

国外电子与通信教材系列

# 信号、系统及推理

Signals, Systems and Inference

[美] Alan V. Oppenheim  
George C. Verghese 著

彭 剑 译

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书是美国麻省理工学院(MIT)知名教授奥本海姆的近年力作,是其在MIT开展了二十余年的 Signals, Systems and Inference 课程所涉及知识体系的拓展和延伸。本书详细阐述了确定性信号与系统的性质和表示形式,包括群时延和状态空间模型的结构与行为;引入了相关函数和功率谱密度来描述和处理随机信号。本书涉及的应用实例包括脉冲幅度调制,基于观测器的反馈控制,最小均方误差估计下的最佳线性滤波器,以及匹配滤波器;强调了基于模型的推理方法,特别是针对状态估计、信号估计和信号检测的应用。本书融合并扩展了信号与系统时、频域分析的基本素材和概率论知识,这些都是信号处理、控制、通信、金融工程、生物医学等工程和应用科学领域的基本分析方法。

本书可作为电子信息、通信、自动化等专业的信号与系统、随机信号处理课程的融合创新教材,也可以供从事信息获取、转换、传输及处理工作的广大科技工作者参考。

Authorized translation from the English language edition, entitled SIGNALS, SYSTEMS AND INFERENCE, 1st Edition by OPPENHEIM, ALAN V.; VERGHESE, GEORGE C., published by Pearson Education, Inc, Copyright © 2016 by Pearson Education, Inc., Hoboken, NJ 07030.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY CO., LTD., Copyright ©2023.

本书中文简体字版专有出版权由 Pearson Education (培生教育出版集团)授予电子工业出版社,未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字: 01-2020-3910

### 图书在版编目(CIP)数据

信号、系统及推理 / (美) 艾伦·V. 奥本海姆(Alan V. Oppenheim), (美) 乔治·C. 维盖瑟(George C. Verghese)著; 彭剑译. — 北京: 电子工业出版社, 2023.2

(国外电子与通信教材系列)

书名原文: Signals, Systems and Inference

ISBN 978-7-121-44847-8

I. ①信… II. ①艾… ②乔… ③彭… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 005429 号

责任编辑: 杨 博

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 28.5 字数: 785 千字

版 次: 2023 年 2 月第 1 版

印 次: 2023 年 2 月第 1 次印刷

定 价: 109.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: (010) 88254472, yangbo2@phei.com.cn。

谨将此书献给

Amar Bose, Bernard Gold, and Thomas Stockham  
&  
George Sr. and Mary Verghese, Thomas Kailath

这些非凡的人们给我们的生活和事业带来了深远影响

## 封面故事

在设计本书封面<sup>①</sup>时，我们很幸运地有机会与 Krista Van Guilder 密切合作，Krista 是一位才华横溢的图形艺术家，她同时还担任了麻省理工学院电子研究实验室的媒体和设计经理。封面设计源于我们对以一种视觉上赏心悦目且极具冲击力的方式来表达本书主题的期待。我们对本书封面设计的探讨从日晷、时钟和星盘的图片开始。发明于 2000 多年前并一直沿用至 17 世纪的星盘是众多天文计算的一种重要工具，例如利用纬度和天体位置来确定时间。在这些图片的启发下，Krista 搜索到了自 1410 年以来就一直在布拉格老城广场上报时的漂亮天文钟的图片。时间（包括离散时间和连续时间）无疑是本书的核心。这座布拉格天文钟的表面有星盘标记并显示有太阳和月亮的位置以及许多其他天文细节，被选为本书封面的主要图片。

虽然这座布拉格天文钟的照片有很多，但我们选来作为本书封面的精彩照片对我们而言特别具有冲击力。这张照片由来自意大利贝加莫市的 Matteo Foiadelli 拍摄，他是一名爱好摄影的计算机工程师。Matteo 当时和朋友一起在布拉格度假，而且十分熟悉新款数码单反相机的使用。正如他向我们解释的那样：“我只是想给这座天文钟拍一张不同于通常从正面视角拍的照片。因此，我尝试离它近一点，从侧面来拍。”我们很庆幸能找到这张照片，同时也非常感谢 Matteo 允许我们将该照片用作本书封面以及每章开头的艺术图片。

用作封底的这张照片是由一种完全不同的照相机——于 1990 年部署在轨的哈勃太空望远镜拍摄的。这张照片拍摄于 2001 年，记录了 5 亿多年前离开这些星系的光子，与用作封面的天文钟形成了鲜明对比。哈勃主页上的描述如下：

“在哈勃拍摄的这张编号为 ESO77-14 的照片中，一对大小相似的星系表演了惊人的天体舞蹈。这两个星系间的引力拉锯战呈现出两个显著特征：一是它们之间有物质桥梁连接，二是它们的主体崩塌了。这对相互作用的星系位于距地球约 5.5 亿光年之遥的印度河星座，两者中心之间的尘埃带显示了原本扁平的圆盘被拉扯成三维形状的扭曲程度。”

使哈勃太空望远镜精确入轨，以及随后通过它对数据的记录、检索和处理来产生如此具有启发性和令人敬畏的照片，反映出在弃用星盘 400 年后，人类对信号、系统及推理的掌握达到了一个新的高度。而且，这张照片还唤起了取得新进展并拓展新视野的无限机会。

---

① 指英文原书。——编者注

# 前　　言<sup>①</sup>

本书源于我们在麻省理工学院(MIT)电气工程与计算科学系开发和讲授的一门本科生课程。选修我们课程的通常有许多是工科专业的大三和大四学生以及应用科学专业的本科生和研究生。学习本课程及本书需先修两门课程：信号与系统的时域及频域分析导论和概率导论。大多数工科学生在其学位课程的早期通常都学习了这两门课程。“信号与系统”课程基本就是建立在微分方程课程基础上的，理想情况下还融入了一些基本的线性代数知识。

许多对应用数学有着浓厚兴趣的工科学生随后一般会继续学习控制、信号处理或通信等更专业的本科课程。除专业性外，此类课程往往重点关注的是确定性信号和系统。相反，我们的目标是以先修内容为基础，将信号、系统及概率知识融合在一起，以使更多学生认识到我们的课程与其自身相关性及趣味性。因此，这门课程既可作为一门基础课程，又可为许多工程学系和应用科学系的高年级本科课程或研究生入门课程打下足够扎实的基础。

促成本书出版的这门课程给学生讲授信号及信号描述，这些内容对他们而言通常是陌生的，例如，随机信号以及通过相关函数和功率谱密度来表征随机信号。这门课程给学生介绍了新的系统类型和系统性质，如状态空间模型、可达性和可观测性、最优滤波器及群时延等。而且，这门课程还强调了基于模型的推理方法，尤其是状态估计、信号估计与信号检测部分。

尽管许多现有教材都很好地介绍了我们课程中的某些内容，但我们并没有从中找到一本在整个主题范围内都符合我们需求的教材。这种情况促使我们编写讲义，并最终促成了本书的出版。在这个过程中，我们不断尝试和完善所呈现的内容及顺序，并不时地纳入其他内容或剔除现在又回到本书中的部分内容。这些尝试得到的结论之一是，我们甚至没有时间在一个学期的课程中学习完信息论的基本概念，尽管信息论对通信系统或更一般的推理至关重要。

如本书导论部分所述，信号、系统和概率知识一直并将继续在信号处理、控制、通信、金融工程、生物医药等研究领域以及许多其他研究领域(涉及在连续时间或离散时间情形下运行并受到干扰、噪声或不确定性影响的动态变化过程)中得到综合运用。这一前提构成了这门课程及本书整体组织和内容的基础。

本书由四部分组成。对每章内容更为详细的概览可见目录。第1章和第2章简要回顾信号与线性时不变(LTI)系统的先修知识，部分内容可能在其他教材中不多见。这两章的主要目的是建立统一的标记符号和概念，以在此基础上构建后续章节。第3章讨论其中一些先修内容在脉冲幅度调制数字通信环境中的应用。

第4章～第6章专门讨论状态空间模型，并将重点放在单输入单输出线性时不变系统上。讨论在很大程度上是围绕此类系统的特征模态并在不同自然频率的简化假设下进行的。本书的这一部分介绍在线性时不变系统状态观测器背景下基于模型推理的思想，并考察相关的反馈控制策略。

第7章～第9章简要回顾先修概率知识，包括静态随机变量估计与假设检验。如第1章和第2章所述，将我们对相关概念的标记和观点的阐述与学生在其早期概率课程中可能遇到的问题联系起来很重要。同时，部分学生之前对这一内容的某些部分(特别是有关假设检验的部分)可能并不熟悉。

<sup>①</sup> 中译本的一些图示、参考文献、符号及其正斜体形式等沿用了英文原著的表示方式，特此说明。

第 10 章～第 13 章先讨论广义平稳随机信号以及对此类信号进行线性时不变滤波所产生的输出，然后利用相关函数和功率谱密度的相关性质及解释对标准信号估计和信号检测问题进行研究。第 12 章将重点放在线性最小均方误差信号估计(即维纳滤波)上。而第 13 章则将重点放在其最优解涉及匹配滤波的信号检测上。

正如人们常说的那样，一门课程的目的是揭示而不是掩盖一个主题。秉持这种精神，本书每章的最后一节都提供了一些延伸阅读建议。在这些简要描述的部分中，我们的目的不是详尽无遗，而是就与本书内容有关的丰富学习资源提出建议。关于研究文献，我们只列出了著作而没有列出论文，并且在每种情形下都只列出了本可以列出的著作的很小一部分。

每章都提供了一组丰富的习题，包括：基础习题、进阶习题和拓展习题。对大多数学生来说，基础习题较为容易，进阶习题可能要求更高，而拓展习题则往往涉及稍微超出该章所讲范围的内容。有些问题需要利用某个适当的计算软件包来模拟或计算。考虑到此类软件包的多样性和普遍性，我们有意识地没有围绕某个特定平台来设计计算练习。

本书包含的内容比能在一个学期的课程中轻松讲授的内容多。这使教师和自学者可针对本书内容做不同的取舍，并且我们多年来也进行了各种各样的尝试。对更倾向于通信或信号处理的课程，可略去第 4 章、第 5 章和第 6 章(状态空间模型相关内容)或者仅做简要介绍。而对更倾向于控制的课程，或许可以考虑将第 3 章(脉冲幅度调制)、第 9 章(假设检验)和第 13 章(信号检测)作为选学内容。

以下对该课程的第三个版本(也是我们目前在讲授的版本)做稍微详细一点的概述。这个版本包括在约 13 周的学期中每周讲授两次。同样次数的小组复习课与课堂讲授相互交织，专门针对说明讲课内容并帮助完成周作业的特定问题展开互动讨论。另外，我们还提供可选的小组教程。最后，我们每周都会开设几次可选的夜间“公共休息室”，让班上的学生可以相互交流或与某名教学团队成员互动，以帮助学生更好地完成他们的作业。

总的来说，我们在教学中喜欢强调作业为学习及概念和方法的实践提供了机会，而不是将其作为考核手段。我们建议以同样的精神来对待本书每章末尾的习题。特别地，我们鼓励学生开展建设性的合作，并分享见解和方法。我们对问题的评分主要是为了向学生提供反馈，并激发学生的某种责任感和学习动力。这门课程通常会进行期中测验和期末考试，本书每章末尾的许多习题最初都是作为测验或考试问题提出的。必要时，还可从课堂内容中衍生出许多学期项目。

在本着与本书导论部分相同的精神做了介绍性讲解后，第 1 章简要回顾信号与系统方面的内容。课堂上的重点放在了不太熟悉的先修课程内容上，学生的任务是在适当的作业习题引导下复习其余部分。然后，我们直接转到第 4 章、第 5 章和第 6 章中的状态空间模型内容。即使学生之前学习过有关状态空间模型的一些内容，这里仍存在非常多的内容对他们而言是新的，虽然一般来讲他们掌握这些内容并不太难。尽管我们并没有要求学生进行更详细的证明(例如对与线性时不变观测器特征值放置或与状态反馈有关的那些问题)，但仍希望他们能理解相关结果并知道如何将这些结果应用于小型例子中。从状态空间观测器框架中得到的一条重要经验是，系统模型在从所测信号到系统推理的过程中发挥了很大作用。

接下来，我们的课程转向了概率模型和随机变量。第 7 章回顾的概率知识有很大一部分融入了涵盖最小均方误差(MMSE)估计和线性最小均方误差(LMMSE)估计的课程中，第 8 章讨论了 MMSE 和 LMMSE。为了更快地转向随机信号而不是停留在对先修概率课程内容的回顾中，我们将第 9 章中的假设检验研究延后到了课程结束时，并将其作为第 13 章信号检测内容的开场白。这样处理的部分原因还在于，第 9 章和第 13 章都专注于离散随机量(即假设)的推理，而与 MMSE 和 LMMSE 有关的第 8 章和第 12 章则讨论的是连续随机变量的推理。因此，我们直接从第 8 章转

到了第 10 章，并对随机信号(即随机过程)进行研究，同时重点讨论了广义平稳(WSS)过程的时域分析及对此类过程的线性时不变滤波。

第 11 章中的“功率谱密度”这一主题与第 1 章中讨论的变换和能量谱有关，同时提供了参考第 2 章全通滤波器和谱因式分解相关部分的机会。这些主题对第 12 章中的广义平稳过程 LMMSE(或维纳)滤波同样重要。在本课程的大多数内容中，我们都略去了完整因果维纳滤波器的开发，并转而讨论了利用某过程过去值来预测该过程未来值的情形。

本课程的最后一部分重点回顾了第 3 章，利用脉冲幅度调制的数字通信环境来促进假设检验问题的解决。第 3 章还涉及第 2 章中有关信道失真和群时延的内容。随后，第 9 章讨论了假设检验范式。这一部分为最后一章(第 13 章)研究信号检测做了铺垫。

本书的广度以及我们带给该项目的不同背景，意味着有很多东西我们需要相互学习。另外，我们每个学期还从参与本课程且十分投入的学生、教学助理、教师同事那里以及从与本课程所涉主题相关的文献中学到了很多。如果在读者构建自己对信号、系统及推理主题的个人再综合过程中，本书能激发并支持他们的发现之旅，那么本书的目标就得到了充分实现。

Alan V. Oppenheim & George C. Verghese

马萨诸塞州剑桥城

# 致    谢

本书源于麻省理工学院的一门课程，我们在 20 多年前最先规划、设计并讲授了该课程。随后，通过不断尝试以及对内容和表现形式的持续更新，该课程演变成了目前的版本。在当时，该课程是作为我们电气工程与计算机科学系 (EECS) 五年制工学硕士学位课程计划的一部分发布的。我们非常感激 Paul Penfield (时任系主任)、Jeffrey Shapiro (时任系副主任) 和 William Siebert，他们参与确定的课程体系为这门课程提供了机会。Jeffrey Shapiro 还与我们一道共同确定了最初的内容。继任的几位系主任 (John Guttag、Rafael Reif、Eric Grimson、Anantha Chandrakasan) 和他们的管理团队都接力为该课程及其修订提供了十分重要的支持，我们对此表示由衷的感谢。更有意义的是，我们为能有机会在高度学院化和充满活力的电气工程与计算机科学系发展自己的学术生涯感到十分幸运。麻省理工学院对以研究为基础的教学文化的重视以及对卓越教学的认可和颂扬，深深影响了我们。

