

# 奥数经典 500 例

## 数 论

陈 拓 著

电子工业出版社版权所有  
盗版必究

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内容简介

本书共有涉及“数论”的87个知识点及相关解题方法,按照“数论”的特点和逻辑关系由易到难进行编排。从“多位数的写法与读法”开始,到“厄米特恒等式”结束。每个知识点就是一个神器,帮助学生快速理解知识的由来和运用。每个神器的名称都很鲜明,采用诙谐的顺口溜总结知识要点,通过“神器溯源”,让读者知其然,更知其所以然。每个神器都配有例题精讲和针对性练习。通过对精选例题的学习和针对性练习,希望读者能把一颗颗精美的知识明珠串在一起,进而形成完善的知识体系。

本书适合小学中、高年级学生以及初中学生进行培优学习使用,也可作为数学竞赛者的专题培训教材。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

奥数经典500例. 数论 / 陈拓著. —北京: 电子工业出版社, 2022.4

ISBN 978-7-121-43331-3

I. ①奥… II. ①陈… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2022)第070014号

责任编辑:崔汝泉

印刷:

装订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编:100036

开本:787×1092 1/16 印张:22.25 字数:600千字

版次:2022年4月第1版

印次:2022年4月第1次印刷

定价:89.80元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn),盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

本书咨询联系方式:(010)88254407。

# Preface

如何提高学生的解题能力？这是一个非常复杂的问题。有人提出了“问题教学法”，在教学中设置一些问题情境，让学生在反复失败中探索数学真知，但学生往往在浪费了大量时间后，在成功之前就丧失了信心。有人提出了“讲授法”，但这种方法往往被称为“填鸭式”教学，学生往往是被动接受，一般不会深刻思考。有人则提出了“练习法”，经过刷题进行提高，找到题感。这些方法都各有优缺点，应根据学习的具体内容以及学生的年龄特征合理选用。

学习的主体是学生，充分发挥学生的主观能动性才是学习之道，传授之道。只有让学生学会自学，学会阅读，理清知识点的来龙去脉，然后去做例题，对照解题过程总结经验和教训，慢慢形成自己的学习方法、学习习惯，才能更好地提高学习效率。这就是“自学阅读法”。

那么问题来了，学生学习数学，应阅读什么？又应如何阅读？为学生提供一套较好的数学阅读学习资料，且要兼顾例题和练习，的确不是一件容易的事。我在平时的教学中，反复思索这个问题，从知识点入手，从解题方法入手或许是一条捷径。基于此想法，我倾心编写了“奥数经典 500 例”丛书，把数学学科按照知识体系和方法（不像小学、初中数学内容那样间隔循环提升）由浅入深、环环相扣地编写出来。每一例，都是一个知识点，瑰丽的宝石；每一例，都是一个神器，秒杀的秘诀。为了让学生能掌握各知识点，特设置了“神器溯源”栏目，力争让学生知其然，又知其所以然；既知道公式的结构，又知道公式的推导过程；既知道定理，又掌握定理的证明；既知道数学家的贡献，又了解数学家的故事。为了进一步帮助学生掌握各知识点，我把各知识点浓缩提炼成合辙押韵的顺口溜（这里需要声明一下，有人说，顺口溜太多，学生记不住。我只想说，让学生背顺口溜，本身就是不合时宜的，顺口溜是知识点的精华，其作用是帮助学生理解知识点）。为了帮助学生加深对各知识点的理解，我针对每个知识点精心编写了 2~6 个例题，来帮助学生加深理解与巩固。为了让学生学有所用，我为每个知识点由易到难编写了 3~10 个练习题。总之，学生通过认真地阅读和理解，学习例题，完成练习，基本能掌握所学的知识点。

根据数学的特点，“奥数经典 500 例”丛书分成 6 册出版，每册一个专题，分别是计算专题、应用题专题、数论专题、几何专题、计数专题、构造论证专题。

由于编写时间仓促，难免有错漏之处，恳请各位读者斧正。

陈 拓



奥数经典 500 例答疑群

# Preface

数论是研究整数理论的一个数学分支,数学被誉为科学领域的皇后,而它则是数学皇后戴的皇冠。

数论中的定理、猜想很多,如哥德巴赫猜想、黎曼猜想等,不管这些猜想是否被验证,但在试图验证这些猜想的过程中,数学家们创新了数学,也促进了数学的发展。希尔伯特在 1900 年提出的 23 个问题中的数论问题,引领了一个多世纪的数论潮流。

