x,y)$的傅里叶变换$F(u,v)$具有如下性质。这里只给出性质，不给出证明，证明的方法与前述一维离散数列傅里叶变换性质的证明方法相同。

（1）$F(u,v)$在u与v方向都是周期函数，周期分别是M与N：

$$F(u,v)=F(u+k_1M,v)=F(u,v+k_2N)=F(u+k_1M,v+k_2N) \tag{3-44}$$

$$k_1,k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

由$F(u,v)$的逆变换式（3-43）求出的$f(x,y)$在x与y方向也都是周期函数，周期也分别是M与N：

$$f(x,y)=f(x+k_1M,y)=f(x,y+k_2N)=f(x+k_1M,y+k_2N) \tag{3-45}$$

$$k_1,k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

原来的$f(x,y)$不一定是周期函数，而由它的傅里叶变换$F(u,v)$再进行逆变换得到的$f(x,y)$却变成了周期函数。为了符合傅里叶变换的这一特性，我们应该将原始的非周期函数$f(x,y)$扩展为周期函数。

（2）如果$f(x,y)$是实数离散数列，则它的傅里叶变换$F(u,v)$是共轭对称的，即

$$F^*(u,v)=F(-u,-v)，\quad |F(u,v)|=|F(-u,-v)| \tag{3-46}$$

利用性质（1），$F^*(u,v)=F(-u,-v)=F(M-u,N-v)$，便有

$$|F(u,v)|=|F(M-u,N-v)| \tag{3-47}$$

式（3-47）表示，不必计算$u>M/2,v>N/2$的$|F(u,v)|$。因为它们可以由$u<M/2$，$v<N/2$的$|F(u,v)|$决定。其实$u>M/2$，$v>N/2$的频率已超出了正常值的范围。根据取样定理，x方向的取样频率$u_x=1/\Delta x>2B_x$，y方向的取样频率$u_y=1/\Delta y>2B_y$，B_x与B_y分别是连续图像$f(x,y)$的傅里叶频谱在u方向与v方向的宽度（正频部分）。u大于$M/2$的频率是指x方向大于$(M/2)\Delta u=(M/2)(1/M\Delta x)=1/(2\Delta x)=u_x/2>B_x$的频率；$v$大于$N/2$的频率是指$y$方向大于$(N/2)\Delta v=(N/2)(1/N\Delta y)=1/(2\Delta y)=u_y/2>B_y$的频率。可见，它们都超出了频率正常值的范围，不是真实的频率，是由于取样而产生的假频。实际上，它们是因$F(u,v)$的周期性，由真实的

负频$u=-B_x/2\sim0$与$v=-B_y/2\sim0$分别沿 u 与 v 的正方向平移一个周期M与N得到的假频。

（3）如果$f(x,y)$的傅里叶变换为$F(u,v)$，则$f(x-x_0,y-y_0)$的傅里叶变换为$F(u,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}$，$f(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\{u_0x/M+v_0y/N\}}$的傅里叶变换为$F(u-u_0,v-v_0)$。令$u_0=M/2,v_0=N/2$，

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\{u_0x/M+v_0y/N\}}&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(Mx/2M+Ny/2N)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(x+y)}\\&=\cos[\pi(x+y)]+\mathrm{j}\sin[\pi(x+y)]=(-1)^{x+y}\end{aligned}$$

这是因为$x+y$是整数，$\cos[\pi(x+y)]=(-1)^{x+y},\sin[\pi(x+y)]=0$。于是$f(x,y)(-1)^{x+y}$的傅里叶变换为$F(u-M/2,v-N/2)$。这表示，当$f(x,y)$乘以$(-1)^{x+y}$后，它的傅里叶变换等效于将$F(u,v)$沿 u 轴与 v 轴正方向分别移动了$M/2$与$N/2$。于是，在$u=0\sim M$，$v=0\sim N$的频率空间中心点$(u,v)=(M/2,N/2)$，显示的频谱是$F(0,0)$，而在原点$(u,v)=(0,0)$显示的是$F(-M/2,-N/2)$，在另外 3 个边界点$(u,v)=(0,N)$，$(M,0)$，(M,N)显示的是$F(-M/2,N/2)$，$F(M/2,-N/2)$，$F(M/2,N/2)$。现在，在全空间显示的正是取样前连续图像$f(x,y)$的傅里叶频谱的全部范围。

（4）二维离散数列$h(x,y)$与$f(x,y)$的卷积定义为：

$$h(x,y)*f(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}h(m,n)f(x-m,y-n) \tag{3-48}$$

这里假定数列$h(x,y)$与$f(x,y)$有相同的大小，都是$M\times N$的数列。如果它们的大小不同，则要将小的数列，通过在末尾补零的方法使二者大小相同。设$h(x,y)$与$f(x,y)$的傅里叶变换分别是$H(u,v)$与$F(u,v)$，则$h(x,y)*f(x,y)$的傅里叶变换是$H(u,v)F(u,v)$，而$h(x,y)f(x,y)$的傅里叶变换为：

$$H(u,v)*F(u,v)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}H(m,n)F(x-m,y-n) \tag{3-49}$$

3.3　周期离散函数的卷积

先考虑两个一维非周期离散函数$f(x)$与$h(x)$的卷积。设它们的变量取值范围相同，均为$x=0,1,2,\cdots,A-1$。$f(x)$与$h(x)$的卷积计算公式为：

$$g(x)=f(x)*h(x)=\sum_{m=0}^{A-1}f(m)h(x-m) \tag{3-50}$$

$$x=0,1,2,\cdots,A-1$$

其中$h(x-m)$是先将$h(m)$相对 m 轴的原点$m=0$进行反演变成$h(-m)$后，再将$h(-m)$沿 m 轴正方向移动 x 距离得到的。$h(m)$处于 m 轴正值区：$m=0\sim A-1$，而