在我系讲授本课程的教学团队包括一名每周讲两次课并全面负责这门课程运行的教师以及定期与小规模学生小组会面的数名复习讨论课讲师和教学助理。这些年来，我们系的许多教师同事一直在与我们合作，担任该课程的复习课讲师或主讲人。许多学生都担任过教学助理，他们能干且充满热情。同时，来自优秀行政助理的帮助也令我们受益匪浅。接下来，我们要借此机会来感谢所有这些人，感谢他们为本课程的开发和运行、为学生在本课程中的学习体验以及为本书所做出的多方面贡献。

除了我们两人多次单独和联合主讲该课程并监督该课程的管理外，Bernard Lesieutre、Charles Rohrs、Jeffrey Shapiro、Gregory Wornell 和 John Wyatt 等其他同事也承担过这方面的工作。在此过程中，他们不但提供了与课程内容和课程讲义有关的重要反馈，而且还带来了新的见解，开发了新的课程考核题目及课后习题。

多年来，我们一直有幸与一群才华横溢且尽职尽责的教师和高年级研究生合作，他们担任了复习讨论课的讲师。参与过本课程教学复习讨论课的讲师有：Jinane Abounadi、Elfar Adalsteinsson、Babak Ayazifar、Duane Boning、Petros Boufounos、John Buck、Mujdat Cetin、Jorge Goncalves、Julie Greenberg、Christoforos Hadjicostis、Peter Hagelstein、Thomas Heldt、Steven Isabelle、Franz Kaertner、James Kirtley、Amos Lapidoth、Bernard Lesieutre、Steve Massaquoi、Shay Maymon、Alexandre Megretski、Jose Moura、Asuman Ozdaglar、Michael Perrott、Rajeev Ram、Charles Rohrs、Melanie Rudoy、Jeffrey Shapiro、Ali Shoeb、William Siebert、Vladimir Stojanovic、Collin Stultz、Russell Tedrake、Mitchell Trott、Thomas Weiss、Alan Willsky、Gregory Wornell、John Wyatt、Laura Zager 及 Lizhong Zheng。这些同事为学生提供了丰富的经验，并为本课程内容和本书内容做出了诸多贡献。

在这个时期，优秀教学助理们的奉献和活力也一直让我们以及本课程的学生受益良多，他们是：Irina Abarinov、Abubakar Abid、Anthony Accardi、Chalee Asavathiratham、Thomas Baran、Leighton Barnes、Soosan Beheshti、Ballard Blair、Petros Boufounos、Venkat Chandrasekaran、Jon Chu、Aaron Cohen、Roshni Cooper、Ujjaval Desai、Vijay Divi、Shihab Elborai、Baris Erkmen、Siddhartan Govindasamy、Hanhong Gao、James Geraci、Michael Girone、Carlos Gomez-Uribe、Christoforos Hadjicostis、Andrew Halberstadt、Nicholas Hardy、Everest Huang、Irena Hwang、Zahi Karam、Asif Khan、Alaa Kharbouch、Ashish Khisti、Lohith Kini、Alison Laferriere、Ryan Lang、Danial Lashkari、

Adrian Lee、Karen Lee、Durodami Lisk、Karen Livescu、Lorenzo Lorilla、Zhipeng Li、Peter Mayer、Rebecca Mieloszyk、Jose Oscar Mur Miranda、Kirimania Murithi、Akshay Naheta、Kenny Ng、Tri Ngo、Paul Njoroge、Ehimwenma Nosakhare、Uzoma Orji、Tushar Parlikar、Pedro Pinto、Victor Preciado、Andrew Russell、Navid Sabbaghi、Maya Said、Peter Sallaway、Sridevi Sarma、Matthew Secor、Mariam Shanechi、Xiaomeng Shi、Andrew Singer、Lakshminarayan Srinivasan、Brian Stube、Eduardo Sverdlin-Lisker、Kazutaka Takahashi、Afsin Ustundag、Kathleen Wage、Tianyu Wang、Keyuan Xu、HoKei Yee 及 Laura Zager。他们的建议以各种方式反映在本书中。

在讲授本课程的许多年里，我们的同事 Frederick Hennie 在教学人员配备方面的智慧一直给我们以引导。Agnes Chow 对电气工程与计算机科学系行政及财务运行的具有战略性而详尽的监督，使我们及其他教师能专注于教学。作为系教育主管的助理，Lisa Bella 几乎每学期都单枪匹马地以令人难以置信的响应速度和良好的幽默感参与了实际的行政管理工作，为本系整个教学事业中的 100 名教授和 100 多名教学助理提供支持。我们还要感谢 Alecia Batson、Margaret Beucler、Dimonika Bray、Susan Davco、Angela Glass、Vivian Mizuno、Sally Santiago、Darla Secor、Eric Strattman 及 Diane Wheeler 为我们的课程提供的诸多管理支持。

20 年来，这门课程的主题在不断发展，最终形成本书的课程讲义也一直在丰富和变化。学习这门课程的学生始终是这一过程的关键参与者，他们通过提出问题、请求、挑战、建议、批评和鼓励参与到本课程中。与麻省理工学院课堂上有天赋、有敬业精神、有思想且擅于表达的学生一起合作一直是我们的荣幸。

我们有时候会遗憾或者开玩笑地说，目前的教材都已经到了第四版，而其前三版却并没有正式出版过。然而，正如任何教材的作者所知道的那样，利用最初看上去非常不错的课程讲义来编写一本优秀教材的最后阶段仍然令人望而生畏。在推动我们的课程讲义更进一步地接近一本教材方面，我们的一些教学助理和其他学生提供了大量帮助和反馈。我们要特别感谢 Leighton Barnes 和 Ballard Blair，以及 Manishika Agaskar、Ganesh Aijjanagadde、Michael Mekonnen 和 Guolong Su 所付出的努力。在促使本书出版的过程中，我们愉快、高效、敏锐地收集并跟踪所有片段、版本和编辑校订，我们十分感谢 Laura von Bosau。

我们系的领导班子一直鼓励我们将课程讲义不只作为课堂教学的补充而将其出版成书，以使这些内容能得到更广泛和更独立的应用。Anantha Chandrakasan 近些年来的敦促是促成本教材出版的一个关键催化剂。几家出版社对出版本书的兴趣同样也很重要，在此表示衷心感谢。Tom Robbins 很早就看到了本书的出版潜力，并在本课程的前十年里定期给我们提供有益的建议，那时他在 Prentice Hall 任职。Phil Meyler 在稍后的阶段慷慨地安排了详细的反馈。我们对 Pearson 副总裁兼主任编辑 Marcia Horton 及执行编辑 Andrew Gilfillan 的远见和正直十分尊重，这是我们选择这家出版社的主要原因，他们在这一出版项目上表现出来的耐心、承诺和信心对我们来说意义重大。我们要特别感谢能干且乐于助人的编辑和制作人员，尤其要感谢 Pearson 高级主编 Scott Disanno 所给予的支持，以及 Jouve 高级项目经理 Pavithra Jayapaul 在过去一年里对无数制作细节的出色而踏实的安排。

正如更完整的封面设计说明部分所描述的那样，与麻省理工学院跨学科电子研究实验室 (RLE) 媒体与设计经理 Krista Van Guilder 的密切合作是件很愉快的事。RLE 是我们两人的研究大本营，它为我们提供的创造性研究环境同样深刻影响着我们的教学(包括本教材的开发)。Yoel Fink 及其前任 Jeffrey Shapiro 的直率领导以及 RLE 总部员工堪称典范的能力和友好，为 RLE 定下了基调。

出版一本书自然包括在这个过程中经历各种挑战。其中最重要的一点是，我们两人需要协调各自在许多问题(包括小问题和重大问题)上的不同观点、直觉、方法和风格。我们从朋友和相互

尊重的同事开始，这对我们帮助很大。在共同编著本书的过程中，如此密切和广泛的合作令人愉快地深化了这种尊重和友谊。

最后，我们想表达一些更为个人的想法和致谢。

### Alan V. Oppenheim

不管怎样理解，我对本书贡献的大部分 DNA 都来自我的母亲，她是我的非凡导师和榜样。至今仍令我惊讶不已的是，她的父母经埃利斯岛从东欧来到美国，而她作为这个贫苦移民家庭中的十个小孩之一仍设法在 20 世纪 20 年代末读了大学，然后又进了医学院。接下来，作为一位单身母亲，她又在公共卫生部门全职工作的同时非常成功地将三个孩子抚养成人。她是一位令人不可思议且鼓舞人心的女性。

我 1955 年作为大一新生进入麻省理工学院多少有点偶然，入学后不久，我就给家里写了封信，说我可能在第一学年结束时离开这儿去某个更有趣的地方。很显然，麻省理工学院不久便让我感到有趣和满意，并成了我度过整个学术生涯的奇妙之地，首先是作为学生，然后是作为一名教师。我十分感激麻省理工学院，特别是感激我在麻省理工的整个时期教过我的老师和导师。而且，正如本书题献页所述，我要以这种特殊的方式特别感谢 Amar Bose、Bernard (Ben) Gold 和 Thomas (Tom) Stockham 这三位导师，他们的支持和鼓励深深影响了我。

我生命中最幸运的日子之一是我走进 Amar Bose(当时他还是一名年轻的助理教授)的办公室这天，然后我签约成为他的首任教学助理。而且，他最终也同意做我的博士论文导师。在我们相识的几十年里，我从他那里学到的教学、研究和生活知识对我的影响难以用言语来表达。他坚持以最高标准来做每一件事，无论是作为教师、发明者还是创业者，他的成就都堪称传奇。Tom Stockham 是我在博士课程期间遇到的另一位年轻助理教授。他对我的想法感到兴奋并且十分热情，这给了我追求这些想法的勇气。在他先作为麻省理工学院的教师，然后作为麻省理工学院林肯实验室的研究员的那些年里，Tom 都是当时未知的数字信号处理领域的开拓者之一。凭借他在这个时期以及后来在犹他州立大学的研究，Tom 成为公认的数字音频之父。Tom 是一名非凡的教师、研究员、实践工程师和朋友。我第一次见到 Bernard (Ben) Gold 是我在麻省理工学院做教师的早期，当时他是电气工程与计算机科学系的一名客座教师。Ben 在语音压缩方面的工作是他为数字信号处理做出的众多开创性贡献之一。Ben 的才华、创造力和谦逊的风格给了我灵感。他如饥似渴地向他周围的人学习，就像这些人向他学习一样。Amar、Tom 和 Ben 的言传身教教给了我很多东西，包括激情和非凡标准对每一项追求的重要性。他们给我的影响融入了我的生命、我的事业以及这本书中。我想念他们，他们的精神在我心里深深扎下了根。

正如任何作者所知，编写教材是一个长期、艰苦但最终会获得回报的过程。在我的整个学术生涯中，我曾有机会编写和编辑多本图书，有些还出版了两到三个版本。在这个过程中，我一直很幸运地与除 George C. Verghese 以外的优秀合著者合作，特别是 Ron Schafer 和 Alan Willsky。尽管这样重大的合作项目通常可能导致关系紧张，但我要高兴地说，在所有情况下，我们之间的信任和友谊最终都增强了。

我常被问及是否很享受写作。我通常的回应是：“虽然写作艰难，而且有时还很痛苦，但我还是很喜欢写作。”这种强度的项目不可避免地需要来自家庭和好友的宽容、耐心、支持及理解。在我的整个学术生涯中，我一直都很幸运地从我的妻子 Phyllis 和我们的孩子 Justine、Jason 那里得到了这一切，他们始终是我无比快乐的源泉。另外，我还十分感谢 Nora Moran 在我完成本书的过程中所给予的特殊友情和鼓励。

## George C. Verghese

我的父母 George Sr. 和 Mary 在印度喀拉拉邦相距仅 15 英里的两个小镇长大，但他们首次相遇却是在 2500 英里外的埃塞俄比亚首都亚的斯亚贝巴，那是 20 世纪 50 年代初，年轻、自信且富有冒险精神的他们在那里旅行，他们当时都是教师。后来，他们又去了另外两个大洲，他们一直在为我树立优雅生活的榜样。我要感谢他们带给我的一切，包括我的兄弟。

我是在家读物理书长大的，这无疑是能进入印度马德拉斯理工学院读本科的原因之一。在那里，我最喜欢的教授 V. G. K. Murti (教授网络理论) 和 K. Radhakrishna Rao (教授电子电路) 十分尊重他们的学生，并以其清晰、完整的思维和教学以及友善的亲和力赢得了学生的尊重。这也许是为什么成为一名教授这个提议对我颇具吸引力的原因。

我很幸运地上了纽约州立大学石溪分校 Chi-Tsong Chen 讲授的“线性系统理论”这门课，到现在我都依然能记得该课程教材作者十分优雅地给我们讲第一堂课时的兴奋。几个月后，我驱车横跨美国来到了斯坦福大学，并师从 Thomas Kailath，从此开始了改变我人生的另一段旅程。在斯坦福学习是一段很特别的时光，特别是当 Thomas Kailath 刚完成他自己编写的线性系统教材时，我既有机会向他学习，同时也有机会与他的其他学生(很棒的一个群体)交流。40 年前，毫无疑问，他只是认为签约成为我的博士论文导师，但 15 年后，他发现自己成了我家庭的一份子。我继续从他那里学习其他前沿知识，我依然对他的敏锐、博学、精力和慷慨心存敬畏。

当我初入麻省理工学院时，我以为我会尝试两年，看我到底有多喜欢这份工作。没想到，一晃我竟然待了 35 年之久。为这样一家非凡的学院工作以及与使这家学院如此卓尔不群的人们(学生、教师和职员)合作一直是我的荣幸。而与 Alan V. Oppenheim 的合作一直是其中的一大亮点。

我的朋友和大家庭一直帮助我保持对本书的创作，为此，我非常感谢他们。毫无疑问，当他们下一次问我，听到我正在写的书并不是他们最近看到的那本时，他们会松一口气。在创作本书的整个过程中，我亲爱的妻子 Ann 比我能想象的更有耐心和理解。每当她遇到瓶颈时，她总是拉我一起出去度假，而我也总是发现，我和她一样需要度假。没有她的宽容，我不可能完成这个项目。我们的女儿 Deia 和 Amaya 现在已经踏上了她们自己设计的人生道路，这让我们彼此都很开心，她俩是 Ann 和我最大的幸福。