在数论体系的建立中,凝聚了许多数学家的智慧,留下了他们的足迹。欧几里得、费尔马(费马)、欧拉、高斯等数学家,或发现其中的定理,或创造了一些数论的符号,或建立一些数论理论,为我们今天系统学习数论提供了许多便利。

数论专题,共有 87 个知识点和相关解题方法。从数的表示法开始,阐述数论题目的数学表达,构建了数的进制理论。系统地介绍整除性、因数与倍数知识,再拓展到一次同余、二次同余理论,拓展并完善了整除。不定方程、裴蜀定理、连分数、高斯取整的广泛应用,增加了数论的活力。

有人说,数论是数学人走进数学殿堂的一条康庄大道,学会数论才能成为真正的数学人。中国数论泰斗柯召被称为中国“近代数论创始人”,“柯氏定理”享誉世界;陈景润被誉为“摘取数学皇冠上明珠的人”,他们都赢得了世人的赞誉。

数论专题编写起点平缓,逐步升高,有理有据,易于接受。对于重点知识采用歌诀形式,转化成易学、易记、易用的韵歌,一目了然。如用“辗转相除法”求两个大数的最大公约数的歌诀:“两个数,都很大,寻找因数没办法。大数换成两数差,最大公约不变化。辗转相除在原本,九章更相又减损。”听着歌诀就想试一试,原理、方法都在歌诀中,使人乐学。

由于数论知识精彩绝伦,不是作者能够完全领会的,仅能编辑一些知识和方法,为读者学习数论提供资料,加之稿件编写仓促,难免有错漏之处,恳请各位读者批评指正。

在本书的编写过程中收到柳恒、石荣才、刘华青、刘力涛、杜雪、杨永东、刘春芳等老师的修改建议,他们对本书的顺利出版作出了很大贡献,在此顺致谢意!

陈 拓



奥数经典 500 例答疑群

# Contents

# 目录

|   |           |      |  |  |       |
|---|-----------|------|--|--|-------|
| SL-01   | 多位数的写法与读法 | (1)  | SL-22  | 质数与合数构造                                  | (87)  |
| SL-02   | 准确数与近似数   | (6)  | SL-23  | 奇数与偶数                                    | (91)  |
| SL-03   | 科学记数法     | (10) | SL-24  | 完全平方数                                    | (96)  |
| SL-04   | 自然数列      | (13) | SL-25  | 平方数的末尾不变性                                | (101) |
| SL-05   | 连续自然数之和   | (17) | SL-26  | 平方差与平方和                                  | (105) |
| SL-06   | 乘积大, 狂分 3 | (20) | SL-27  | 分解质因数                                    | (110) |
| SL-07   | 罗马数       | (24) | SL-28  | 约数的个数 $\tau(n)$                          | (114) |
| SL-08   | 位值原则      | (27) | SL-29  | 奇偶开关, 拉灯问题                               | (118) |
| SL-09   | 进制的转换     | (31) | SL-30  | 约数之和 $\delta(n)$                         | (122) |
| SL-10   | 进制的运算     | (35) | SL-31  | 完全数★                                     | (127) |
| SL-11   | 进制的运用     | (39) | SL-32  | $2^{2^n \times p} + 1$ ( $p$ 为奇数) 的因数分解★ | (131) |
| SL-12   | 进制下的整数分拆  | (43) | SL-33  | 最大公约数                                    | (133) |
| <hr/>  |           |      |  |  |       |
| SL-13   | 整除符号及性质   | (47) | SL-34  | 辗转相除法                                    | (137) |
| SL-14   | 截位相加法     | (52) | SL-35  | 最小公倍数                                    | (142) |
| SL-15   | 截位减加法     | (55) | SL-36  | 约数、倍数方程法                                 | (146) |
| SL-16   | 末尾分析法     | (59) | SL-37  | 分数的最大公约数与最小公倍数                           | (149) |
| SL-17   | 截尾法整除性判断★ | (63) | SL-38  | 与最小公倍数有关的计数                              | (153) |
| SL-18   | 整除性构造     | (67) | SL-39  | 约数与倍数的质因数分析                              | (157) |
| SL-19   | 质数与合数     | (72) | SL-40  | 裴蜀定理★                                    | (160) |
| SL-20   | 埃拉托色尼筛法   | (77) | <hr/>  |  |       |
| SL-21   | 质数与猜想     | (82) |  |  |       |