$h(-m)$ 处于 m 轴负值区：$m=-A+1\sim0$，并且 $h(-m)$ 相对 $h(m)$ 是前后倒置的，将一个双面镜放在 $m=0$ 处并同 m 轴垂直，$h(m)$ 与 $h(-m)$ 的曲线图互为镜像。例如，$h(m)$ 的第一个值 $h(0)$ 成为 $h(-m)$ 的最后一个值，即 $m=0$ 的 $h(-m)=h(0)$。$h(m)$ 的第二个值 $h(1)$ 成为 $h(-m)$ 的倒数第二个值，即 $m=-1$ 的 $h(-m)=h(-(-1))=h(1)$。$h(m)$ 的最后一个值 $h(A-1)$ 成为 $h(-m)$ 的第一个值，即 $m=-A+1$ 的 $h(-m)=h(-(-A+1))=h(A-1)$。$h(-m)$ 与 $h(m)$ 分离，只在 $m=0$ 处相连。表 3-2 的第 2 行给出一个 $A=6$ 的离散函数 $h(m)$，第 3 行给出 $h(-m)$，第 4 行给出 $x=1$ 的 $h(1-m)$。从表中数据看出，$h(m)$ 与 $h(-m)$ 互为镜像，$h(1-m)$ 是 $h(-m)$ 沿 m 轴正方向移动1的结果。表中的第 5～8 行分别给出 $x=2-5$ 的 $h(x-m)$，显然它们是 $h(-m)$ 沿 m 轴正方向分别移动2～5 的结果。

表 3-2　$h(x-m)$与 $h(m)$的关系

m	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$h(m)$	0	0	0	0	0	1	2	3	4	2	1
$h(-m)$	1	2	4	3	2	1	0	0	0	0	0
$h(1-m)$	0	1	2	4	3	2	1	0	0	0	0
$h(2-m)$	0	0	1	2	4	3	2	1	0	0	0
$h(3-m)$	0	0	0	1	2	4	3	2	1	0	0
$h(4-m)$	0	0	0	0	1	2	4	3	2	1	0
$h(5-m)$	0	0	0	0	0	1	2	4	3	2	1

当 $h(-m)$ 沿 m 轴正方向移动 x 距离成为 $h(x-m)$ 时，$h(x-m)$ 进入 m 轴正值区，在 $x=0\sim x$ 区间同 $f(m)$ 重叠。在卷积计算公式的求和项 $f(m)h(x-m)$ 中，只有 $h(x-m)$ 同 $f(m)$ 重叠的项才对卷积 $g(x)$ 有贡献。$x=0$ 时只有 $f(0)h(0)$ 对卷积 $g(x)$ 有贡献。随着 x 值增大，因重叠的项增多，卷积 $g(x)$ 值相应改变、增大、减小或不变。

$$
\begin{aligned}
&g(0)=f(0)h(0)\\
&g(1)=f(0)h(1)+f(1)h(0)\\
&g(2)=f(0)h(2)+f(1)h(1)+f(2)h(0)\\
&\qquad\qquad\qquad\cdots\\
&g(A-1)=f(0)h(A-1)+f(1)h(A-2)+\cdots+f(A-1)h(0)
\end{aligned}
$$

现在假定 $f(x)$ 与 $h(x)$ 是周期为 A 的离散函数：

$$f(x+kA)=f(x),\quad h(x+kA)=h(x) \tag{3-51}$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$f(x)$ 与 $h(x)$ 的卷积定义为同一个周期内两个函数的卷积。因此，当 $f(x)$ 与 $h(x)$ 由 x 取值范围为 $x=0\sim A-1$ 的非周期函数变为两个周期为 A 的周期函数时，它们的卷积是不变的。对于周期为 A 的 $f(m)$ 与 $h(m)$，如果把 $m=0\sim A-1$ 叫作第一周期，则 $m=-A\sim-1$ 就是前一周期。第一周期的 $h(m)$ 经过对 $m=0$ 的反演成为 $h(-m)$ 后处于 $m=-A+1\sim0$，这已是前一周期的范围。$h(-m)$ 沿 m 轴正方向移动 x 距离成为 $h(x-m)$ 时，只要 $x<A-1$，$h(x-m)$ 就有一部分处于前一周期内。于是，属于第一周期的 $h(x-m)$ 就同前一周期的 $f(m)$ 有一部分重叠。在用计算机计算周期函数 $f(x)$ 与 $h(x)$ 的卷积时，就会将分属不同周期的两个函数重叠部分对卷积的贡献计入。这就造成了计算错误。其实避免这种错误的方法很简单，只要在两个函数的尾部添加至少 $A-1$ 个 0，将周期扩大为 $M>2A-1$ 就行了。现假定添加了 A 个 0，周期扩大为 $M=2A$。这时前一周期的 $f(m)$ 中 m 的取值范围是 $m=-2A\sim-1$，其尾部 0 值区的范围是 $m=-A\sim-1$。而属于第一周期的 $h(-m)$ 中 m 的取值范围是 $m=-2A+1\sim0$，其尾部非 0 值的范围是 $m=-A+1\sim0$，它正好同前一周期函数 $f(m)$ 尾部的 0 值重叠。对于 $h(x-m)$ 来说，它的尾部非 0 值区是在 $f(m)$ 的尾部 0 值区的范围内。显然，$h(x-m)$ 同 $f(m)$ 的 0 值重叠对卷积是没有贡献的。上述计算错误就不会发生。因此，为了避免因不同周期函数重叠造成的计算错误，两个周期为 A 的周期离散函数在进行卷积前要按如下方式扩大周期：

$$f_e(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant A-1\\ 0, & A\leqslant x\leqslant M-1\end{cases} \tag{3-52}$$

$$h_e(x)=\begin{cases}h(x), & 0\leqslant x\leqslant A-1\\ 0, & A\leqslant x\leqslant M-1\end{cases} \tag{3-53}$$

其中周期 M 满足条件：$M>2A-1$。

如果 $f(x)$ 与 $h(x)$ 分别是周期为 A 与 B 的周期函数，则在它们进行卷积之前，应该按如下方式扩大周期：

$$f_e(x)=\begin{cases}f(x), & 0\leqslant x\leqslant A-1\\ 0, & A\leqslant x\leqslant M-1\end{cases} \tag{3-54}$$

$$h_e(x)=\begin{cases}h(x), & 0\leqslant x\leqslant B-1\\ 0, & B\leqslant x\leqslant M-1\end{cases} \tag{3-55}$$