# 目 录

导论 .....	1
<b>第 1 章 信号与系统 .....</b>	<b>6</b>
1.1 信号、系统、模型及性质 .....	6
1.2 线性时不变系统 .....	8
1.2.1 线性时不变系统的冲激响应表示 .....	8
1.2.2 线性时不变系统的特征函数与变换表示 .....	9
1.2.3 傅里叶变换 .....	12
1.3 确定性信号及其傅里叶变换 .....	13
1.3.1 信号类别及其傅里叶变换 .....	13
1.3.2 Parseval 恒等式、能量谱密度及确定性自相关 .....	15
1.4 双边拉普拉斯变换与双边 $z$ 变换 .....	17
1.4.1 双边 $z$ 变换 .....	17
1.4.2 双边拉普拉斯变换 .....	20
1.5 连续时间信号的离散时间处理 .....	20
1.5.1 对连续时间信号进行离散时间处理的基本结构 .....	21
1.5.2 离散时间滤波及整体连续时间响应 .....	22
1.5.3 非理想 D/C 转换器 .....	24
1.6 延伸阅读 .....	26
习题 .....	26
<b>第 2 章 幅度、相位与群时延 .....</b>	<b>53</b>
2.1 傅里叶变换的幅度和相位 .....	53
2.2 群时延与非线性相位的影响 .....	55
2.2.1 窄带输入信号 .....	56
2.2.2 宽带输入信号 .....	57
2.3 全通系统与最小相位系统 .....	61
2.3.1 全通系统 .....	61
2.3.2 最小相位系统 .....	63
2.4 谱因式分解 .....	65
2.5 延伸阅读 .....	66
习题 .....	66
<b>第 3 章 脉冲幅度调制 .....</b>	<b>83</b>
3.1 基带脉冲幅度调制 .....	83
3.1.1 传输信号 .....	84
3.1.2 接收信号 .....	85

3.1.3 频域特征 .....	85
3.1.4 接收器端码间干扰 .....	87
3.2 奈奎斯特脉冲 .....	89
3.3 通带脉冲幅度调制 .....	91
3.3.1 频移键控(FSK) .....	91
3.3.2 相移键控(PSK) .....	91
3.3.3 正交幅度调制(QAM) .....	93
3.4 延伸阅读 .....	95
习题 .....	95
<b>第 4 章 状态空间模型 .....</b>	<b>107</b>
4.1 系统记忆性 .....	107
4.2 说明性例子 .....	107
4.3 状态空间模型 .....	116
4.3.1 离散时间状态空间模型 .....	116
4.3.2 连续时间状态空间模型 .....	118
4.3.3 状态空间模型的关键性质 .....	120
4.4 基于线性时不变输入-输出模型的状态空间模型 .....	121
4.5 非线性状态空间模型的均衡态和线性化 .....	125
4.5.1 均衡态 .....	125
4.5.2 线性化 .....	128
4.6 延伸阅读 .....	130
习题 .....	130
<b>第 5 章 线性时不变状态空间模型 .....</b>	<b>137</b>
5.1 离散时间模型与连续时间模型 .....	137
5.2 零输入响应与模态表示 .....	139
5.2.1 无驱动连续时间系统 .....	139
5.2.2 无驱动离散时间系统 .....	144
5.2.3 线性时不变系统的渐进稳定性 .....	146
5.3 模态坐标中的一般响应 .....	148
5.3.1 有驱动连续时间系统 .....	148
5.3.2 有驱动离散时间系统 .....	150
5.3.3 相似变换与对角化 .....	152
5.4 传输函数、隐藏模态、可达性及可观测性 .....	157
5.4.1 连续时间系统的输入-状态-输出结构 .....	157
5.4.2 离散时间系统的输入-状态-输出结构 .....	163
5.5 延伸阅读 .....	169
习题 .....	169
<b>第 6 章 状态观测器与状态反馈 .....</b>	<b>182</b>
6.1 设备与模型 .....	182

6.2	状态估计与观测器 .....	183
6.2.1	实时模拟 .....	183
6.2.2	状态观测器 .....	185
6.2.3	观测器设计 .....	186
6.3	状态反馈控制 .....	192
6.3.1	开环控制 .....	193
6.3.2	利用线性时不变状态前馈的闭环控制 .....	193
6.3.3	线性时不变状态反馈设计 .....	194
6.4	基于观测器的反馈控制 .....	200
6.5	延伸阅读 .....	203
	习题 .....	203
<b>第 7 章</b>	<b>概率模型 .....</b>	<b>213</b>
7.1	基本概率模型 .....	213
7.2	条件概率、贝叶斯法则及独立性 .....	214
7.3	随机变量 .....	215
7.4	概率分布 .....	216
7.5	联合分布随机变量 .....	217
7.6	期望、矩和方差 .....	219
7.7	二元随机变量的相关性和协方差 .....	221
7.8	相关性质的向量空间解释 .....	224
7.9	延伸阅读 .....	225
	习题 .....	226
<b>第 8 章</b>	<b>估计方法 .....</b>	<b>233</b>
8.1	连续随机变量的估计 .....	233
8.2	从估计值到估计器 .....	237
8.3	线性最小均方误差估计 .....	241
8.3.1	通过对一个随机变量的单独测量来线性地估计另一个随机变量 .....	241
8.3.2	多元测量值 .....	245
8.4	延伸阅读 .....	248
	习题 .....	248
<b>第 9 章</b>	<b>假设检验 .....</b>	<b>260</b>
9.1	噪声中的二元脉冲幅度调制 .....	260
9.2	最小差错概率假设检验 .....	261
9.2.1	利用最小条件差错概率做出判定 .....	262
9.2.2	最小总体差错概率的 MAP 判定规则 .....	262
9.2.3	数字通信中编码的假设检验 .....	264
9.3	二元假设检验 .....	267
9.3.1	误报、漏报与检测 .....	267
9.3.2	似然比检验 .....	268

9.3.3 Neyman–Pearson 判定规则与接收器工作特性	269
9.4 最小风险判定	272
9.5 延伸阅读	273
习题	274
<b>第 10 章 随机过程</b>	<b>288</b>
10.1 随机过程的定义及实例	288
10.2 随机过程的一阶矩和二阶矩表征	291
10.3 平稳性	292
10.3.1 严格意义上的平稳性	292
10.3.2 广义平稳性	292
10.3.3 广义平稳相关函数和协方差函数的某些性质	293
10.4 各态历经性	295
10.5 随机过程的线性估计	296
10.5.1 线性预测	296
10.5.2 线性 FIR 滤波	297
10.6 广义平稳随机过程的线性时不变滤波	298
10.7 延伸阅读	302
习题	303
<b>第 11 章 功率谱密度</b>	<b>319</b>
11.1 期望瞬时功率的频谱分布	319
11.1.1 功率谱密度	319
11.1.2 波动谱密度	322
11.1.3 互谱密度	326
11.2 时间平均功率谱密度期望及 Einstein–Wiener–Khinchin 定理	327
11.3 应用	331
11.3.1 揭示周期性分量	331
11.3.2 建模滤波器	332
11.3.3 白化滤波器	334
11.3.4 采样带限随机过程	336
11.4 延伸阅读	336
习题	336
<b>第 12 章 信号估计</b>	<b>351</b>
12.1 随机变量的 LMMSE 估计	351
12.2 FIR 维纳滤波器	353
12.3 无约束离散时间维纳滤波器	357
12.4 因果离散时间维纳滤波	363
12.5 最优观测器与卡尔曼滤波	368
12.5.1 加性噪声干扰信号的因果维纳滤波	368
12.5.2 维纳滤波器的观测器实现	370

12.5.3 最优状态估计与卡尔曼滤波	371
12.6 连续时间信号估计	372
12.7 延伸阅读	372
习题	372
<b>第 13 章 信号检测</b>	<b>387</b>
13.1 多元测量假设检验	387
13.2 独立同分布高斯噪声中的已知信号检测	389
13.2.1 最优解	389
13.2.2 性能表征	391
13.2.3 匹配滤波	393
13.3 匹配滤波器检测的扩展	394
13.3.1 持续时间无限的有限能量信号	394
13.3.2 白噪声中信号检测的信噪比最大化	395
13.3.3 有色噪声中的检测	397
13.3.4 连续时间匹配滤波器	398
13.3.5 匹配滤波与奈奎斯特脉冲设计	399
13.3.6 未知到达时刻与脉冲压缩	400
13.4 独立同分布高斯噪声中的信号识别	401
13.5 延伸阅读	406
习题	406
参考文献	420
中英文对照表	425

# 第1章 信号与系统

本书假设读者具有一些基本的背景知识，如利用卷积(convolution)、傅里叶分析(Fourier analysis)、拉普拉斯变换(Laplace transform)和 $z$ 变换( $z$  transform)来描述线性时不变系统(LTI systems)及相关的连续时间信号和离散时间信号。为了确定全书将要使用的符号，同时也为了方便后续章节在讨论相关主题时参考，本章将简要总结并回顾这些背景知识。

## 1.1 信号、系统、模型及性质

全书将讨论各种不同类型的信号和系统，同时建立与这些信号和系统对应的模型，并研究它们的性质。

**信号**是用包含一个或多个自变量的实值函数或复值函数来表示的。这些函数可能是一维(如只包含一个自变量)的或多维的，并且这些自变量可能连续，也可能离散。许多一维信号中的自变量天然地与时间(尽管可能并不对应于“实时”)有关。连续的自变量是用圆括号括起来的，而离散的自变量则是用方括号括起来表示某个整数值变量的。例如， $x(t)$ 对应于某个连续时间(CT)信号，而 $x[n]$ 则对应某个离散时间(DT)信号。有时，符号 $x(\cdot)$ 和 $x[\cdot]$ 也被用来表示整个信号，其中略去了用来表示时间的特定变量 $t$ 或 $n$ 。

本书前6章完全围绕确定信号展开。从第7章开始，引入了随机信号(如从信号集中随机抽取的信号)，信号集中的任何一个信号都可能是某个特定概率过程的结果。本书一般使用大写字母来表示随机过程的信号集，以区别于确定信号。例如，本书用 $X(t)$ 表示连续时间随机过程，用 $x(t)$ 表示信号集中的某个特定信号。类似地，本书用 $X[n]$ 表示离散时间随机过程。

**系统**是由软件或硬件元素、组件或子系统构成的集合。系统可将输入信号集映射为输出或响应信号集。更为一般的观点(本书没有介绍)没有将特定信号区分为输入信号或输出信号，这种观点认为，系统是对指定信号集施加约束的实体。任何满足约束的特定信号集均为系统的行为。

**模型**以数学、软件、语言或其他方式来描述(通常是近似地描述)系统对指定信号集施加的约束。模型本身就是系统，因为它对自身所描述的信号集施加了约束。因此，本书很多地方对“系统”和“模型”这两个词的使用都可以互换。但有时候，将某些真实的物理系统与对这些系统的数学描述或计算机模拟区分开来可能很重要。

可以考虑用欧姆电阻定律来说明以映射方式描述系统和以行为方式描述系统之间的区别。欧姆定律可表示为 $v(t) = Ri(t)$ ，该式以电流 $i(t)$ 作为输入信号，电压 $v(t)$ 作为响应信号，由该式可得

$$Ri(t) / v(t) = 1 \quad (1.1)$$

式(1.1)更能说明与这两个信号有关的约束。类似地，图1.1中的电阻-电容电路显示了针对信号 $v(t)$ ， $i_R(t)$ 和 $v_C(t)$ 施加的约束(满足Kirchhoff定律)，但并没有确定哪些变量是输入变量，哪些变量是输出变量。更确切地说，系统的行为表示是由信号必须满足的一系列约束构成的。例如，如果某个特定系统针对两个信号施加了时移约束，但并没有指明哪个信号对应于输入信号，哪个信号对应于输出信号，那么从行为上来解释该系统会更合适。本书一般将系统表示为由输入信号到输出信号的映射。

系统或模型的映射表示包含三个部分：输入信号集  $\{x(\cdot)\}$ ，其中每个信号都可能在某个指定的可能范围内变化；输出信号集  $\{y(\cdot)\}$ ，其中每个信号都可能变化；映射描述，该描述将输出信号唯一地定义为输入信号的函数。

对单输入、单输出的连续时间信号来说，用映射来描述系统的一种方式如图 1.2 所示，可理解为  $T\{\cdot\}$  将输入信号集中的信号映射为输出信号集中的信号。给定输入信号  $x(\cdot)$  和映射  $T\{\cdot\}$ ，可唯一地得到输出信号  $y(\cdot)$ 。更一般地，图 1.3 中的描述可用来表示任意时刻  $t$  的输入信号和输出信号。关于图 1.3 中的符号，重要的是理解“ $T\{\cdot\}$  一般表示不同信号集之间的映射，而不是表示某个特定时刻的信号值  $x(t)$  与同一时刻的信号值  $y(t)$  之间的无记忆映射”这一点。例如，如果系统使输入信号延时了  $t_0$ ，那么

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (1.2)$$

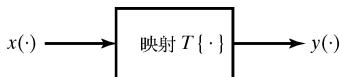


图 1.2 系统的输入-输出映射描述

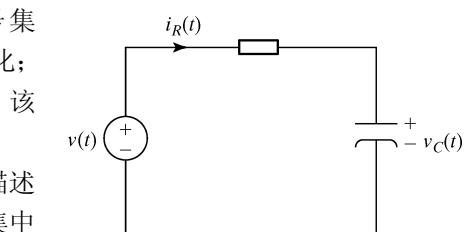


图 1.1 电阻-电容电路

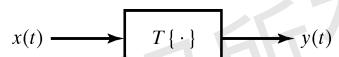


图 1.3 系统的输入-输出映射替代描述

## 系统性质

就指定为映射的系统而言，本书采用了以下六种性质定义，并假设读者对这些性质都很熟悉。尽管对这些性质的说明都是以离散时间信号为例的，但很容易根据连续时间信号的情况对之做出修改。为了标记方便，本书还假设：在以下定义的数学描述中，系统为单输入、单输出系统。

- **无记忆性：**任意时刻的输出信号值都不依赖于任意其他时刻的输入信号值。等式(1.2)中描述的时延为  $t_0$  的连续时间系统不是无记忆的。无记忆离散时间系统的一个简单例子为

$$y[n] = x^2[n] \quad (1.3)$$

对所有  $n$  均成立。

- **线性：**对多个输入信号的任意线性组合（或“叠加”）的响应始终等价于对这些信号的逐一响应的相同线性组合。
- **时不变性：**对经过任意时间平移变换后的输入信号集的响应始终等价于对原始输入信号集的响应的时间平移变换，且时间平移变换量相同。
- **线性与时不变性(LTI)：**系统是线性的和时不变的。
- **因果性：**任意时刻的输出信号都不依赖于该时刻之后的输入信号：即对所有  $n_0$ ，当  $n > n_0$  时， $y[n_0]$  不依赖于  $x[n]$ 。换言之，如果  $\hat{x}[n]$  和  $\hat{y}[n]$  表示系统的另一个输入输出信号对，且对  $n \leq n_0$ ，有  $\hat{x}[n] = x[n]$ ，其中  $n_0$  固定不变但为任意值，那么对  $n \leq n_0$ ，必有  $\hat{y}[n] = y[n]$  成立。
- **有界输入信号与有界输出信号(BIBO)的稳定性：**对有界输入信号的输出响应总是有界的。即对所有  $n$ ，有  $|x[n]| \leq M_x < +\infty$ ，这表明，对所有  $n$ ，有  $|y[n]| \leq M_y < +\infty$ 。

### 例 1.1 系统性质

为了说明上述系统性质，考虑对所有  $n$ ，其输入信号  $x[n]$  与输出信号  $y[n]$  之间的关系满足以下系统：

$$y[n] = x[4n+1] \quad (1.4)$$

下面将逐一判断该系统的无记忆性、线性、时不变性、因果性和 BIBO 稳定性。

**无记忆性：**举个反例就足以说明该系统不具有无记忆性。例如，考虑  $n=0$  时的  $y[n]$ 。由式(1.4)可知  $y[0]=x[1]$ ，故  $y[0]$  不依赖于时刻  $n=0$  的输入信号值。所以，该系统不具有无记忆性。