|   |                |       |  |   |       |
|---|----------------|-------|--|---|-------|
| SL-41   | 0 与 1 的妙用      | (164) | SL-66  | 费尔马小定理  | (265) |
| SL-42   | 2016 的妙用       | (167) | SL-67  | 欧拉定理  | (269) |
| SL-43   | 凑 24 点         | (170) | SL-68  | 阶与原根★   | (272) |
| SL-44   | 数字谜之位数分析       | (174) | SL-69  | 威尔逊定理★  | (275) |
| SL-45   | 数字谜之黄金三角:1、0、9 | (177) | SL-70  | 明码与密码   | (278) |
| SL-46   | 数字谜之首尾分析       | (181) | SL-71  | 校验码   | (283) |
| SL-47   | 数字谜之数字和与进位分析   | (184) | SL-72  | 二次同余方程★   | (286) |
| SL-48   | 数字谜之特殊算式       | (188) | SL-73  | 勒让德符号★  | (289) |
| SL-49   | 奇偶数字谜          | (192) |  |   |       |
| SL-50   | 质合数字谜          | (195) | SL-74  | 二元一次不定方程  | (293) |
| SL-51   | 小数数字谜          | (198) | SL-75  | 百钱买百鸡   | (296) |
| SL-52   | 含循环小数的除法竖式谜    | (202) | SL-76  | 多元线性方程  | (299) |
| SL-53   | 组建分数算式技巧       | (206) | SL-77  | 二次不定方程的双分解  | (303) |
| SL-54   | 幻方             | (209) | SL-78  | 勾股方程  | (306) |
| SL-55   | 数独             | (216) | SL-79  | 分数拆分: $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}$                       | (311) |
| SL-56   | 聪明格(肯肯数独)      | (222) | SL-80  | 分数拆分: $\frac{m}{n} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}$                       | (316) |
|  |                |       | SL-81  | 多元分数拆分: $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \dots$ | (319) |
| SL-57   | 带余除法           | (230) | SL-82  | 邮资问题  | (323) |
| SL-58   | 同余与运算          | (233) | SL-83  | 连分数   | (327) |
| SL-59   | 一次同余方程         | (237) | SL-84  | 渐近分数  | (332) |
| SL-60   | 一次同余方程组        | (241) | SL-85  | 高斯取整方程  | (338) |
| SL-61   | 中国剩余定理         | (245) | SL-86  | 阶乘中质因数 $p$ 的个数  | (342) |
| SL-62   | 三个连续两位数★       | (251) | SL-87  | 厄米特恒等式  | (346) |
| SL-63   | 完全剩余系          | (254) | 注: 标记“★”的为选学内容   |   |       |
| SL-64   | 欧拉数            | (259) |  |   |       |
| SL-65   | 简化剩余系          | (262) |  |   |       |

## SL-01 多位数的写法与读法

|       |  |
|-------|--|
| 神器内容  | <p>多于两个数字组成的自然数叫作多位数,从右至左四位一级。分别是个级、万级、亿级、兆级、京级、垓级……,每级从右至左都是个位、十位、百位、千位,为了不混淆,把级名也加在数位名中,这样就出现了个万位(万位)、十万位、百万位、千万位……</p> <p>读多位数的时候,从右至左四位一级,把级名只在每级的个位读出来,个级的级名不读。</p> <p>“0”的读法:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>(1)每级前面的“0”连续几个只读一个“零”。</li><li>(2)每级中间的“0”连续几个只读一个“零”。</li><li>(3)每级末尾的“0”不读。</li><li>(4)整级四位都是“0”读一个“零”。</li><li>(5)连续级都是“0”只读一个“零”。</li></ol> |
| 要点与说明 | <p>大数怎么读? 四位为一组。</p> <p>从右至左数,一定记清楚。</p> <p>级名后给出,个级名不读。</p> <p>读零很特殊,四位仍一组。</p> <p>前中连续零,一个读出声。</p> <p>级末零不读,读出太马虎。</p>   |