其中周期 M 满足条件：$M>A+B-1$。$f_e(x)$ 与 $h_e(x)$ 的卷积为：

$$f_e(x)*h_e(x)=\sum_{m=0}^{M-1}f_e(m)h_e(x-m) \tag{3-56}$$

现在把上述一维结果推广到二维。设二维周期函数 $f(x,y)$ 与 $h(x,y)$ 的 x,y 取值范围分别是

$$f(x,y): x=0,1,2,\cdots,A-1; y=0,1,2,\cdots,B-1$$
$$h(x,y): x=0,1,2,\cdots,C-1; y=0,1,2,\cdots,D-1$$

$f(x,y)$ 与 $h(x,y)$ 在 x 方向的周期分别是 A 与 C，在 y 方向的周期分别是 B 与 D。考虑到进行卷积的两个函数的周期必须相同，同时又要避免因不同周期函数的重叠产生的计算错误，$f(x,y)$ 与 $h(x,y)$ 在进行卷积前要按如下方式扩大周期：

$$f_e(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & 0\leqslant x\leqslant A-1, 0\leqslant y\leqslant B-1 \\ 0, & A\leqslant x\leqslant M-1, B\leqslant y\leqslant N-1 \end{cases} \tag{3-57}$$

$$h_e(x,y)=\begin{cases} h(x,y), & 0\leqslant x\leqslant C-1, 0\leqslant y\leqslant D-1 \\ 0, & C\leqslant x\leqslant M-1, D\leqslant y\leqslant N-1 \end{cases} \tag{3-58}$$

其中 M 与 N 满足条件：

$$M > A+C-1, \quad N > B+D-1 \tag{3-59}$$

$f_e(x,y)$ 与 $h_e(x,y)$ 满足周期条件：

$$f_e(x+kM, y+lN)=f_e(x,y); \quad h_e(x+kM, y+lN)=h_e(x,y) \tag{3-60}$$
$$k,l=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$f_e(x,y)$ 与 $h_e(x,y)$ 的卷积为：

$$f_e(x,y)*h_e(x,y)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f_e(m,n)h_e(x-m,y-n) \tag{3-61}$$

3.4 快速傅里叶变换

当 N 很大时，傅里叶变换的计算量非常大。为了解决这个问题，人们发展了傅里叶变换的快速算法。下面先讨论一维快速傅里叶变换。一维傅里叶变换与逆变换的公式为：

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/N}, \quad u=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-62}$$

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/N}, \quad x=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-63}$$

令

$$W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/N} \tag{3-64}$$

式（3-62）与式（3-63）变为

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} W^{ux} f(x), \quad u=0,1,\cdots,N-1$$
$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} W^{-xu} F(u), \quad x=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-65}$$

这两式的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & \cdots & W^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} \tag{3-66}$$

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^{-1} & \cdots & W^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{-(N-1)} & \cdots & W^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} \tag{3-67}$$

W^{ux} 有以下几个性质：

① $W^0 = W^{lN} = 1(l = 0, \pm1, \cdots)$；

② $W^{\left(ux \pm \frac{N}{2}\right)} = -W^{ux}$；

③ $W^{(ux \pm lN)} = W^{ux}$。

通常限定 $N = 2^n$， n 是正整数。先讨论 $N = 4$（$n = 2$）的傅里叶变换：

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} \tag{3-68}$$

利用 W^{ux} 的上述性质， $W^0 = 1$， $W^2 = W^{(0+2)} = -W^0 = -1$（$2 = N/2$）， $W^3 = W^{(1+2)} = -W^1$， $W^4 = 1$（$4 = N$）， $W^6 = W^{(2+4)} = W^2 = -1$， $W^9 = W^{(1+8)} = W^1$。将上述 W^{ux} 值代入式（3-68），得

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & -1 & -W^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W^1 & -1 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} \tag{3-69}$$

改变 $F(m)$ 的排列次序，

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & W^1 & -1 & -W^1 \\ 1 & -W^1 & -1 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} \tag{3-70}$$

将上式表示为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Wf} \tag{3-71}$$

其中

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}F(0)\\F(2)\\F(1)\\F(3)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&W^1&-1&-W^1\\1&-W^1&-1&W^1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{pmatrix}\tag{3-72}$$

不难证明，式（3-71）中的矩阵 $\boldsymbol{W}$ 可以表示为两个矩阵相乘：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1\tag{3-73}$$

$$\boldsymbol{W}_1=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{W}_2=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&W^1\\0&0&1&-W^1\end{pmatrix}\tag{3-74}$$

我们注意到，矩阵 $\boldsymbol{W}_1$ 与 $\boldsymbol{W}_2$ 的每一行只有两个元素不为 0，每一列也只有两个元素不为 0。将傅里叶变换式（3-71）表示为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1\tag{3-75}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(0)+f(2)\\f(1)+f(3)\\f(0)-f(2)\\f(1)-f(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(0)\\f_1(1)\\f_1(2)\\f_1(3)\end{pmatrix}\tag{3-76}$$

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&W^1\\0&0&1&-W^1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(0)\\f_1(1)\\f_1(2)\\f_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(0)+f_1(1)\\f_1(0)-f_1(1)\\f_1(2)+W^1f_1(3)\\f_1(2)-W^1f_1(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F(0)\\F(2)\\F(1)\\F(3)\end{pmatrix}\tag{3-77}$$

现在，傅里叶变换通过两次运算完成。在第一次 $\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}$ 的运算中，有 4 次加减法运算，没有乘法运算。在第二次 $\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1$ 的运算中，有 4 次加减法运算，一次乘法运算：$W^1f_1(3)$。在两次运算中，共有 8 次加减法运算，1 次乘法运算。这是快速运算的结果。如用通常的算法，由式（3-69）看出，共有 12 次加减法运算，2 次乘法运算：$W^1f(1)$ 与 $W^1f(3)$。两种算法中的乘法次数之比为 2，加减法次数之比为 $12/8=1.5$。