**线性：**为了确定该系统是否是线性的，考虑任意两个输入信号  $x_A[n]$  和  $x_B[n]$ ，并对这两个输入信号的线性组合的输出与这两个输入信号各自输出的线性组合进行比较。由式(1.4)可知，对  $x_A[n]$  的响应  $y_A[n]$  和对  $x_B[n]$  的响应  $y_B[n]$  分别为(对所有  $n$ )：

$$y_A[n] = x_A[4n+1] \quad (1.5)$$

$$y_B[n] = x_B[4n+1] \quad (1.6)$$

对任意的  $a$  和  $b$ ，如果当输入信号为  $x_C[n] = ax_A[n] + bx_B[n]$  时，对应的输出信号为  $y_C[n] = ay_A[n] + by_B[n]$ ，则该系统是线性的。对  $x_C[n]$  应用式(1.4)可证明该结论成立。

**时不变性：**为了确定该系统是否具有时不变性，需将对应于  $x[n]$  的时移的输出信号与对应于  $x[n]$  的输出信号的时移进行比较。任意特定输入信号  $x[n]$  产生的输出信号  $y[n]$  可由式(1.4)给出。假设将信号  $x[n]$  时移  $n_0$  得到的输入信号为  $\hat{x}[n]$ ，由  $\hat{x}[n]$  产生的输出信号为  $\hat{y}[n]$ 。因此

$$\hat{y}[n] = \hat{x}[4n+1] = x[4n+1+n_0] \quad (1.7)$$

如果该系统是时不变的，则  $\hat{y}[n]$  对应于将式(1.4)中的  $y[n]$  时移  $n_0$ ，故可将式(1.4)中的  $n$  替换为  $(n+n_0)$ ，因此

$$y[n+n_0] = x[4n+4n_0+1] \quad (1.8)$$

因为式(1.7)和式(1.8)右侧不相等，所以该系统不具有时不变性。以某个特定的输入信号为例，假设  $x[n]$  为单位冲激信号  $\delta[n]$ ，该信号的值为 1( $n=0$ )和 0( $n$  为其他值)。根据式(1.4)，该系统的输出信号  $y[n]$  将为  $\delta[4n+1]$ ，该式对所有  $n$  值均为零，且  $y[n+n_0]$  也同样始终为零。不过，如果考虑  $x[n+n_0] = \delta[n+n_0]$ ，则输出信号为  $\delta[4n+1+n_0]$ ，当  $n_0=3$  时，该输出信号值在  $n=-1$  时为 1，在  $n$  等于其他值时为零。

**因果性：**因为  $n=0$  时刻的输出信号值是  $n=1$  时刻的输入信号值，故该系统不具有因果性。

**BIBO 稳定性：**因为  $|y[n]| = |x[4n+1]|$ ，且  $|x[n]|$  的边界也形成了  $|x[4n+1]|$  的边界，故该系统具有 BIBO 稳定性。 ■

## 1.2 线性时不变系统

在许多情况下，线性时不变(LTI)系统构成了工程设计的基础。这类系统的优点是拥有丰富和完善的分析与设计理论。此外，在许多非线性系统中，一些由标称稳定运行产生的微小偏差可近似地由线性时不变模型控制，因此，线性时不变系统的分析和设计工具可以根据标称运行条件逐步应用。

### 1.2.1 线性时不变系统的冲激响应表示

经常使用输入信号与系统冲激响应的卷积来表示从输入信号到输出信号的线性时不变映射。在连续时间(CT)信号中，这种关系为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau \quad (1.9)$$

其中  $x(t)$  是输入信号， $y(t)$  是输出信号， $h(t)$  是该系统的单位冲激响应。在离散时间(DT)信号中，

对应的关系为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (1.10)$$

其中  $h[n]$  是该系统的单位抽样(或单位“冲激”)响应。

通常情况下, 可将式(1.9)中的卷积积分及式(1.10)中的卷积和简化为

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (1.11)$$

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (1.12)$$

尽管这些简化表示可能很方便, 但如果没有彻底理解它们的话, 就很容易产生误解。其他替代表示, 如

$$y(t) = (x * h)(t) \quad (1.13)$$

也有其优缺点。在正确理解式(1.9)和式(1.10)的基础上, 本书使用式(1.11)和式(1.12)来简化表示式(1.9)和式(1.10)。

线性时不变系统的卷积描述是通过将输入信号表示为多个加权冲激信号叠加来获得的。在离散时间(DT)信号的情况下, 假设给定其冲激响应为  $h[n]$  的某个线性时不变映射, 也就是说, 当该映射的输入信号为单位抽样或单位“冲激”函数  $\delta[n]$  时, 其输出信号为  $h[n]$ 。一般地, 输入信号  $x[n]$  可表示为经过缩放且有时移的冲激信号之和, 特别地,

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (1.14)$$

因为线性和时不变性, 对该输入信号的响应  $y[n]$  可表示为经过类似缩放和时移的冲激响应之和, 故可由式(1.10)给出。可利用线性和时不变性来做的事情是, 把对一般输入信号的响应表示为对特定输入信号的响应。类似的推导对连续时间(CT)信号同样成立。

前面的推导似乎表明, 从输入信号到输出信号的所有线性时不变映射均可以卷积和的形式来表示。不过, 使用类似式(1.9)、式(1.10)和式(1.14)中的无穷积分或无穷实际上包含了与相应映射有关的一些假设。本书在这里并不打算详细阐述这些假设。虽然要找到线性时不变映射的“病态”例子并不难, 但这对本书或者大多数工程设计模型来说意义都不大, 因为这些例子并不满足这些假设, 故卷积关系并不成立。

根据式(1.9)和式(1.10), 使线性时不变系统具有 BIBO 稳定性的充要条件是冲激响应绝对可积(连续时间信号)或绝对可和(离散时间信号)。

$$\text{BIBO稳定(CT)} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \quad (1.15)$$

$$\text{BIBO稳定(DT)} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (1.16)$$

类似地, 根据式(1.9)和式(1.10), 使线性时不变系统具有因果性的充要条件是: 在  $t < 0$  (连续时间信号)或  $n < 0$  (离散时间信号)时, 冲激响应的值为零。

## 1.2.2 线性时不变系统的特征函数与变换表示

线性时不变映射的特征函数是指数函数, 即当输入信号在所有时刻均为指数函数信号时(称为“永恒”指数函数信号), 输出信号是对输入信号的缩放。因此, 计算对永恒指数函数信号的响应

就简化为了简单地乘以适当的缩放因子。特别地，对连续时间信号，假设

$$x(t) = e^{s_0 t} \quad (1.17)$$

对某个可能的复值  $s_0$  (称为“复频率”) 成立。于是，由式(1.9)可得

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau \\ &= H(s_0)e^{s_0 t} \end{aligned} \quad (1.18)$$

其中，

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad (1.19)$$

假设上述积分在  $s = s_0$  时具有有限值(否则对该指数函数信号的响应就不满足严格的定义)。式(1.18)表明，形如式(1.17)的  $x(t)$  是一个相关指数值由  $H(s_0)$  给定的指数函数信号。注意，式(1.19)正好是冲激响应的双边拉普拉斯变换或者该系统的传输函数，并且  $s$  在上述积分取有限值的复平面上的值集构成了该变换的收敛域(ROC)。本书 1.4 节将对拉普拉斯变换做进一步的讨论。

“线性时不变系统的特征函数是永恒指数函数”这一事实直接来源于“时移某个永恒指数函数信号所产生的结果与以某个常数因子缩放该永恒指数函数信号所产生的结果相同”这一事实。相比之下，单边指数函数  $e^{s_0 t}u(t)$  [其中  $u(t)$  表示单位阶跃函数]通常不是线性时不变映射的特征函数。如例 1.2 所示，时移某个单边指数函数信号并不会产生与缩放该指数函数信号相同的结果。

### 例 1.2 线性时不变系统的特征函数

如上所述，永恒复指数函数  $e^{j\omega t}$  是任意线性时不变系统的特征函数[而  $e^{j\omega t}u(t)$  不是]，对线性时不变系统来说，式(1.19)中的积分在  $s = j\omega$  处收敛。考虑一个简单的时延例子：

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (1.20)$$

输入信号  $e^{j\omega t}u(t)$  产生的输出信号为

$$e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}u(t - t_0) \quad (1.20a)$$

这并不是对输入信号的简单缩放，因此  $e^{j\omega t}u(t)$  通常不是线性时不变系统的特征函数。 ■

当  $x(t) = e^{j\omega t}$  时，对应于在式(1.17)中取  $s_0$  为纯虚部值  $j\omega$ ，对所有正向和负向时刻，输入信号都是有界的，且相应的输出信号都具有如下形式：

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \quad (1.21)$$

如果式(1.19)中的  $H(s)$  在  $s = j\omega$  处收敛。这里  $\omega$  是输入信号的频率(实数值)。根据式(1.19)， $H(j\omega)$  可由

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \quad (1.22)$$

给出。式(1.22)中的函数  $H(j\omega)$  为系统频率响应，同时也是冲激响应的连续时间傅里叶变换(CTFT)。若  $h(t)$  绝对可积，或换言之，若

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty \quad (1.23)$$

则对每个  $\omega$ ，定义 CTFT 的积分都取有限值(可证明该值为  $\omega$  的连续函数)。该条件确保了  $s = j\omega$  落

在  $H(s)$  的收敛域内。比较式(1.23)和式(1.15)可知, 该条件与“系统具有 BIBO 稳定性”是等价的。此外, 也可为非绝对可积的某些类型信号定义 CTFT, 就  $h(t)=(\sin t)/t$  而言, 其 CTFT 是频域中的某个矩形区域, 1.3 节将讨论该 CTFT 的存在条件。

了解对  $e^{j\omega t}$  的响应有助于确定对形如下式的一般(实)正弦输入信号的响应:

$$x(t)=A \cos(\omega t + \theta) = \frac{A}{2}[e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}] \quad (1.24)$$

通过调用叠加和一些代数简化可以证明, 对应的输出信号为

$$y(t)=|H(j\omega)|A \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega)) \quad (1.25)$$

因此, 尽管输出信号在相同频率下同样为正弦波, 但其幅度按输入频率下的频率响应幅度进行了缩放, 且相位按输入频率下的频率响应角进行了移相。

类似地, 可考察离散时间信号的特征函数性质。离散时间永恒指数函数信号是一个等比序列或形如下式的信号:

$$x[n]=z_0^n \quad (1.26)$$

$z_0$  为某个可能的复值(“复频率”)。用该离散时间指数函数信号作为输入时, 通过与上述连续时间信号计算类似的简单计算, 可获得某个卷积映射的输出信号。特别地,

$$y[n]=h[n]*x[n]=H(z_0)z_0^n \quad (1.27)$$

其中,

$$H(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \quad (1.28)$$

假设当  $z=z_0$  时, 上述和取有限值。注意, 该和恰好为冲激响应的双边  $z$  变换,  $z$  在复平面上的值集(使该和取有限值)构成了该  $z$  变换的收敛域。如连续时间信号中的情况一样, 单边指数函数  $z_0^n u[n]$  一般并不是特征函数。1.4 节将对  $z$  变换做进一步的讨论。

同样, 一种重要的情况是, 当  $x[n]=(e^{j\Omega})^n=e^{j\Omega n}$  时,  $e^{j\Omega}$  对应于式(1.26)中的  $z_0$ ,  $z_0$  具有单位大小并取值  $e^{j\Omega}$ (其中  $\Omega$  为实频), 表示  $z$  平面上单位圆的角位移[以弧度(rad)为单位]。对所有正向和负向时刻来说, 这样一个  $x[n]$  都是有界的。尽管为了区分连续时间信号中的频率  $\omega$ , 这里使用了一个不同的符号  $\Omega$  来表示离散时间信号中的频率, 但为了标记方便, 文献中常常使用  $\omega$  来表示连续时间信号和离散时间信号中的频率。对应的输出信号为

$$y[n]=H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} \quad (1.29)$$

假设  $e^{j\Omega}$  落在  $H(z)$  的收敛域内。根据式(1.28),  $H(e^{j\Omega})$  可由下式给出

$$H(e^{j\Omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \quad (1.30)$$

式(1.30)中的函数  $H(e^{j\Omega})$  既是离散时间信号系统的频率响应, 又是冲激响应的离散时间傅里叶变换(DTFT)。若  $h[n]$  绝对可和(换言之, 若下式成立), 则定义 DTFT 的和取有限值(并可证明该值为  $\Omega$  的某个连续函数),

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (1.31)$$

该条件确保了  $e^{j\Omega}$  落在  $H(z)$  的收敛域内。与连续时间信号类似, 该条件等价于系统具有 BIBO 稳

定性。与 CTFT 一样, DTFT 也可针对并不绝对可和的信号来定义, 1.3 节将对此做进一步的解释。利用式(1.30), 同时开发连续时间信号, 可得正弦输入信号

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \theta) \quad (1.32)$$

的响应为

$$y[n] = |H(e^{j\Omega})| A \cos(\Omega n + \theta + \angle H(e^{j\Omega})) \quad (1.33)$$

注意, 根据式(1.30), 离散时间信号系统的频率响应总是周期性的(周期为  $2\pi$ )。“低频”响应可在  $\Omega = 0$  的邻域内找到, 这对应于任意时刻  $n$  的输入信号均为常量的情况。“高频”响应可在  $\Omega = \pm\pi$  的邻域内找到, 这对应于输入信号为  $e^{\pm j\pi n} = (-1)^n$  (可能是变化最快的离散时间信号) 时的情况。

如果线性时不变系统的输入信号可以表示为若干特征函数的线性组合, 例如(连续时间信号情况)

$$x(t) = \sum_{\ell} a_{\ell} e^{j\omega_{\ell} t} \quad (1.34)$$

那么, 由线性可知, 输出信号是对各指数函数信号响应的相同线性组合。根据线性时不变系统中的指数函数信号的特征函数性质, 对各指数函数信号的响应仅涉及按该指数函数信号的频率对系统的频率响应进行缩放。因此

$$y(t) = \sum_{\ell} a_{\ell} H(j\omega_{\ell}) e^{j\omega_{\ell} t} \quad (1.35)$$

对离散时间信号, 可写出类似的表达式。

### 1.2.3 傅里叶变换

可运用傅里叶变换将一大类输入信号表示为一组有界指数函数信号的线性组合。连续时间傅里叶变换(CTFT)的综合与解析对为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{综合}) \quad (1.36)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{解析}) \quad (1.37)$$

注意, 尽管式(1.36)将  $x(t)$  表示为指数函数信号的线性组合, 但该加权组合包含的是连续的(而不是有限个或可数个)指数函数信号。如果该信号  $x(t)$  是频率响应为  $H(j\omega)$  的某个线性时不变系统的输入信号, 那么, 根据指数函数信号的线性和特征函数性质, 输出信号为对各指数函数信号的响应的相同加权组合, 即