### 神器溯源

0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个数字叫作阿拉伯数字,用这些数字组成的数叫作阿拉伯数。阿拉伯数字是由古印度人发明的,后由阿拉伯人传到欧洲,再经欧洲人将其现代化。

#### 1. 数字写法与读法

|      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数字小写 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 汉字   | 零 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 |
| 财务大写 | 零 | 壹 | 贰 | 叁 | 肆 | 伍 | 陆 | 柒 | 捌 | 玖 |

另外,还有财务大写的数位,分别是:10 写作“拾”,100 写作“佰”,1000 写作

“仟”,10000 写作“万”。

## 2. 数位名与级名

| 级名  | 亿级          |           |        |        | 万级     |        |        |        | 个级     |        |        |        |
|-----|-------------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 数位名 | 千亿          | 百亿        | 十亿     | 亿      | 千万     | 百万     | 十万     | 万      | 千      | 百      | 十      | 个      |
| 位置值 | $10^{11}$   | $10^{10}$ | $10^9$ | $10^8$ | $10^7$ | $10^6$ | $10^5$ | $10^4$ | $10^3$ | $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
| 举例  |             | 1         | 0      | 0      | 0      | 2      | 0      | 3      | 0      | 0      | 0      | 6      |
| 读法  | 一百亿零二百零三万零六 |           |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |

注:数字“2”根据所在数位不同,读法不同,有时读作“二”,有时读作“两”。一般情况下,可以读作:二、二十、二百(两百)、二千(两千)、二万(两万)、二十万、二百万(两百万)、二千万(两千万)。

对于多位数,如果数位较多、相同数又连续,读数时容易看错,为了提高读数的正确率,经常采用从右向左三位添上一个“,”或空格来进行分节。如 30000560 经常分节为 30,000,560,或者分节为 30 000 560。

分节口诀:一段在百前,二段百万后,三段前面是十亿,四段兆在前……

由于我国的记数规则是从右向左,四位一级,分别为个级、万级、亿级……所以本知识点把多位数四位分一组,留出空格便于读写。本书中除了本知识点,其他知识点的大数都不空。

## 3. 小数部分数位名

在多位数个位的后面添加小数点,原来的多位数就是小数的整数部分,小数点后面的数就是小数部分,从小数点后第一位开始,依次是十分位、百分位、千分位、万分位、十万分位……读小数部分时,只需按数字依次读出。