再讨论 $N=8$（$n=3$）的傅里叶变换：

$$\begin{pmatrix} F(0)\\ F(1)\\ F(2)\\ F(3)\\ F(4)\\ F(5)\\ F(6)\\ F(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0\\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7\\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} & W^{12} & W^{14}\\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} & W^{18} & W^{21}\\ W^0 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} & W^{24} & W^{28}\\ W^0 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} & W^{30} & W^{35}\\ W^0 & W^6 & W^{12} & W^{18} & W^{24} & W^{30} & W^{36} & W^{42}\\ W^0 & W^7 & W^{14} & W^{21} & W^{28} & W^{35} & W^{42} & W^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0)\\ f(1)\\ f(2)\\ f(3)\\ f(4)\\ f(5)\\ f(6)\\ f(7) \end{pmatrix} \tag{3-78}$$

利用 W^{ux} 的性质，将 W^{ux} 简化，如 $W^{49}=W^{(1+6\times 8)}=W^1$，$W^{42}=W^{(2+5\times 8)}=W^2$，$W^8=1$，$W^7=W^{(3+4)}=-W^3$，$W^{14}=W^{(6+8)}=W^6=W^{(2+4)}=-W^2$，$\cdots$。将简化后的 W^{ux} 代入上式，得

$$\begin{pmatrix} F(0)\\ F(1)\\ F(2)\\ F(3)\\ F(4)\\ F(5)\\ F(6)\\ F(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & -1 & -W^1 & -W^2 & -W^3\\ 1 & W^2 & -1 & -W^2 & 1 & W^2 & -1 & -W^2\\ 1 & W^3 & -W^2 & W^1 & -1 & -W^3 & W^2 & -W^1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -W^1 & W^2 & -W^3 & -1 & W^1 & -W^2 & W^3\\ 1 & -W^2 & -1 & W^2 & 1 & -W^2 & -1 & W^2\\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W^1 & -1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0)\\ f(1)\\ f(2)\\ f(3)\\ f(4)\\ f(5)\\ f(6)\\ f(7) \end{pmatrix} \tag{3-79}$$

改变 $F(m)$ 的排列次序：

$$\begin{pmatrix} F(0)\\ F(4)\\ F(2)\\ F(6)\\ F(1)\\ F(5)\\ F(3)\\ F(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & W^2 & -1 & -W^2 & 1 & W^2 & -1 & -W^2\\ 1 & -W^2 & -1 & W^2 & 1 & -W^2 & -1 & W^2\\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & -1 & -W^1 & -W^2 & -W^3\\ 1 & -W^1 & W^2 & -W^3 & -1 & W^1 & -W^2 & W^3\\ 1 & W^3 & -W^2 & W^1 & -1 & -W^3 & W^2 & -W^1\\ 1 & -W^3 & -W^2 & -W^1 & -1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0)\\ f(1)\\ f(2)\\ f(3)\\ f(4)\\ f(5)\\ f(6)\\ f(7) \end{pmatrix} \tag{3-80}$$

上式可表示为：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{f} \tag{3-81}$$

不难证明，矩阵 $\boldsymbol{W}$ 可以表示为 3 个矩阵相乘：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1 \tag{3-82}$$

$$\boldsymbol{W}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{3-83}$$

$$\boldsymbol{W}_2=\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&W^2&0\\0&0&0&0&0&1&0&W^2\\0&0&0&0&1&0&-W^2&0\\0&0&0&0&0&1&0&-W^2\end{pmatrix} \tag{3-84}$$

$$\boldsymbol{W}_3=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&W^2&0&0&0&0\\0&0&1&-W^2&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&W^1&0&0\\0&0&0&0&1&-W^1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&W^3\\0&0&0&0&0&0&1&-W^3\end{pmatrix} \tag{3-85}$$

我们注意到，在$\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{W}_3$矩阵中，每一行只有两个元素不为 0，每一列也只有两个元素不为 0。现在，傅里叶变换式（3-81）可以表示为：

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{f}_2 \tag{3-86}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-1&0\\0&0&0&1&0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\\f(6)\\f(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(0)+f(4)\\f(1)+f(5)\\f(2)+f(6)\\f(3)+f(7)\\f(0)-f(4)\\f(1)-f(5)\\f(2)-f(6)\\f(3)-f(7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(0)\\f_1(1)\\f_1(2)\\f_1(3)\\f_1(4)\\f_1(5)\\f_1(6)\\f_1(7)\end{pmatrix} \tag{3-87}$$

$$
\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W^2
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
f_1(0)\\ f_1(1)\\ f_1(2)\\ f_1(3)\\ f_1(4)\\ f_1(5)\\ f_1(6)\\ f_1(7)
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
f_1(0)+f_1(2)\\
f_1(1)+f_1(3)\\
f_1(0)-f(2)\\
f_1(1)-f_1(3)\\
f_1(4)+W^2f_1(6)\\
f_1(5)+W^2f_1(7)\\
f_1(4)-W^2f_1(6)\\
f_1(5)-W^2f_1(7)
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
f_2(0)\\ f_2(1)\\ f_2(2)\\ f_2(3)\\ f_2(4)\\ f_2(5)\\ f_2(6)\\ f_2(7)
\end{pmatrix} \tag{3-88}
$$

$$
\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{f}_2=\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & -W^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^3
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
f_2(0)\\ f_2(1)\\ f_2(2)\\ f_2(3)\\ f_2(4)\\ f_2(5)\\ f_2(6)\\ f_2(7)
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
f_2(0)+f_2(1)\\
f_2(0)-f_2(1)\\
f_2(2)+W^2f_2(3)\\
f_2(2)-W^2f_2(3)\\
f_2(4)+W^1f_2(5)\\
f_2(4)-W^1f_2(5)\\
f_2(6)+W^3f_2(7)\\
f_2(6)-W^3f_2(7)
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}
F(0)\\ F(4)\\ F(2)\\ F(6)\\ F(1)\\ F(5)\\ F(3)\\ F(7)
\end{pmatrix} \tag{3-89}
$$

傅里叶变换式（3-86）通过 3 次运算完成。在第 1 次 $\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}$ 的运算中，有 8 次加减法运算，没有乘法运算。在第 2 次 $\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1$ 的运算中，有 8 次加减法运算，2 次乘法运算：$W^2f_1(6),W^2f_1(7)$。在第 3 次 $\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{f}_2$ 的运算中，有 8 次加减法运算，3 次乘法运算：