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.38)$$

如果将该方程视为某个 CTFT 综合方程, 则  $y(t)$  的 CTFT 为

$$Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega) \quad (1.39)$$

因此, 式(1.9)在时域中的卷积关系变为了变换域中的乘法关系。于是, 要确定任意特定频率  $\omega_0$  下的  $Y(j\omega)$ , 只需知道该单一频率下的输入信号的傅里叶变换以及系统在该频率下的频率响应。这一事实在一定程度上解释了为什么频域在线性时不变系统的分析中几乎是不可或缺的。

相应的 DTFT 综合与解析对定义如下:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{(-2\pi)} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (\text{综合}) \quad (1.40)$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \quad (\text{解析}) \quad (1.41)$$

其中，综合公式积分中的  $\langle 2\pi \rangle$  表示在任意长度为  $2\pi$  的连续区间积分。这是因为 DTFT 在  $\Omega$  上总是周期性的且周期为  $2\pi$ ，从该事实可得出一个简单结论： $e^{j\Omega}$  是周期性的且周期为  $2\pi$ 。注意，式(1.40)将  $x[n]$  表示为对指数函数信号连续体的加权组合。

与连续时间信号一样，可直接证明：如果  $x[n]$  是某个线性时不变映射的输入信号，则输出信号  $y[n]$  具有 DTFT

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega}) X(e^{j\Omega}) \quad (1.42)$$

## 1.3 确定性信号及其傅里叶变换

本节对确定性离散时间信号的 DTFT 做了更详细的回顾，同时强调了可确保拥有定义明确的 DTFT 的信号类型。本节还将对具有 DTFT 的信号的能量密度谱进行讨论，并将阐述早期“信号与系统”课程可能没有强调但与 DTFT 有关的内容。另外，本节还将针对 CTFT 展开类似讨论。

### 1.3.1 信号类别及其傅里叶变换

式(1.40)和式(1.41)中的 DTFT 综合及解析方程至少对下述三大类离散时间信号成立。

#### 有限行为信号

有限行为信号(又称绝对可和信号或  $\ell^1$  信号)是由以下条件定义的：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]| < +\infty \quad (1.43)$$

上式左边的和常称为“信号行为”。对这些信号来说，定义了 DTFT 的无限和满足要求，且可证明该 DTFT 为连续函数(对所有  $\Omega$ )。特别地，在  $\Omega = +\pi$  和  $\Omega = -\pi$  时的函数值均有明确定义且相等。当信号不为  $\ell^1$  时，则无须满足以上情况<sup>①</sup>。

#### 有限能量信号

有限能量信号(又称为平方可和信号或  $\ell^2$  信号)是由以下条件定义的：

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 < +\infty \quad (1.44)$$

上式左边的和常称为“信号能量”。

在离散时间信号中，绝对可和(如  $\ell^1$ )信号总是平方可和的(如  $\ell^2$ )。然而，反之却并不成立。例如，考虑  $0 < \Omega_c < \pi$  时的信号  $(\sin \Omega_c n)/\pi n$  (在  $n=0$  时取值  $\Omega_c/\pi$ ) 或者考虑信号  $(1/n)u[n-1]$ ，两者均为  $\ell^2$  信号，但不是  $\ell^1$  信号。如果  $x[n]$  表示这样一个信号：其 DTFT 是以下量在  $N \rightarrow +\infty$  时的极限

$$X_N(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-N}^N x[k] e^{-j\Omega k} \quad (1.45)$$

<sup>①</sup> DT 时用小写“ $\ell$ ”，CT 时用大写“ $L$ ”。——译者注

并且所得到的极限往往在  $\Omega$  取某些值时不连续。例如当  $\Omega = \pm \Omega_c$  时,  $(\sin \Omega_c n)/\pi n$  的变换不连续。

### 缓慢增长信号

缓慢增长信号是指其幅度增长不快于时间指数多项式的信号, 例如对所有  $n$ ,  $x[n] = n$ 。在这种情况下, 尽管式(1.45)中的  $X_N(e^{j\Omega})$  一般并不收敛, 但其 DTFT 作为广义(或奇异)函数仍然存在, 例如, 若对所有  $n$ , 均有  $x[n] = 1$ , 则对  $|\Omega| \leq \pi$ , 有  $X(e^{j\Omega}) = 2\pi\delta(\Omega)$ 。

在这类缓慢增长信号中, 人们最感兴趣的是由下式定义的有界(或  $L^{\infty}$ )信号:

$$|x[k]| \leq M < +\infty \quad (1.46)$$

即其幅度在所有时刻均有一个固定且有限的边界的信号。例如, 形如  $e^{j\Omega_0 n}$  的有界永恒指数函数在傅里叶变换理论中发挥了关键作用。尽管此类信号无须具有有限能量, 但会在任意时间间隔内都具有有限的平均能耗, 其中“平均能耗”是由所有时刻的总能量确定的。

可针对连续时间信号定义类似的信号类别。有限行为(或  $L^1$ )信号包含了那些绝对可积信号, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \quad (1.47)$$

有限能量(或  $L^2$ )信号包含那些平方可积信号, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty \quad (1.48)$$

在连续时间信号中, 绝对可积信号(如  $L^1$ )可能并不是平方可积信号(如  $L^2$ ), 如

$$x(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t}, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.49)$$

不过, 有界  $L^1$  信号也会是  $L^2$  信号。与离散时间信号一样, 属于  $L^2$  信号的连续时间信号并不一定是  $L^1$  信号, 如

$$x(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (1.50)$$

“信号和系统”类的相关基础教材都推导并以列表形式给出了连续时间信号和离散时间信号中的大量有用傅里叶变换对及相应的傅里叶变换性质, 为了方便起见, 本书在此列出了一个 DTFT 变换对简表(见表 1.1)和一个 CTFT 变换对简表(见表 1.2)。应用不同的傅里叶变换性质可很容易由这些 DTFT 变换对和 CTFT 变换对推导出其他变换对。注意, 表 1.1 中左边一列中的  $\delta[\cdot]$  表示单位采样函数, 而右边一列中的  $\delta(\cdot)$  是单位冲激函数。另外, 表 1.1 中的 DTFT 变换对在  $-\pi < \Omega \leq \pi$  外周期性地重复。

表 1.1 DTFT 变换对简表

DT 信号 $\longleftrightarrow$ DTFT, $-\pi < \Omega \leq \pi$	
$\delta[n]$	$\longleftrightarrow 1$
$\delta[n - n_0]$	$\longleftrightarrow e^{-j\Omega_0 n_0}$
1 (所有 $n$ )	$\longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 n}$ ( $-\pi < \Omega_0 \leq \pi$ )	$\longleftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)$
$a^n u[n],  a  < 1$	$\longleftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$u[n]$	$\longleftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi\delta(\Omega)$
$\frac{\sin \Omega_c n}{\pi n}$	$\longleftrightarrow \begin{cases} 1, & -\Omega_c < \Omega < \Omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
$1, \quad -M \leq n \leq M \\ 0, \quad \text{其他}$	$\left\{ \begin{array}{l} \longleftrightarrow \frac{\sin[\Omega(2M+1)/2]}{\sin(\Omega/2)} \end{array} \right.$

表 1.2 CTFT 变换对简表

CT 信号 $\longleftrightarrow$ CTFT	
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow 1$
$\delta(t - t_0)$	$\longleftrightarrow e^{-j\omega_0 t_0}$
1 (所有 $t$ )	$\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$e^{-at} u(t), \Re\{a\} > 0$	$\longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$
$u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$	$\longleftrightarrow \begin{cases} 1, & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
$1, \quad -M \leq t \leq M \\ 0, \quad \text{其他}$	$\left\{ \begin{array}{l} \longleftrightarrow \frac{\sin \omega M}{\omega/2} \end{array} \right.$

一般地，流畅地推导和利用这些主要的傅里叶变换对及性质不仅十分重要，而且非常有用。接下来的一小节将讨论 Parseval 恒等式，该恒等式描述了一种傅里叶变换性质，而这种性质对于本书的后续讨论非常重要。

当然，应用中出现的其他类型信号（如增长型单边指数函数信号）也令人感兴趣。为了处理此类信号，需在离散时间信号中利用  $z$  变换，在连续时间信号中利用拉普拉斯变换。

### 1.3.2 Parseval 恒等式、能量谱密度及确定性自相关

对  $\ell^2$  信号而言，帕塞瓦尔（Parseval）恒等式是傅里叶变换的一个重要性质。对离散时间信号，该恒等式具有以下一般形式：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{+2\pi} X(e^{j\Omega})Y^*(e^{j\Omega})d\Omega \quad (1.51)$$

对连续时间信号，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)Y^*(j\omega)d\omega \quad (1.52)$$

其中，上标\*表示复共轭。特别地，对  $y[n] = x[n]$  或  $y(t) = x(t)$ ，可得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{+2\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \quad (1.53)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (1.54)$$

利用 Parseval 恒等式，可通过对其变换幅度的平方积分来估计信号的能量。实际上，由该恒等式可知，一个信号的能量等于其变换的能量（按  $1/2\pi$  缩放）。

式(1.53)和式(1.54)的右边分别对量  $|X(e^{j\Omega})|^2$  和  $|X(j\omega)|^2$  进行了积分。可将这些量表示为  $\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega})$  和  $\bar{S}_{xx}(j\omega)$ ：

$$\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 \quad (1.55)$$

$$\bar{S}_{xx}(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \quad (1.56)$$

上述量被称为相关信号的能量谱密度（ESD），因为这些量描述了信号能量在频率上的分布。为了更具体地说明这一解释，对离散时间信号，考虑将  $x[n]$  作为具有频率响应  $H(e^{j\Omega})$  的理想带通滤波器的输入信号，该滤波器的频率响应具有单位增益窄通带且带宽为  $\Delta$ 、中心频率为  $\pm\Omega_0$ ，如图 1.4 所示。那么，输出信号的能量必定是包含在该滤波器通带内的  $x[n]$  的能量。要计算输出信号的能量，注意该输出信号  $y[n]$  具有如下变换：

$$Y(e^{j\Omega}) = H(e^{j\Omega})X(e^{j\Omega}) \quad (1.57)$$

因此，根据 Parseval 恒等式，输出能量为

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{+2\pi} |Y(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{+2\pi} |H(e^{j\Omega})|^2 |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (1.58)$$

因为  $|H(e^{j\Omega})|$  在通带内的值为 1，在其他位置为零，故可将式(1.58)简化为

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{通带}} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{通带}} \bar{S}_{xx}(e^{j\Omega}) d\Omega\end{aligned}\quad (1.59)$$

因此， $x[n]$ 在任意频带内的能量可由 $\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega})$ 在该频带上的积分给出（按 $1/2\pi$ 缩放）。换言之，作为 $\Omega$ 的函数， $x[n]$ 的能量密度为每弧度 $\bar{S}_{xx}(\Omega)/(2\pi)$ 。同样，可针对连续时间信号进行完全类似的讨论。

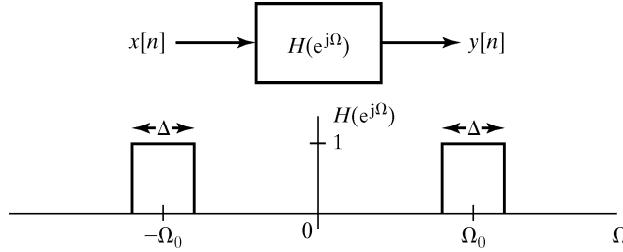


图 1.4 理想带通滤波器

因为 ESD  $\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega})$  是  $\Omega$  的一个实函数，故将其写为  $\mathcal{E}_{xx}(\Omega)$ 。不过，为了突出其为  $X(e^{j\Omega})$  的幅度的平方以及“离散时间信号的 ESD 是周期性的且周期为  $2\pi$ ”这一事实，使用标记  $\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega})$ 。

ESD 在时域上还有一种重要解释。例如，在离散时间信号中，

$$\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 = X(e^{j\Omega})X(e^{-j\Omega}) \quad (1.60)$$

注意， $X(e^{-j\Omega})$  是时间反演信号  $\bar{x}[k] = x[-k]$  的变换。因此，由于频域中的变换相乘对应于时域中的信号卷积，故可得

$$\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2 \Leftrightarrow x[k] * \bar{x}[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+k]\bar{x}[n] = \bar{R}_{xx}[k] \quad (1.61)$$

函数  $\bar{R}_{xx}[k]$  是信号  $x[n]$  的确定性自相关函数，这里确立了确定性自相关函数的变换就是能量谱密度  $\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega})$ 。由基本的傅里叶变换性质可知， $\bar{R}_{xx}[0]$ （如信号能量  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$ ）是  $\bar{R}_{xx}[k]$  的傅里叶变换下的面积（按  $1/2\pi$  缩放），即在  $\bar{S}_{xx}(e^{j\Omega}) = |X(e^{j\Omega})|^2$  下的缩放面积。当然，这直接对应于式(1.53)。

确定性自相关函数用总平方误差衡量信号与其时移版本之间的相似程度。更具体地说，离散时间信号与其时移版本之间的总平方误差由下式给出：

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n+k] - x[n])^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n+k] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] - 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n+k]x[n] \\ &= 2(\bar{R}_{xx}[0] - \bar{R}_{xx}[k])\end{aligned}\quad (1.62)$$

由于总平方误差总是非负的，故  $\bar{R}_{xx}[k] \leq \bar{R}_{xx}[0]$ ，且确定性自相关函数  $\bar{R}_{xx}[k]$  越大，信号  $x[n]$  与其时移版本  $x[n+k]$  之间就越接近。

相应的结论对连续时间信号也同样成立，特别地，

$$\bar{S}_{xx}(j\omega) = |X(j\omega)|^2 \Leftrightarrow x(\tau) * \bar{x}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(t) dt = \bar{R}_{xx}(\tau) \quad (1.63)$$

其中  $\bar{R}_{xx}(t)$  是  $x(t)$  的确定性自相关函数。

## 1.4 双边拉普拉斯变换与双边 $z$ 变换

可将拉普拉斯变换和 $z$ 变换视为对傅里叶变换的扩展，这两个变换在很多情况下都非常有用，并且能够对某些类别的信号（对这些信号而言，傅里叶变换不收敛）进行变换处理。另外，通过引入复平面（能在其中应用复函数理论），这两个变换还能增强人们对傅里叶变换的理解。1.4.1节详细回顾了双边 $z$ 变换。与1.4.1节中的讨论类似，1.4.2节简要回顾了双边拉普拉斯变换。

### 1.4.1 双边 $z$ 变换

可将双边 $z$ 变换定义为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (1.64)$$

这里的 $z$ 为复变量，也可用极坐标形式来表示该变量

$$z = r e^{j\Omega}, \quad r \geq 0, \quad -\pi < \Omega \leq \pi \quad (1.65)$$

因此

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] r^{-n} e^{-j\Omega n} \quad (1.66)$$

DTFT对应于设置 $r=1$ ，在这种情况下， $z$ 在单位圆上取值。然而，在很多有用的信号中，即使将 $z$ 限制在单位圆上，该无限和也并不收敛（甚至从广义函数的角度来看也是如此）。 $z$ 变换定义中的 $z^{-n}$ 项将因子 $r^{-n}$ 引入了该无限和，这样就使得该和对很多有趣但不具有DTFT的信号收敛（只要对 $r$ 做相应限制）。