## 例题精讲

**例题 1-1** 读出下列各数,并写出读法。

(1) 2020 0626, 读作:\_\_\_\_\_。

(2) 87 0002 9200, 读作:\_\_\_\_\_。

(3) 6 0000 1002, 读作:\_\_\_\_\_。

(4) 30 0010 0860, 读作:\_\_\_\_\_。

(5) 20 1080 0000, 读作:\_\_\_\_\_。

答案:见解答。

**【解答】**(1) 二千零二十万零六百二十六 (2) 八十七亿零二万九千二百  
(3) 六亿零一千零二 (4) 三十亿零(一)十万零八百六十 (5) 二十亿一千零八十万

**例题 1-2** 根据读法,写出下列各数。

(1)八千六百万零五十,写作:\_\_\_\_\_。

(2)六亿零八千,写作:\_\_\_\_\_。

(3)五千零六万零三百零五,写作:\_\_\_\_\_。

(4)一千二百零三万六千,写作:\_\_\_\_\_。

(5)两亿零二十万,写作:\_\_\_\_\_。

**答案:**见解答。

**【解答】**在级名上画圈,从右向左四位一组,不够四位用0来补。

(1)8600 0050 (2)6 0000 8000 (3)5006 0305 (4)1203 6000

(5)2 0020 0000

**例题 2** 用数字 2、0、2、2、0、6、0、8 组数:

(1)最大的八位数:\_\_\_\_\_。

(2)最小的八位数:\_\_\_\_\_。

(3)读三个“零”的最大八位数:\_\_\_\_\_。

(4)读两个“零”的最小八位数:\_\_\_\_\_。

(5)只读一个“零”的八位数共有\_\_\_\_\_个。

**答案:**见解答。

**【解答】**(1)把数字由大到小排列,最大数在最左。最大八位数为 8622 2000。

(2)首位排最小非零数字,接着排所有的零,最后按从小到大的顺序排非零数字,最小八位数为 2000 2268。

(3)十万位、千位、十位同时为 0,最大为 8602 0202,读作:八千六百零二万零二百零二。

(4)把 0 尽量往左排,最小的数字也往左排,最小为 2002 0268,读作二千零二万零二百六十八。

(5)对三个“0”按位置进行分类,如果 0 已经确定,那么非零数字的排列均为  $C_3^3 \times A_2^2 = 20$  种。

当三个“0”连续排,则有  $\square\square\square\square 000\square$ ,  $\square\square\square 0 00\square\square$ ,  $\square\square 00 0\square\square\square$ , 共 3 种。

当两个“0”连排,另一个单排,则有:

$\square\square\square\square 0\square 00$      $\square\square\square 0\square 00\square$      $\square\square 00\square\square 0\square$

$\square\square 0\square\square\square 00$      $\square\square\square\square 00\square 0$      $\square\square 00\square 0\square\square$

□0□□ □□00 □□□00□□0 □00□ □□□0

共 9 种。

当三个“0”都不连排,则有□□□0 □0□0,□0□0 □□□0,  
共 2 种。

所以,一共有  $20 \times (3 + 9 + 2) = 280$  个只读一个“零”的八位数。



## 针对性练习

**练习①** 读出下列各数,并写出读法。

(1) 8 3001 0000, 读作: \_\_\_\_\_。

(2) 20 0120 3008, 读作: \_\_\_\_\_。

(3) 500 1001 0302, 读作: \_\_\_\_\_。

(4) 300 0200 0000, 读作: \_\_\_\_\_。

(5) 80 2000 1020, 读作: \_\_\_\_\_。

**练习②** 根据读法,写出下列各数。

(1) 四千零三十万零九百, 写作: \_\_\_\_\_。

(2) 五千零三万零一百五十六, 写作: \_\_\_\_\_。

(3) 三十亿四千万六千零八, 写作: \_\_\_\_\_。

(4) 八亿零一百万, 写作: \_\_\_\_\_。

(5) 九十亿零八千零六十, 写作: \_\_\_\_\_。

**练习③** 用数字 0、0、0、0、1、1、2、3 组数:

(1) 最大的八位数: \_\_\_\_\_。

(2) 最小的八位数: \_\_\_\_\_。

(3) 读三个“零”的最小八位数: \_\_\_\_\_。

(4) 读两个“零”的最大八位数: \_\_\_\_\_。

(5) 读一个“零”的最大八位数: \_\_\_\_\_。

**练习④** 用数字 0、0、0、0、1、1、2、3 组成的八位数中, 一个“零”也不读的有 \_\_\_\_\_ 个。



## 练习参考答案

| 练习题号 | 练习 1   | 练习 2   | 练习 3   | 练习 4   |
|------|--|--|--|--------|
| 参考答案 | (1)八亿三千零一万<br>(2)二十亿零一百二十万三千零八<br>(3)五百亿一千零一万零三百零二<br>(4)三百亿零二百万<br>(5)八十亿二千万一千零二十 | (1)4030 0900<br>(2)5003 0156<br>(3)30 4000 6008<br>(4)8 0100 0000<br>(5)90 0000 8060 | (1)3211 0000<br>(2)1000 0123<br>(3)1001 0203<br>(4)3201 0100<br>(5)3210 0100 | 48     |
| 解答提示 | 注意零的读法   | 标记“亿”“万”   | 零的读法规则   | 零在每级末尾 |

电子工业出版社版权所有  
盗版必究