$W^2 f_2(3), W^1 f_2(5), W^3 f_2(7)$。在 3 次运算中，共有 $8\times 3=24$ 次加减法运算，$2+3=5$ 次乘法运算。这是快速运算的结果。如用通常算法，由式（3-79）可以看出，共有 $8\times 7=56$ 次加减法运算，14 次乘法运算，它们是 $W^1 f(1), W^2 f(2), W^3 f(3), W^1 f(5)$, $W^2 f(6)$, $W^3 f(7), W^2 f(1), W^2 f(3), W^2 f(5), W^2 f(7)$，$W^3 f(1), W^1(3), W^3 f(5), W^1(7)$。两种算法中的乘法次数之比为 $14/5=2.8$，加减法次数之比为 $56/24=2.3$。随着 N 值的增大，这两个比值会迅速增大，快速运算的优越性会非常明显。

下面，给出估计快速傅里叶变换中乘法出现次数的方法。以 $N=8$ 的傅里叶变换为例，对矩阵 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3$ 的任一行中两个不为 0 的元素为 $1, \pm 1$ 的，改写为 $1, \pm W^0$，并且将 W^0 参与的乘法运算也计入。于是，$\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3$ 为

$$\boldsymbol{W}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & W^0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -W^0\end{pmatrix} \tag{3-90}$$

$$\boldsymbol{W}_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & W^2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -W^2\end{pmatrix} \tag{3-91}$$

$$\boldsymbol{W}_3=\begin{pmatrix}1 & W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -W^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & W^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -W^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & W^3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -W^3\end{pmatrix} \tag{3-92}$$

现在，矩阵 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \boldsymbol{W}_3$ 的每一行中不为 0 的两个元素都是 1 与 $\pm W^k$ $(k=0,1,2,3)$，

在任一列中的两个不为 0 的元素，要么都是 1，要么一个是 W^k，一个是 $-W^k$。处于同一列中的两个 W^k（不考虑 ± 号）在运算中必定同后面一列矩阵的同一个元素相乘。这两个相乘被认为是一次乘法。因此，在 $W_i f_{i-1}$ 的运算中，乘法出现的次数都是 $8/2=4$（$N/2$），3 次运算中乘法出现的次数为 $3\times4=12$（$nN/2$）。而在通常算法中，我们也将 $W^0=1$ 参与的乘法计入，乘法出现的次数为 $8\times8=64$（N^2）。通常算法与快速算法中乘法出现的次数之比为 $64/12=5.3\ (N^2/(nN/2)=2N/n)$。

对于任意 $N=2^n$ 的傅里叶变换

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & \cdots & W^0 \\ W^0 & W^1 & \cdots & W^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W^0 & W^{(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} \tag{3-93}$$

快速运算的方法同 $N=4,8$ 的傅里叶变换的快速运算的方法是一样的。

（1）按照 W^k 的性质，将 W^k 简化，使 W^k 的上标 $k=0,1,\cdots,(N/2)-1$。

（2）按照一定的规则，改变 $F(0),F(1),\cdots,F(N-1)$ 的排列次序，式（3-93）中的矩阵 $\boldsymbol{W}$ 随之改变。令此时的傅里叶变换公式为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{f} \tag{3-94}$$

其中的矩阵 $\boldsymbol{W}$ 一定可以表示为 n 个矩阵相乘：

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{W}_{n-1}\cdots\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1 \tag{3-95}$$

这 n 个矩阵 $\boldsymbol{W}_i(i=1.2,\cdots,n)$ 的任一行只有 2 个不为 0 的元素：1 与 $\pm W^k$，其中 $k=0,1,\cdots,(N/2)-1$，任一列也只有 2 个不为 0 的元素，并且这两个元素要么都是 1，要么一个是 W^k，一个是 $-W^k$。处于同一列中的两个 W^k（不考虑 ± 号）在运算中必定同后面一列矩阵的同一个元素相乘。这两个相乘被认为是一次乘法。

（3）将式（3-95）代入式（3-94），便有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{W}_n\boldsymbol{W}_{n-1}\cdots\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f} \\ &= \boldsymbol{W}_n\boldsymbol{W}_{n-1}\cdots\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1 \\ &\cdots \\ &= \boldsymbol{W}_n\boldsymbol{W}_{n-1}\boldsymbol{f}_{n-2} \\ &= \boldsymbol{W}_n\boldsymbol{f}_{n-1} \end{aligned} \tag{3-96}$$

其中

$$\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f}，\quad \boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1，\quad\cdots，\quad \boldsymbol{f}_{n-1}=\boldsymbol{W}_{n-1}\boldsymbol{f}_{n-2} \tag{3-97}$$

式（3-96）表示，$N=2^n$ 的傅里叶变换的快速算法是通过 $\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_{n-1}=\boldsymbol{W}_{n-1}\boldsymbol{f}_{n-2},\boldsymbol{F}=\boldsymbol{W}_n\boldsymbol{f}_{n-1}$ 的 n 次运算完成的。在每一次运算中，加减法出现的次数均为 N，乘法出现的次数均为 $N/2$。在 n 次运算中，加减法出现的总次数为 nN，乘法

出现的总次数为 $nN/2$。而在通常的算法中，由式（3-93）可以看出，加减法出现的次数为 $N(N-1)$，乘法出现的次数为 N^2。通常算法与快速算法中的加减法次数之比为 $(N-1)/n$，乘法次数之比为 $2N/n$。显然，N 愈大，这两个比值愈大。例如，$N=256=2^8$（$n=8$），快速算法中加减法出现的次数为 $nN=8\times 256=2040$，乘法出现的次数为 $nN/2=8\times 256/2=1024$。通常算法中，加减法出现的次数为 $N(N-1)=256\times 255=65280$，乘法出现的次数为 $N^2=256^2=65536$。通常算法与快速算法中的加减法次数之比为 $(N-1)/n=255/8=31.9$，乘法次数之比为 $2N/n=2\times 256/8=64$。由此可以看出快速算法的优越性。

在快速傅里叶变换中，改变 $F(m)$ 的排列次序与求出 n 个相乘的矩阵是比较复杂的事。然而，我们无须了解。因为目前已有现成快速傅里叶变换与逆变换的程序软件。在计算机上用 MATLAB 的 fft 与 ifft 函数运算就可以完成一维快速傅里叶变换与逆变换。