更具体地来讲，注意，由式(1.66)可知， $X(z)$ 是 $x[n]r^{-n}$ 的DTFT。如果 $r>1$ ，那么对正数 $n$ ， $r^{-n}$ 呈几何级数衰减，而对负数 $n$ ， $r^{-n}$ 则呈几何级数增长。如果 $0<r<1$ ，那么结论刚好相反。因此，尽管对很多序列而言， $x[n]$ 并不是绝对可和的，但 $x[n]r^{-n}$ 对 $r$ 的某些取值范围来说却绝对可和。

例如，考虑 $x_1[n]=a^n u[n]$ 。如果 $|a|>1$ ，则该序列不具有DTFT。然而，对任意的 $a$ ，只要 $r>|a|$ ，则 $x[n]r^{-n}$ 绝对可和。特别地，例如

$$X_1(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \quad (1.67)$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| = r > |a| \quad (1.68)$$

再举一例，考虑 $x_2[n]=-a^n u[-n-1]$ 。如果 $|a|<1$ ，则该信号不具有DTFT。然而，只要 $r<|a|$ ，

$$X_2(z) = -a^{-1} z - a^{-2} z^2 - \dots \quad (1.69)$$

$$= \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z}, \quad |z| = r < |a| \quad (1.70)$$

$$= \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| = r < |a| \quad (1.71)$$

尽管将上述两个不同信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 的 $z$ 变换简化为了同一个有理式，但两者有不同的收敛域。因此，收敛域是该变换规范的关键部分。

如果  $x[n]$  是左侧与右侧离散时间指数函数信号之和，且具有形如上述例子中所描述的各项，则可将  $X(z)$  表示为  $z$  (或  $z^{-1}$ ) 的有理式：

$$X(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (1.72)$$

其中， $Q(z)$  和  $P(z)$  为  $z$  或  $z^{-1}$  的多项式。

有理  $z$  变换通常是通过  $z$  平面上的零-极点图来描述的，并相应地指出收敛域。除了常量幅度缩放，这些信息还唯一地确定了信号。注意，因为要求该变换在收敛域内是有限的，故收敛域可能不包含极点。 $z$  变换往往可表示为  $z^{-1}$  的多项式之比。然而， $z$  平面上的零-极点图表示  $z$  的多项式的根。另外需注意的是，如果将  $z = +\infty$  时的极点或零点计算进去，那么任意多项式之比总是具有完全相同的极点数和零点数。

### 收敛域

为了理解  $z$  变换的复函数性质，可将定义该变换的无限和划分成非负时刻和负向时刻两部分。非负时刻或单边  $z$  变换由下式定义：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad (1.73)$$

并且是  $z^{-1}$  的幂级数。有限和  $\sum_{n=0}^N x[n]z^{-n}$  在  $N \rightarrow +\infty$  时的收敛性取决于该幂级数的收敛半径  $R_1 \geq 0$ 。如果每一个  $z$  均满足  $|z| > R_1$ ，则该幂级数绝对收敛。在该收敛域内，所生成的  $z$  的函数是解析函数，即该函数在该域内的所有点均拥有定义严格的复变量  $z$  的导数，这是该函数的一个很好的性质。该级数在  $|z| < R_1$  时发散。而该无限和在圆  $|z| = R_1$  上的行为还需做进一步的考察且取决于某个特定级数，这个级数可能在该圆上的所有点、部分点收敛(但可能不是绝对收敛)，也可能没有收敛点。可将区域  $|z| > R_1$  视为该幂级数的非负时刻部分的收敛域。

现在考虑该幂级数的负向时刻部分：

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} = \sum_{m=1}^{+\infty} x[-m]z^m \quad (1.74)$$

这是一个收敛半径为  $R_2$  的  $z$  的幂级数。在  $|z| < R_2$  内，该幂级数绝对收敛且为解析函数。当  $|z| > R_2$  时，该幂级数发散。该幂级数在圆  $|z| = R_2$  上的行为还需进一步的考察且取决于某个特定的级数，这个级数可能在该圆上的所有点、部分点收敛(但可能并不绝对收敛)，也可能没有收敛点。如果  $R_1 < R_2$ ，那么  $x[n]$  的  $z$  变换在  $R_1 < |z| < R_2$  上绝对收敛，这个环形区域就是该变换的收敛域。该变换在这个环形区域上是解析的。定义该变换的级数在区域  $|z| < R_1$  和  $|z| > R_2$  上发散。如果  $R_1 > R_2$ ，那么该  $z$  变换不存在，例如  $x[n] = 0.5^n u[-n-1] + 2^n u[n]$ 。如果  $R_1 = R_2$ ，那么从技术的角度来讲，尽管该变换可能存在，但因为它没有收敛域，所以作为一个  $z$  变换并没有什么意义。然而，如果  $R_1 = R_2 = 1$ ，则仍有可能能够计算并使用某个 DTFT。例如，对所有  $n$ ，如果  $x[n] = 3$  或  $x[n] = (\sin \Omega_0 N)/(\pi n)$ ，则可通过引入频域中的冲激函数和阶梯函数等广义函数来使用 DTFT。

### 将收敛域与信号性质关联

对诸如 BIBO 稳定系统的冲激响应等绝对可和序列(如  $\ell^1$  信号)而言，单位圆必定在收敛域内或者必定是收敛域的边界。反过来，如果收敛域包含了单位圆，则可认为该信号是  $\ell^1$  信号，因为变换在其收敛域内绝对收敛。如果单位圆构成了收敛域的边界，那么一般需要做进一步的

分析才能判断该信号是否为  $\ell^1$  信号。正如下面即将阐述的那样，有理变换在收敛域的边界上总有极点，因此，如果单位圆在有理变换收敛域的边界上，那么在单位圆上存在极点，且该信号不可能是  $\ell^1$  信号。

对右侧信号 ( $R_2 = +\infty$ )，收敛域延伸到了复平面上的任何地方(半径为  $R_1$  的圆以外)，直到(也可能是包含)  $+\infty$ 。如果信号值在负向时刻为零，则收敛域包含  $+\infty$ 。

如果该信号仅由单边指数函数(具有对有理变换进行逆变换时所获得的形式)信号的和构成，则可得出与上述结论相反的结论。在这种情况下，如果  $R_2 = +\infty$ ，则该信号必定是右侧信号，如果收敛域包含  $+\infty$ ，则该信号必定是因果的，即信号值在  $n < 0$  时为零。

对左侧信号 ( $R_1 = 0$ )，收敛域由半径为  $R_2$  的圆向内延伸至(并可能包含)零点。如果信号值在正向时刻均为零，则收敛域包含  $z = 0$ 。

如果该信号由单边指数函数信号的和构成，则可得出相反的结论：若  $R_1 = 0$ ，则该信号必定在左侧；如果收敛域包含  $z = 0$ ，则该信号必定是非因果的，即该信号的值在  $n > 0$  时为零。

如前所述，收敛域不可能包含  $z$  变换的极点，因为极点是使  $z$  变换的幅度取无穷大时的那些  $z$  值，而收敛域是由那些使  $z$  变换收敛的  $z$  值构成的。对具有有理变换的信号而言，可利用“此类信号是单边指数函数信号的和”这个事实来证明：收敛域的可能边界实际上正好是由极点位置确定的。特别地，在有理变换情况下：

(a) 收敛域的外边界圆包含极点且半径为  $+\infty$ 。如果外边界圆位于  $+\infty$  处，则正如所指出的那样，该信号为右侧信号且在事实上是因果的(如果该信号在  $+\infty$  处没有极点)。

(b) 收敛域的内边界圆包含极点且半径为零。如果内边界圆退化为零点，则如已指出的那样，该信号是左侧信号且在事实上是非因果的(如果该信号在零值处没有极点)。

### $z$ 逆变换

求有理  $z$  变换的逆的一种方法是使用部分分式展开，然后，要么直接获得该部分分式表达式中各项的逆变换，要么将该项展开成对特定收敛域中的  $z$  收敛的幂级数。例如，如果对收敛域中的  $z$ ，有  $|a| < |z|$ ，则可将形如下式的项

$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (1.75)$$

展开成  $az^{-1}$  的幂级数；而如果对收敛域中的  $z$ ，有  $|a| > |z|$ ，则可将上式展开成  $a^{-1}z$  的幂级数。通过对部分分式展开中的各项都执行相同的操作，可以发现信号  $x[n]$  是左侧和右侧指数函数信号之和。对非有理变换，如果不存在部分分式展开来简化该过程，则尝试将  $z$  逆变换展开成与所给定收敛域一致的幂级数仍是合理的。

尽管本书一般使用部分分式或幂级数方法来求  $z$  变换的逆，但存在一个与逆 DTFT 公式类似的显式公式，特别地

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(z) z^n d\Omega \Big|_{z=\bar{r}e^{j\Omega}} \quad (1.76)$$

其中，常量  $\bar{r}$  被选来使  $z$  位于收敛域内。尽管这并不是最一般的求逆公式，但已足够，并且表明  $x[n]$  可表示为离散时间指数函数信号的加权组合。

和傅里叶变换一样，与“信号和系统”有关的基础教材都推导并以列表形式给出了大量有用的  $z$  变换对及其性质。恰当地使用  $z$  变换对及其性质往往是获取许多其他信号的  $z$  变换或  $z$  逆变换的基础。

### 1.4.2 双边拉普拉斯变换

和 $z$ 变换一样，引入拉普拉斯变换的部分原因是为了处理不具有 CTFT 的信号类型，同时增强对 CTFT 的理解。对拉普拉斯变换的定义如下：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (1.77)$$

其中， $s$ 是复变量 $s = \sigma + j\omega$ 。因此，可将拉普拉斯变换视为 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的CTFT。如果选择合适的 $\sigma$ ，则式(1.77)中的积分甚至对那些不具有CTFT的信号都可能存在。

拉普拉斯变换的推导与上一节中 $z$ 变换的推导极为类似，不过，用 $e^\sigma$ 代替了在1.4.1节中发挥作用的 $r$ 。使所定义的积分收敛的 $s$ 值集内部（因为该积分的上下限趋近于 $\pm\infty$ ）构成了变换 $X(s)$ 的收敛域。该收敛域现在是由 $\sigma$ 的最小和最大允许值（分别为 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ ）确定的。 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 是收敛域的横坐标。在复平面上，对应的收敛域是 $\sigma_1$ 和 $\sigma_2$ 之间的垂直条带且 $\sigma_1 < \operatorname{Re}\{s\} < \sigma_2$ 。尽管式(1.77)在该收敛域内绝对收敛，但其在该条带左右垂直边界线上的收敛性需分别考察。此外，拉普拉斯变换在整个收敛域上都是解析的（即复函数是可微的）。该条带可向左延伸至 $\sigma_1 = -\infty$ ，向右延伸至 $\sigma_2 = +\infty$ 。如果该条带折叠成一条线（以至于该收敛域消失），则拉普拉斯变换就失去了意义，除非该线刚好是 $j\omega$ 轴，在这种情况下，CTFT解析或许可以恢复。

例如，一方面，考虑 $x_1(t) = e^{at}u(t)$ ，如果 $\operatorname{Re}\{s\} > a$ ，则式(1.77)中积分的计算结果为 $X_1(s) = 1/(s-a)$ 。另一方面，考虑 $x_2(t) = -e^{at}u(-t)$ ，如果 $\operatorname{Re}\{s\} < a$ ，则式(1.77)中积分的计算结果为 $X_2(s) = 1/(s-a)$ 。注意，与 $z$ 变换一样，上述拉普拉斯变换的表达式是相同的，显著的区别在于其收敛域不同。

收敛域可能与信号的性质有关。例如，对绝对可积信号（也称为 $L^1$ 信号）而言，因为拉普拉斯变换定义中的被积函数在 $j\omega$ 轴上是绝对可积的，故 $j\omega$ 轴在收敛域内或在该收敛域的边界上。换言之，如果 $j\omega$ 轴严格位于收敛域内，则该信号为 $L^1$ 信号，因为该积分在收敛域内绝对收敛。回顾一下，当且仅当系统具有BIBO稳定性时，该系统具有冲激响应，故这里的结论与稳定性讨论相关：如果 $j\omega$ 轴严格位于系统函数的收敛域内，则该系统是BIBO稳定的。

右侧信号的收敛域是某个右半平面（如所有 $s$ 均满足 $\operatorname{Re}\{s\} > \sigma_1$ ）。因此，因果系统的系统函数的收敛域为某个右半平面。左侧信号的收敛域是某个左半平面。对拥有有理变换的信号，收敛域不包含极点，但该收敛域的边界包含极点。因为传输函数的收敛域相对于虚轴的位置与BIBO稳定性有关，同时因为极点确定了该收敛域的边界，故极点与稳定性有关。特别地，当且仅当其所有极点均是有限的且都位于左半平面内时，具有右侧冲激响应的系统（如因果系统）将是稳定的，因为这正是使收敛域包含整个虚轴的条件。同样应注意，如果其本身为右侧信号，则具有有理变换且在无穷大处没有极点的信号是因果的。

值得回顾的另一个性质与“指数函数是线性时不变系统的特征函数”这个事实有关。如果用 $H(s)$ 来表示某个线性时不变系统的冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换，则只要 $s_0$ 位于传输函数的收敛域内，那么系统输入 $e^{s_0 t}$ 将产生的输出为 $H(s_0)e^{s_0 t}$ 。

## 1.5 连续时间信号的离散时间处理

包括通信、娱乐、导航和控制系统在内的许多现代应用系统都是连续时间和离散时间子系统的组合，充分利用了各系统的内在性质和优点。特别地，连续时间信号的离散时间处理在此类应用中十分常见，这里将描述这种处理背后的基本思想。与前面几节一样，这里的讨论主要是对所熟悉的

内容进行回顾，包括建立标记以方便本书后续章节参考。本节乃至本书通常将连续时间信号的 CTFT 与从连续时间信号采样中获取的离散时间信号的 DTFT 联系起来了。必要时，本书使用下标  $c$  和  $d$  来区分哪些信号是连续时间信号，哪些信号是离散时间信号。

### 1.5.1 对连续时间信号进行离散时间处理的基本结构

图 1.5 描述了这种处理的基本结构，该结构包括：获取连续时间输入信号采样序列的“连续时间-离散时间”(C/D)转换器；产生预期连续时间输出采样序列的离散时间滤波器；从采样序列中重建预期连续时间输入信号的“离散时间-连续时间”(D/C)转换器。通常会对这种处理做些限制，以使得图 1.5 中的整个系统相当于线性时不变连续时间系统。为此，必要的限制条件通常包括将离散时间滤波限制为通过具有频率响应  $H_d(e^{j\Omega})$  的系统进行线性时不变处理，同时要求对输入信号  $x_c(t)$  进行适当的带宽限制。为了满足后一个要求，通常会在图 1.5 中的结构之前使用一个滤波器来确保  $x_c(t)$  受到基本的带宽限制。虽然这种滤波器常被称为“抗混叠滤波器”，但如果离散时间系统去除了混叠分量，通常也允许 C/D 转换中存在一些混叠，这样，整个系统仍可为连续时间线性时不变系统。