下面再讨论二维快速傅里叶变换。对于大小为 $N\times N$ 的离散图像 $f(x,y)$，傅里叶变换与逆变换的公式为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N}\sum_{y=0}^{N}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N},\quad u,v=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-98}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N},\quad x,y=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-99}$$

由于

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux+vy)/N}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi vy/N}$$

式（3-98）可以表示为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/N}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi vy/N},\quad u,v=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-100}$$

令

$$F(x,v)=\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi vy/N},\quad v=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-101}$$

式（3-100）变为

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ux/N},\quad u=0,1,\cdots,N-1 \tag{3-102}$$

现在，二维傅里叶变换式（3-98）通过两次一维傅里叶变换式（3-101）与式（3-102）来实现。这两次一维傅里叶变换均可以用快速算法完成，这就是二维快速傅里叶变换。

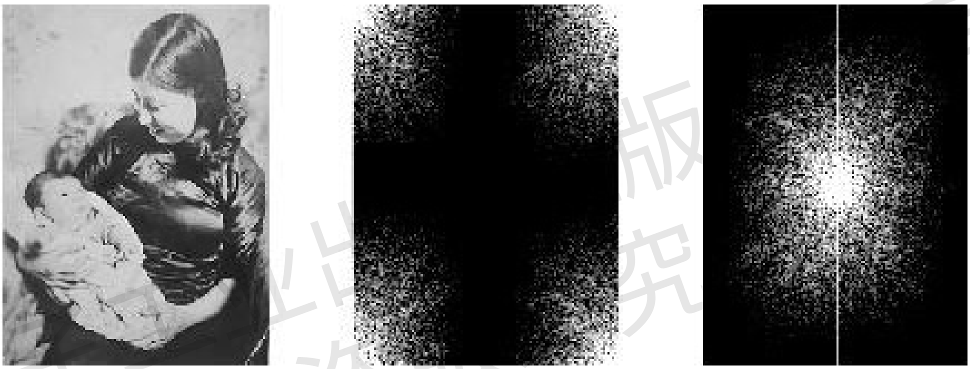
在计算机上，用 MATLAB 的 fft2 与 ifft2 函数运算就可以完成二维快速傅里叶

变换与逆变换。

［示例 3-3］ 对一幅图像进行傅里叶变换，并将得到的频谱原点由频谱图的左上角平移到频谱图的中心。

```
I=imread('2-16a.jpg');
I=rgb2gray(I);
K=fft2(I);                                  % 对图像 I 进行傅里叶变换
J=fftshift(K);                              % 将变换后的频谱原点平移到频谱图的中心
subplot(1,3,1),imshow(I);                   % 显示原图像
subplot(1,3,2),imshow(log(abs(K)),[8,10]);% 显示傅里叶变换后的频谱
subplot(1,3,3),imshow(log(abs(J)),[8,10]); % 显示频谱原点位于中心的频谱图
```

程序运行后，输出图像如图 3-2 所示。



（a）原始图像　　（b）频谱原点位于 4 角　　（c）频谱原点位于中心

图 3-2 图像的傅里叶变换

其中图 3-2（a）为原始图像，图 3-2（b）是对图像进行傅里叶变换后的频谱图。频谱原点位于图的 4 个角上。图 3-2（c）是将图 3-2（b）任一角（如左上角）上的频谱原点平移到图的中心。在显示变换后的频谱 J 时，由于 J 一般为复数，复数是不能显示的。所以在显示 J 时，要对 J 取绝对值：abs（J）。为显示得更清楚，再取对数 log（abs（J））。

设原始图像的大小为$M \times N$，则图 3-2（c）的频谱原点位于中心点$(M/2, N/2)$。在此频谱图中，中心区是低频区，接近 4 个角的区是高频区。位于图中(u,v)点的频率大小$D(u,v)$可以用(u,v)点到频谱原点$(M/2, N/2)$的距离表示：

$$D(u,v)=\left[\left(u-\frac{M}{2}\right)^2+\left(v-\frac{N}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

3.5 频率域图像增强的基本概念

空间域一幅 $M \times N$ 的数字图像 $f(x,y)$，经过傅里叶变换后成为频率域的 $M \times N$ 的数列 $F(u,v)$，其中 u 与 v 分别是 x 与 y 方向的频率。$|F(u,v)|$ 表示图像 $f(x,y)$ 中所含频率为 u 与 v 的成分的强度。我们无法准确地表示出频率 u 与 v 同图像的什么性质有关，只能大概地指出，由于频率 u 与 v 分别表示图像灰度在 x 与 y 方向的变化率，低频对应图像中灰度变化缓慢的部分，例如一幅房屋图像中的墙面和地面；高频对应图像中灰度变化剧烈的部分，例如物体的边缘与噪声。

频率域图像增强就是通过改变 $F(u,v)$ 来达到改善图像的目的。改变 $F(u,v)$ 是在频率域用滤波函数 $H(u,v)$ 去乘 $F(u,v)$ 来实现的。$H(u,v)$ 也叫作传递函数或滤波器。$H(u,v)$ 也是 $M \times N$ 的数列。$H(u,v)$ 同 $F(u,v)$ 相乘得到 $G(u,v)$：

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) \tag{3-103}$$

$H(u,v)$ 同 $F(u,v)$ 相乘并非一般意义上的矩阵相乘，而是将 $H(u,v)$ 的第 m 行第 n 列元素 H_{mn} 同 $F(u,v)$ 的第 m 行第 n 列元素 F_{mn} 相乘得到 $G(u,v)$ 的第 m 行第 n 列元素 $G_{mn} = H_{mn}F_{mn}$。$G(u,v)$ 就是 $F(u,v)$ 改变后的频谱。一个最简单的滤波函数是

$$H(u,v) = \begin{cases} 0, & (u,v) = (M/2, N/2) \\ 1, & (u,v) \neq (M/2, N/2) \end{cases} \tag{3-104}$$

它同 $F(u,v)$ 相乘的结果是

$$G(u,v) = \begin{cases} 0, & (u,v) = (M/2, N/2) \\ F(u,v), & (u,v) \neq (M/2, N/2) \end{cases} \tag{3-105}$$

它使 $F(M/2, N/2)$ 为零，保留其他频率成分不变。为了得到改善后的图像，还必须将 $G(u,v)$ 通过傅里叶逆变换返回到空间域：

$$g(x,y) = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} H(u,v)F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)} \tag{3-106}$$

现在，将频率域图像增强的全过程总结如下：

（1）对 $f(x,y)$ 进行傅里叶变换得到 $F(u,v)$：

$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)} \tag{3-107}$$

（2）选择滤波函数 $H(u,v)$，用 $H(u,v)$ 乘以 $F(u,v)$ 得到 $G(u,v)$：

$$G(u,v) = H(u,v)F(u,v) \tag{3-108}$$

（3）将 $G(u,v)$ 进行傅里叶逆变换得到空间域的 $g(x,y)$：

$$g(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}H(u,v)F(u,v)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(ux/M+vy/N)} \tag{3-109}$$

这就是经频率域增强后的图像。

3.6　频率域平滑滤波器

傅里叶变换 $F(u,v)$ 中的高频部分对应图像边缘与灰度尖锐变化如噪声等。平滑滤波器就是通过衰减高频成分来达到图像平滑的目的。这里考虑 4 种滤波器。由于它们的 $H(u,v)$ 都是实函数，$H(u,v)$ 对 $F(u,v)$ 的作用不改变 $F(u,v)$ 的相位。因而它们都是零相移的。

1．理想低通滤波器

理想低通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\begin{cases}1, & D(u,v)\leqslant D_0\\ 0, & D(u,v)>D_0\end{cases} \tag{3-110}$$

其中 D_0 是指定的一个非负整数，叫作截止频率，$D(u,v)$ 是 (u,v) 点距离频率原点的距离

$$D(u,v)=[u^2+v^2]^{1/2} \tag{3-111}$$

凡是 $D(u,v)$ 小于截止频率 D_0 的所有频率成分都毫无衰减地通过滤波器，所有其他频率成分完全被滤波器阻止。这种滤波器是无法用电子器件来实现的，只能在计算机上实现。它的一个缺点是在平滑图像的同时出现了明暗相间的振铃现象。实际上，理想低通滤波器没有太大的实用价值。

2．巴特沃思低通滤波器

n 级巴特沃思低通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}} \tag{3-112}$$

其中 n 是正整数，D_0 也是一个正整数，$D(u,v)$ 是由式（3-111）确定的量。与理想低通滤波器不同，在通过与不通过的频率上没有一个明显的界限。当 $D(u,v)$ 由 0 增大到 D_0 时，$H(u,v)$ 由 1 下降为 0.5。$n=1$ 没有振铃现象，$n=2$ 有轻微的振铃现象。n 值愈大振铃现象愈严重。$n=20$ 就同理想低通滤波器很接近了。通常取 $n=2$。这种低通滤波器的效果比较好。

3．指数低通滤波器

指数低通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\mathrm{e}^{-\left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^n} \tag{3-113}$$

其中 $D(u,v)$ 是由式（3-111）确定的量，D_0 与 n 均为正整数。当 $n=2$，$D(u,v)$ 由 0 增大到 D_0 时，$H(u,v)$ 由 1 下降为 $1/\sqrt{2}$。指数低通滤波器的效果没有 $n=2$ 的巴特沃思低通滤波器好，它的优点是没有振铃现象。

4．梯形低通滤波器

梯形低通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\begin{cases} 1, & D(u,v)<D_0 \\ \dfrac{D_1-D(u,v)}{D_1-D_0}, & D_0 \leqslant D(u,v) \leqslant D_1 \\ 0, & D(u,v)>D_1 \end{cases} \tag{3-114}$$

其中 $D(u,v)$ 是由式（3-111）确定的量，D_0 与 D_1 都是正整数，$D_1>D_0$。梯形低通滤波器的效果尚好，但有轻微的振铃现象。由于滤波函数 $H(u,v)$ 简单，计算比较容易，所以常用。

［示例 3-4］ 对人为加入了噪声的图像，用理想低通滤波器进行处理。

```
I=imread('2-16a.jpg');
I=rgb2gray(I);
K=imnoise(I,'salt & pepper',0.02);      % 在图像 I 中加入椒盐噪声
f=double(K);                            % 将图像数据类型转换为双精度类型的 f
F=fft2(f);                              % 对图像 f 进行傅里叶变换
G=fftshift(F);                          % 将变换后的频谱原点移到频谱图的中心
[M,N]=size(F);                          % 测量频谱 F 的大小
d0=25;                                  % 建立理想低通滤波器的滤波函数 H
m0=fix(M/2);n0=fix(N/2);
for i=1:M
for j=1:N
d=sqrt((i-m0)^2+(j-n0)^2);
if d<=d0; H=1; else H=0; end
G(i,j)=H*G(i,j);                        % 对频谱 F 进行滤波运算
end
end
G1=ifftshift(G);                        % 对滤波后的 G 进行傅里叶逆变换
G2=ifft2(G1);
```

```
G3=uint8(real(G2));               % 将傅里叶逆变换后的图像数据类型转换为整数型
subplot(1,2,1),imshow(K);         % 显示原来有噪声的图像
subplot(1,2,2),imshow(G3)         % 显示理想低通滤波后的图像
```

程序运行后，输出图像如图 3-3 所示。

（a）加入了噪声的图像

（b）理想低通滤波后的图像

图 3-3　用理想低通滤波器处理有噪声的图像

［示例 3-5］ 对人为加入了噪声的图像，用巴特沃思低通滤波器进行处理。

```
I=imread('2-16a.jpg');
I=rgb2gray(I);
K=imnoise(I,'salt & pepper',0.02);
f=double(K);
F=fft2(f);                        % 对图像 f 进行傅里叶变换
G=fftshift(F);
[M,N]=size(F);
n=2;d0=25;                        % 建立巴特沃思低通滤波器的滤波函数 H
m0=fix(M/2);n0=fix(N/2);
for i=1:M
for j=1:N
d=sqrt((i-m0)^2+(j-n0)^2);
H=1/(1+(d/d0)^(2*n));
G(i,j)=H*G(i,j);                  % 对频谱 G 进行滤波运算
end
end
G1=ifftshift(G);                  % 对滤波后的 G 进行傅里叶逆变换
```

```
G2=ifft2(G1);
G3=uint8(real(G2));
subplot(1,2,1),imshow(K);
subplot(1,2,2),imshow(G3)
```