图 1.5 中的理想 C/D 转换器的输出是一个具有指定采样间隔  $T_1$  的  $x_d[n]$  的采样序列，因此离散时间信号为  $x_d[n] = x_c(nT_1)$ 。所以，从概念上讲，理想的 C/D 转换器很简单。另外，一个实用的模-数(A/D)转换器也可将信号量化为一组有限输出电平中的一个。不过，本书不考虑量化的其他影响。

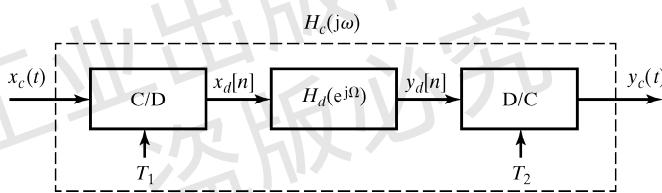


图 1.5 连续时间信号的离散时间处理

在频域中，可将  $x_c(t)$  的 CTFT 和  $x_d[n]$  的 DTFT 之间的关系表示为

$$X_d(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\omega T_1} = \frac{1}{T_1} \sum_k X_c\left(j\omega - jk \frac{2\pi}{T_1}\right) \quad (1.78)$$

如果  $x_c(t)$  受到足够的带宽限制，

$$X_c(j\omega) = 0, \quad |\omega| \geq \frac{\pi}{T_1} \quad (1.79)$$

也就是说，当以奈奎斯特采样率或高于奈奎斯特采样率的采样率采样时，可将式(1.78)改写为

$$X_d(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\omega T_1} = \frac{1}{T_1} X_c(j\omega), \quad |\omega| < \pi/T_1 \quad (1.80a)$$

即

$$X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_1} X_c\left(j\frac{\Omega}{T_1}\right), \quad |\Omega| < \pi \quad (1.80b)$$

注意， $X_d(e^{j\Omega})$  在  $|\Omega| < \pi$  以外周期性地扩展了。

图 1.5 中的理想 D/C 转换器由以下插值关系定义

$$y_c(t) = \sum_n y_d[n] \frac{\sin(\pi(t-nT_2)/T_2)}{\pi(t-nT_2)/T_2} \quad (1.81)$$

这表明,  $y_c(nT_2) = y_d[n]$ 。因为上述和中的每一项的带限均为  $|\omega| < \pi/T_2$ , 所以连续时间信号  $y_c(t)$  的带限也同样在该频率范围内, 故对该 D/C 转换器的更完整的称呼是带限插值转换器。根据式(1.79)的假设, 图 1.5 中的 C/D 转换器可类似地由“连续时间信号  $x_c(t)$  也是离散时间序列  $x_d[n]$  的理想带限插值”这一事实来描述。

因为  $y_c(t)$  带宽受限且  $y_c(nT_2) = y_d[n]$ , 故在  $y_d[n]$  的 DTFT 和  $y_c(t)$  的 CTFT 之间存在与式(1.80)类似的关系:

$$Y_d(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega T_2} = \frac{1}{T_2} Y_c(j\omega), \quad |\omega| < \pi/T_2 \quad (1.82a)$$

即

$$Y_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_2} Y_c\left(j\frac{\Omega}{T_2}\right), \quad |\Omega| < \pi \quad (1.82b)$$

图 1.6 展示了理想 D/C 转换器的一种概念性表示。该图将式(1.81)解释为以  $T_2$  为间隔(重构间隔)、以给定的冲激强度  $y_d[n]$  将冲激序列均匀间隔的结果, 然后用在通带  $|\omega| < \pi/T_2$  中具有增益  $T_2$  的理想低通滤波器  $L(j\omega)$  对结果进行滤波。该操作产生了带宽受限的连续时间信号  $y_c(t)$ , 而该信号在时刻  $t = nT_2$  插入了特定序列值  $y_d[n]$ , 即  $y_c(nT_2) = y_d[n]$ 。

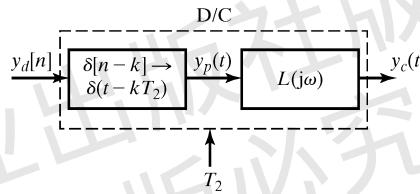


图 1.6 产生理想 D/C 转换的概念性表示, 并用重构时间间隔  $T_2$  对离散时间序列进行插值处理, 使之成为带宽受限的连续时间信号

## 1.5.2 离散时间滤波及整体连续时间响应

除非另有说明, 现在假设  $T_1 = T_2 = T$ 。在图 1.5 中, 如果式(1.79)的带限约束得到满足, 并且如果设定  $y_d[n] = x_d[n]$ , 那么  $y_c(t) = x_c(t)$ 。更一般地, 如果图 1.5 中的离散时间系统是一个具有频率响应  $H_d(e^{j\Omega})$  的线性时不变离散时间滤波器, 那么

$$y_d(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega}) X_d(e^{j\Omega}) \quad (1.83)$$

并且如果  $x_c(t)$  的任意混叠分量都可用  $H_d(e^{j\Omega})$  消除, 则联立式(1.80)、式(1.82)及式(1.83)可得

$$Y_c(j\omega) = H_d(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega T} X_c(j\omega), \quad |\omega| < \pi/T \quad (1.84)$$

因此, 整个系统的行为等价于具有以下频率响应的连续时间滤波器的行为

$$H_c(j\omega) = H_d(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega T}, \quad |\omega| < \pi/T \quad (1.85)$$

换言之, 在存在上述带限和采样率约束的情况下, 整个系统表现为一个线性时不变连续时间滤波器, 且该滤波器的响应与通过简单的频率缩放嵌入的离散时间滤波器的响应有关。如果该离散时间滤波器消除了任意混叠分量, 那么采样率可以低于奈奎斯特采样率。

如果希望利用图 1.5 中的系统来实现一个具有频率响应  $H_c(j\omega)$  的连续时间线性时不变滤波器, 则根据式(1.85), 只要  $x_c(t)$  的带宽受到了适当的限制, 则选择  $H_d(e^{j\Omega})$ 。如果定义: 对  $|\omega| \geq \pi/T$ ,

有  $H_c(j\omega)=0$ ，则式(1.85)也对应于离散时间冲激响应和连续时间冲激响应之间的以下关系：

$$h_d[n] = Th_c(nT) \quad (1.86)$$

因此，该离散时间滤波器是对该连续时间滤波器的采样。如果为了避免  $y_d[n]$  中的混叠分量，没有对  $x_c(t)$  和  $H_d(e^{j\Omega})$  的带宽进行充分的限制，那么图 1.5 中的整个系统就不再是时不变的了。不过，该系统仍然是线性的，因为它是线性子系统的级联。

以下两个例子说明了式(1.85)和图 1.5 的应用，这两个例子都是针对连续时间信号的离散时间处理以及对两个重要的离散时间系统的理解。

### 例 1.3 数字微分器

本例利用图 1.5 设置中的离散时间系统来实现连续时间微分器。本例需选择满足  $y_c(t) = \frac{dx_c(t)}{dt}$  的  $H_d(e^{j\Omega})$ ，假设  $x_c(t)$  的带限为  $\pi/T$ 。因此，预期的整体连续时间频率响应为

$$H_c(j\omega) = \frac{Y_c(j\omega)}{X_c(j\omega)} = j\omega \quad (1.87)$$

利用式(1.85)选择满足下式的  $H_d(e^{j\Omega})$ ：

$$H_d(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega T} = j\omega, \quad |\omega| < \frac{\pi}{T} \quad (1.88a)$$

或

$$H_d(e^{j\Omega}) = j\Omega/T, \quad |\Omega| < \pi \quad (1.88b)$$

具有式(1.88b)中频率响应的离散时间系统通常被称为“数字微分器”。为了理解该数字微分器的输入信号  $x_d[n]$  和输出信号  $y_d[n]$  之间的关系，应注意  $y_c(t)$  (对  $y_d[n]$  的带限插值) 是  $x_c(t)$  的导数，并且反过来  $x_c(t)$  是对  $y_d[n]$  的带限插值。接下来，实际上可将  $y_d[n]$  视为对  $x_d[n]$  的带限插值的导数进行采样的结果。 ■

### 例 1.4 半采样时延

在设计离散时间系统的过程中，往往包含或需要一个形如  $e^{-j\alpha\Omega}, |\Omega| < \pi$  的相位因子。当  $\alpha$  为整数时，一种简单的解释是：这仅对应于时间序列以  $\alpha$  进行整数时移。当  $\alpha$  不为整数时，解释就不那么直接了，因为离散时间序列只能以整数量进行直接时移。

本例考虑  $\alpha=1/2$  的情况(也称为“半采样时延”)。为了进行解释，考虑选择图 1.5 中离散时间系统的可能结果，以拥有如下频率响应：

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{-j\Omega/2}, \quad |\Omega| < \pi \quad (1.89)$$

不管  $x_d[n]$  是否是通过对连续时间信号进行采样显式产生的，都能以任意指定的采样或重构间隔  $T$  将  $x_d[n]$  与其带限插值  $x_c(t)$  联系起来。类似地，可利用重构间隔  $T$  将  $y_d[n]$  与其带限插值  $y_c(t)$  联系起来。利用式(1.89)给定的  $H_d(e^{j\Omega})$ ，可得到将  $y_c(t)$  与  $x_c(t)$  联系起来的等价连续时间频率响应

$$H_c(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \quad (1.90)$$

这表示一个  $T/2$  的时延(如半采样间隔)，故  $y_c(t) = x_c(t - T/2)$ 。因此，可得出结论：对一个具有式(1.89)所给频率响应的离散时间系统来说，离散时间输出  $y_d[n]$  对应于对输入序列  $x_d[n]$  的带限插值进行半采样时延采样。注意，在这种解释中，对  $T$  值的选择并不重要。

前述解释可通过一个简单参数来获取半采样时延系统的单位采样(或冲激)响应。如果

$x_d[n] = \delta[n]$ , 则  $x_c(t)$  必定为其带限插值(可以指定它在某个时刻  $T$  取任意特定值), 即

$$x_c(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \quad (1.91)$$

因此,

$$y_c(t) = \frac{\sin(\pi(t-(T/2))/T)}{\pi(t-(T/2))/T} \quad (1.92)$$

这表明, 预期的单位采样响应为

$$y_d[n] = h_d[n] = \frac{\sin(\pi(n-(1/2)))}{\pi(n-(1/2))} \quad (1.93)$$

对半采样时延的讨论还可用一种简单明了的方式推广至  $\alpha$  取任意整数或非整数值时的情况。 ■

### 1.5.3 非理想 D/C 转换器

1.5.1 节通过带限插值公式(1.81)定义了理想 D/C 转换器, 如图 1.6 所示, 这对应于通过理想低通滤波器处理一系列强度为序列值  $y_d[n]$  的冲激信号。更通用的一类离散时间-连续时间(D/C)转换器(理想转换器是其特例)根据下式由离散时间信号  $y_d[n]$  构造连续时间信号  $y_c(t)$ :

$$y_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_d[n]p(t-nT) \quad (1.94)$$

其中,  $p(t)$  为某个选定的基本脉冲,  $T$  为重构间隔或脉冲重复间隔。可将这视为通过某个滤波器来处理一系列冲激序列值获得的结果, 但该滤波器拥有的冲激响应为  $p(t)$ , 而不是理想低通滤波器的冲激响应。因此, 连续时间信号  $y_c(t)$  是通过叠加基本脉冲的时移及缩放版本来构造的, 数  $y_d[n]$  对  $p(t-nT)$  进行了缩放, 这表明基本脉冲时延了  $nT$ 。注意, 可通过选择下式来获取式(1.81)中的理想带限插值转换器

$$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{(\pi t/T)} \quad (1.95)$$

第 3 章将讨论把式(1.94)解释为脉冲幅度调制(PAM), 以通过连续时间信道传输离散时间信息。

也可在频域中对式(1.94)中的关系进行非常简单的描述。取该式两边的 CTFT, 用  $P(j\omega)$  表示  $p(t)$  的 CTFT, 并利用“在时域中将信号时延  $t_0$  对应于在频域中乘以  $e^{-j\omega t_0}$ ”这个事实, 可得

$$\begin{aligned} Y_c(j\omega) &= \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_d[n]e^{-jn\omega T} \right) P(j\omega) \\ &= Y_d(e^{j\Omega})|_{\Omega=\omega T} P(j\omega) \end{aligned} \quad (1.96)$$

在该特例中,  $p(t)$  是式(1.95)中的正弦脉冲并具有变换  $P(j\omega)$ (对  $|\omega| < \pi/T$ , 该变换具有恒定的值  $T$ , 而在该频带外为零), 这样便恢复了式(1.82)中的关系。

事实上, 理想的频率特性只能被逼近, 且逼近的精度往往与实现的代价相关。一种通用的简单逼近方法是“中心零阶保持(ZOH)”, 基本脉冲指定为

$$P_z(t) = \begin{cases} 1, & |t| < (T/2) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.97)$$

对连续时域中以  $nT$  为中心、长度为  $T$  的间隔, 该 D/C 转换器保持了离散时间信号在时刻  $n$  的值(如

值  $y_d[n]$ ), 如图 1.7 所示。当然, 该中心 ZOH 是非因果的, 但很容易替换为非中心因果 ZOH, 这种情况下的基本脉冲为

$$p_{z'}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1.98)$$

此类 ZOH 转换器很常用。

另一种常见选择是中心一阶保持 (FOH), 这种情况下的基本脉冲  $p_f(t)$  是三角形, 如图 1.8 所示。使用 FOH 来表示序列值之间的线性插值。当然, 使用 ZOH 和 FOH 并不等价于奈奎斯特采样定理所要求的精确带限插值。中心 ZOH 脉冲的变换为

$$P_z(j\omega) = T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \quad (1.99)$$

而中心 FOH 脉冲的变换为

$$P_f(j\omega) = T \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2 \quad (1.100)$$