程序运行后，输出图像如图 3-4 所示。

（a）加入了噪声的图像

（b）巴特沃思低通滤波后的图像

图 3-4　用巴特沃思低通滤波器处理有噪声的图像

［示例 3-6］ 对人为加入了噪声的图像，用指数低通滤波器进行处理。

```
I=imread('2-16a.jpg');
I=rgb2gray(I);
K=imnoise(I,'salt & pepper',0.02);
f=double(K);
F=fft2(f);                                  % 对图像 f 进行傅里叶变换
G=fftshift(F);
[M,N]=size(F);
n=2;d0=25;                                  % 建立指数低通滤波器的滤波函数 H
m0=fix(M/2);n0=fix(N/2);
for i=1:M
for j=1:N
d=sqrt((i-m0)^2+(j-n0)^2);
H=exp(-(d/d0)^n);
G(i,j)=H*G(i,j);                            % 对频谱 G 进行滤波运算
end
end
```

```
G1=ifftshift(G);                    % 对滤波后的 G 进行傅里叶逆变换
G2=ifft2(G1);
G3=uint8(real(G2));
subplot(1,2,1),imshow(K);
subplot(1,2,2),imshow(G3)
```

程序运行后，输出图像如图 3-5 所示。

（a）加入了噪声的图像

（b）指数低通滤波后的图像

图 3-5　用指数低通滤波器处理有噪声的图像

3.7　频率域锐化滤波器

空间图像的傅里叶变换 $F(u,v)$ 中的低频部分对应图像中灰度变化缓慢的部分，频率域高通滤波器就是通过衰减低频成分来达到图像锐化的目的。同低通滤波器一样，主要考虑 4 种类型的高通滤波器。

1．理想高通滤波器

理想高通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\begin{cases}0, & D(u,v)\leqslant D_0\\ 1, & D(u,v)>D_0\end{cases} \tag{3-115}$$

其中 $D(u,v)$ 是由式（3-111）确定的量，D_0 为截止频率。理想高通滤波器将 $D(u,v)\leqslant D_0$ 的所有频率阻止，让 $D(u,v)>D_0$ 的所有频率毫无衰减地通过。这种滤波器的效果并不理想，存在振铃现象。

2．巴特沃思高通滤波器

n 级巴特沃思高通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D_0/D(u,v)]^{2n}} \tag{3-116}$$

其中 n、D_0 与 $D(u,v)$ 的定义与前面相同。$n=2$ 的巴特沃思高通滤波器的效果比理想高通滤波器要好得多，图像更平滑，边缘的失真也小。

3．指数高通滤波器

指数高通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\mathrm{e}^{-\left[\frac{D_0}{D(u,v)}\right]^n} \tag{3-117}$$

其中 D_0 与 $D(u,v)$ 的定义与前面相同。它比以上两种滤波器的效果更好，图像更平滑，即使对微小的物体和细节，也能得到比较清晰的结果。

4．梯形高通滤波器

梯形高通滤波器的滤波函数为

$$H(u,v)=\begin{cases}0, & D(u,v)<D_0\\ \dfrac{D(u,v)-D_0}{D_1-D_0}, & D_0\leqslant D(u,v)\leqslant D_1\\ 1, & D(u,v)>D_1\end{cases} \tag{3-118}$$

其中 $D(u,v)$ 是由式（3-111）确定的量，D_0 与 D_1 都是正整数，$D_1>D_0$。梯形高通滤波器有轻微的振铃现象。优点是滤波函数 $H(u,v)$ 简单，计算比较容易。

［示例 3-7］ 用巴特沃思高通滤波器处理模糊图像。

```
I=imread('2-24a.jpg');
I=rgb2gray(I);
f=double(I);
F=fft2(f);                          % 对图像 f 进行傅里叶变换
G=fftshift(F);
[M,N]=size(F);
n=2;d0=25;                          % 建立巴特沃思高通滤波器的滤波函数 H
m0=fix(M/2);n0=fix(N/2);
for i=1:M
for j=1:N
d=sqrt((i-m0)^2+(j-n0)^2);
H=1/(1+(d0/d)^(2*n))+1.0;           % 在滤波函数 H 中加常数 1.0 是为了让图像更清晰
G(i,j)=H*G(i,j);
```

```
end
end
G1=ifftshift(G);                     % 对滤波后的 G 进行傅里叶逆变换
G2=ifft2(G1);
G3=uint8(real(G2));
subplot(1,2,1),imshow(I);
subplot(1,2,2),imshow(G3)
```

程序运行后，输出图像如图 3-6 所示。

（a）一幅模糊图像　　（b）巴特沃思高通滤波后的图像

图 3-6　用巴特沃思高通滤波器处理模糊图像

［示例 3-8］ 用指数高通滤波器处理模糊图像。

```
I=imread('2-24a.jpg');
I=rgb2gray(I);
f=double(I);
F=fft2(f);                           % 对图像 f 进行傅里叶变换
G=fftshift(F);
[M,N]=size(F);
n=1;d0=5;                            % 建立指数高通滤波器的滤波函数 H
m0=fix(M/2); n0=fix(N/2);
for i=1:M
for j=1:N
d=sqrt((i-m0)^2+(j-n0)^2);
H=exp(-(d0/d)^n)+1.0;                % 在滤波函数 H 中加常数 1.0 是为了让图像更清晰
G(i,j)=H*G(i,j);
```

```
end
end
G1=ifftshift(G);                          % 对滤波后的 G 进行傅里叶逆变换
G2=ifft2(G1);
G3=uint8(real(G2));
subplot(1,2,1),imshow(I);
subplot(1,2,2),imshow(G3)
```

程序运行后，输出图像如图 3-7 所示。

（a）一幅模糊图像　　（b）指数高通滤波后的图像

图 3-7　用指数高通滤波器处理模糊图像