理想带限插值器、ZOH 及 FOH 的傅里叶变换幅度如图 1.9 所示。

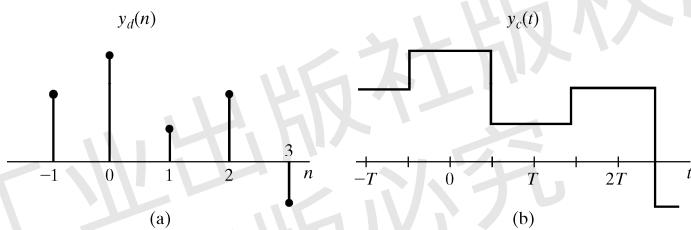


图 1.7 中心零阶保持 (ZOH)。(a) 离散时间序列; (b) 对 (a) 应用中心 ZOH 的结果

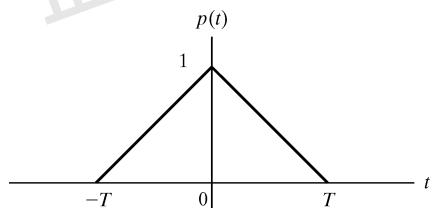


图 1.8 用于中心一阶保持 (FOH) 的基本脉冲  $p_f(t)$

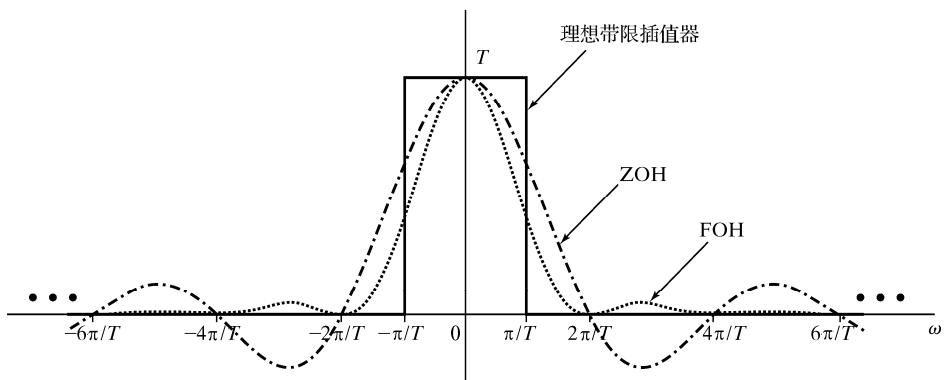


图 1.9 理想带限插值器、ZOH 及 FOH 的傅里叶变换幅度

## 1.6 延伸阅读

如前言所述，本书假设读者具有连续时间信号和离散时间信号及系统分析方面的基础知识。第1章和第2章与[Op1]中的讨论密切相关，主要目的是回顾和总结基本概念并建立相关标记。与这部分内容有关的计算探讨见[Buc]和[McC]等文献。另外，[Ch1]，[Ha1]，[Kwa]，[La1]，[Phi]和[Rob]等其他文献也包含了和信号与系统有关的基础知识。[Sie]重点探讨了连续时间信号与系统，并提供了一系列丰富的观点。[Op2]，[Mit]，[Ma1]，[Pra]和[Pr1]对离散时间信号与系统的开发做了更深入的讨论。[Vet]利用希尔伯特空间向量等信号观点讨论了信号的几何处理。[Bra]，[Gui]，[Pa1]，[Pa2]和[Pa3]等文献则非常经典地深入探讨了信号分析及傅里叶变换，所有这些延伸阅读材料都阐述了非常有用的观点。[Cha]对傅里叶理论的论述既简单明了，又颇具启发性。

## 习题

### 基础习题

**1.1** 指出下列系统是否满足线性、时不变性、因果性及 BIBO 稳定性等系统性质。

(a) 输入为  $x(t)$ ，输出为  $y(t)$ ，且具有如下输入-输出关系的系统：

$$y(t) = x^4(t), \quad -\infty < t < +\infty$$

(b) 输入为  $x[n]$ ，输出为  $y[n]$ ，且具有如下输入-输出关系的系统：

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ y[n-1] + x[n], & n > 0 \end{cases}$$

(c) 输入为  $x(t)$ ，输出为  $y(t)$ ，且具有如下输入-输出关系的系统：

$$y(t) = x(4t + 3), \quad -\infty < t < +\infty$$

(d) 输入为  $x(t)$ ，输出为  $y(t)$ ，且具有如下输入/输出关系的系统：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < +\infty$$

**1.2** 给定冲激响应为  $h_0(t)$  的某个线性时不变系统，且已知输入为  $x_0(t)$  时，输出  $y_0(t)$  的波形如图 P1.2 所示。

接下来，对具有冲激响应  $h(t)$  的线性时不变系统，给定以下一组输入  $x(t)$ ：

输入 $x(t)$	冲激响应 $h(t)$
(a) $x(t) = 2x_0(t)$	$h(t) = h_0(t)$
(b) $x(t) = x_0(t) - x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t)$
(c) $x(t) = x_0(t-2)$	$h(t) = h_0(t+1)$
(d) $x(t) = x_0(-t)$	$h(t) = h_0(t)$
(e) $x(t)x_0(-t)$	$h(t) = h_0(-t)$
(f) $x(t) = \frac{dx_0(t)}{dt}$	$h(t) = \frac{dh_0(t)}{dt}$

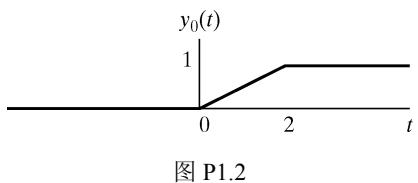


图 P1.2

对上述每一种情况, 确定是否有足够的信息来唯一确定输出  $y(t)$ 。如果可以唯一地确定  $y(t)$ , 则给出  $y(t)$  的解析表达式和草图。对那些不能唯一确定  $y(t)$  的情况, 尝试证明“为什么不能”。

- 1.3** 对以下各对信号, 利用卷积确定具有冲激响应  $h(t)$  的线性时不变系统对输入  $x(t)$  的响应  $y(t)$ 。画出结果草图。

(a)  $x(t) = e^{-3t}u(t), h(t) = u(t-1)$ 。

(b) 信号如图 P1.3 所示。

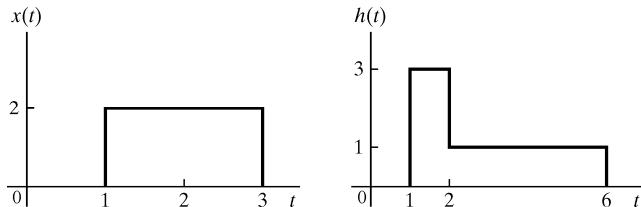


图 P1.3

- 1.4** (a) 考虑输入为  $x(t)$ 、输出为  $y(t)$  且输入和输出通过下式所示的线性时不变系统:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau$$

该系统的冲激响应  $h(t)$  是什么?

- (b) 输入  $x(t)$  如图 P1.4-1 所示, 试确定该系统的响应。

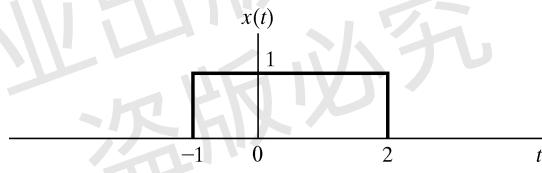


图 P1.4-1

- (c) 考虑如图 P1.4-2 所示的线性时不变系统的相互联系。这里的  $h(t)$  与 (a) 中的  $h(t)$  相同。当输入  $x(t)$  与 (b) 中的输入相同时, 确定输出  $w(t)$ 。利用 (b) 中的结果及卷积的性质来求解, 不要直接计算卷积积分。

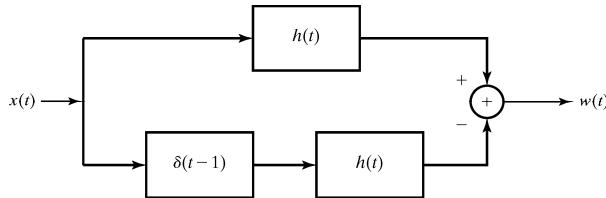


图 P1.4-2

- 1.5** (a) 假设某个系统函数为  $H(s)$  的稳定线性时不变系统的输入信号在所有时刻  $t$  恒为  $\alpha$ , 则每个时刻  $t$  的输出为多少?

- (b) 当 (a) 中系统的输入在所有时刻均为信号  $x(t) = t$  时, 用  $y(t)$  表示通过该系统获得的输出信号。现在, 求与输入  $t - \alpha$  (其中  $\alpha$  为任意常量) 对应的输出的两种不同表达式。提示: 利用该系统的线性和时不变性以及 (a) 中的结果。通过选择合适的  $\alpha$ , 推断出  $y(t) = bt + y(0)$  对某个常量  $b$  成立。用  $H(s)$  表示  $b$ 。

- 1.6** 求以下信号的 CTFT:

- (a)  $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$  ;  
 (b)  $x(t) = e^{-|t|}$  ;  
 (c)  $x(t) = [e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)]u(t)$  。

1.7 求以下信号的 DTFT, 其中  $-\pi < \Omega \leq \pi$  :

(a)  $x[n] = \begin{cases} n, & -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(b)  $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos(n)$  ;

(c)  $x[n] = e^{-2|n|}$  ;

(d)  $x[n] = u[n-2] - u[n-6]$  ;

(e)  $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} u[n+2]$  ;

(f)  $x[n] = (n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{|n|}$  。

1.8 考虑具有以下频率响应的离散线性时不变系统:

$$H(e^{j\Omega}) = e^{-j3\Omega/2}, \quad -\pi < \Omega < \pi$$

求输入为  $x[n] = \cos\left(\frac{4\pi}{3}n + \frac{\pi}{4}\right)$  时的输出  $y[n]$  。

1.9 确定下列 (a) ~ (g) 中各信号的傅里叶变换满足 (1) ~ (6) 中的哪些性质。尽可能少地计算, 相反, 应根据需要调用变换性质。

(1)  $\Re\{X(e^{j\Omega})\} = 0$  。

(2)  $\Im\{X(e^{j\Omega})\} = 0$  。

(3) 存在实数  $\alpha$ , 使  $e^{j\alpha\Omega} X(e^{j\Omega})$  为实数。

(4)  $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) d\Omega = 0$  。

(5)  $X(e^{j\Omega})$  具有周期性。

(6)  $X(e^{j\Omega})|_{\Omega=0} = 0$  。

(a) 图 P1.9-1 中的  $x[n]$  。

(b) 图 P1.9-2 中的  $x[n]$  。

(c) 图 P1.9-3 中的  $x[n]$  。

(d) 图 P1.9-4 中的  $x[n]$  。

(e)  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  。

(f)  $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+2]$  。

(g)  $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+1]$  。

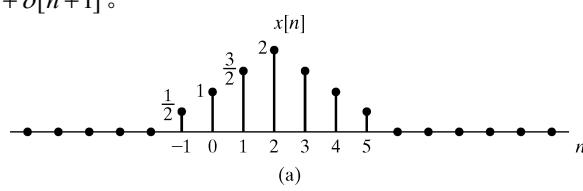


图 P1.9-1

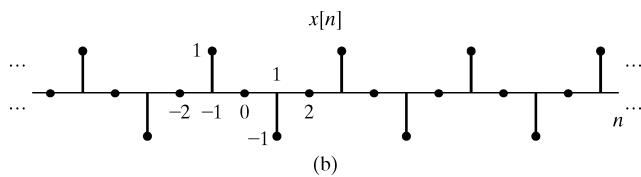


图 P1.9-2

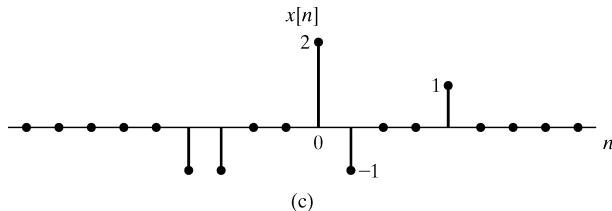


图 P1.9-3

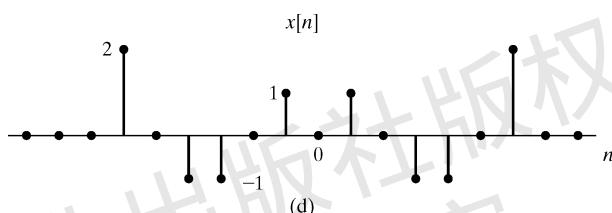


图 P1.9-4

- 1.10 设  $X(e^{j\Omega})$  是离散时间信号  $x[n]$  的傅里叶变换。对  $|\Omega| < \pi$ ,  $X(e^{j\Omega})$  的幅度及相位如图 P1.10 所示。

- (a) 给出完整标记的、 $x[-n]$  的 DTFT 在  $-2\pi < \Omega < 2\pi$  时的幅度及相位草图。  
 (b) 给出完整标记的、 $x[n-1]$  的 DTFT 在  $-2\pi < \Omega < 2\pi$  时的幅度及相位草图。

注意, 可能需要在  $-2\pi < \Omega < 2\pi$  时画出上述图形, 而  $X(e^{j\Omega})$  的图形则需在  $-\pi < \Omega < \pi$  时给出。

- 1.11 离散时间信号  $x[n]$  的傅里叶变换为

$$X(e^{j\Omega}) = e^{j2\Omega}(1 - e^{-j3\Omega})$$

求  $x[n]$ 。

- 1.12 图 P1.12-1 用数字 1~4 标注了 4 个 DTFT 幅度。图 P1.12-2 显示了 4 种关联的离散时间信号, 尽管标注为 A~D, 但排列顺序是随机的。  
 (a) 将这 4 个 DTFT 与这 4 个信号进行匹配, 并说明这样匹配的理由。  
 (b) 数字 1 和 4 标注的 DTFT 缺失了刻度。图中的刻度或最大幅度应为多少? 为什么?

- 1.13. (a) 求以下序列的傅里叶变换:

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

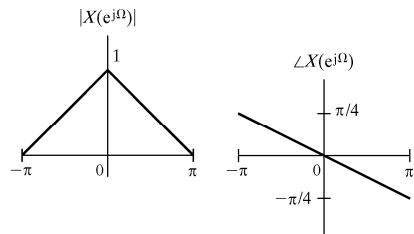


图 P1.10

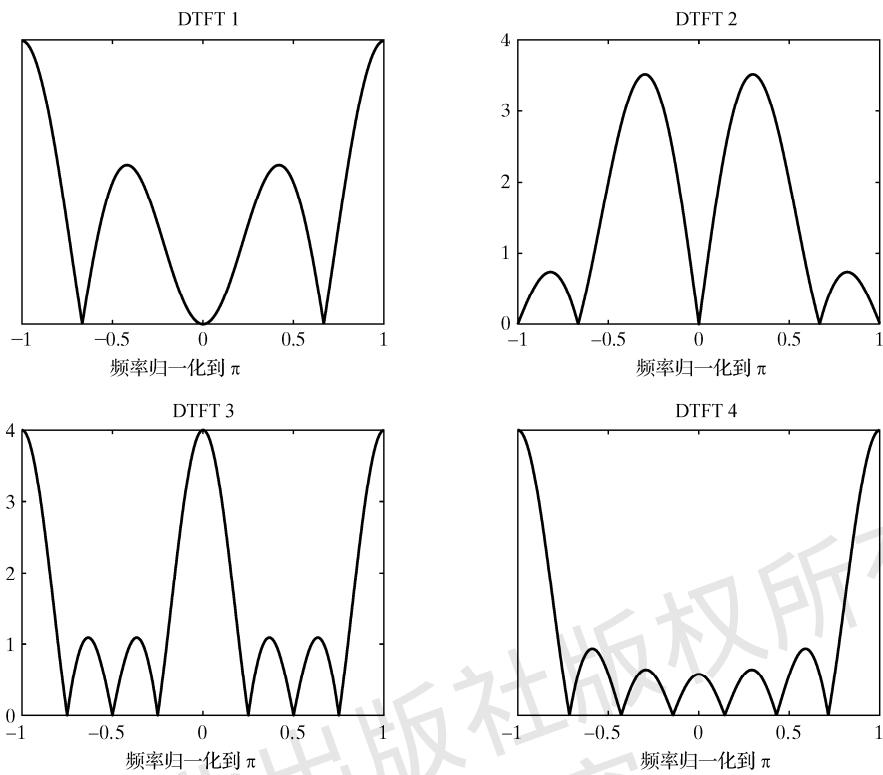


图 P1.12-1

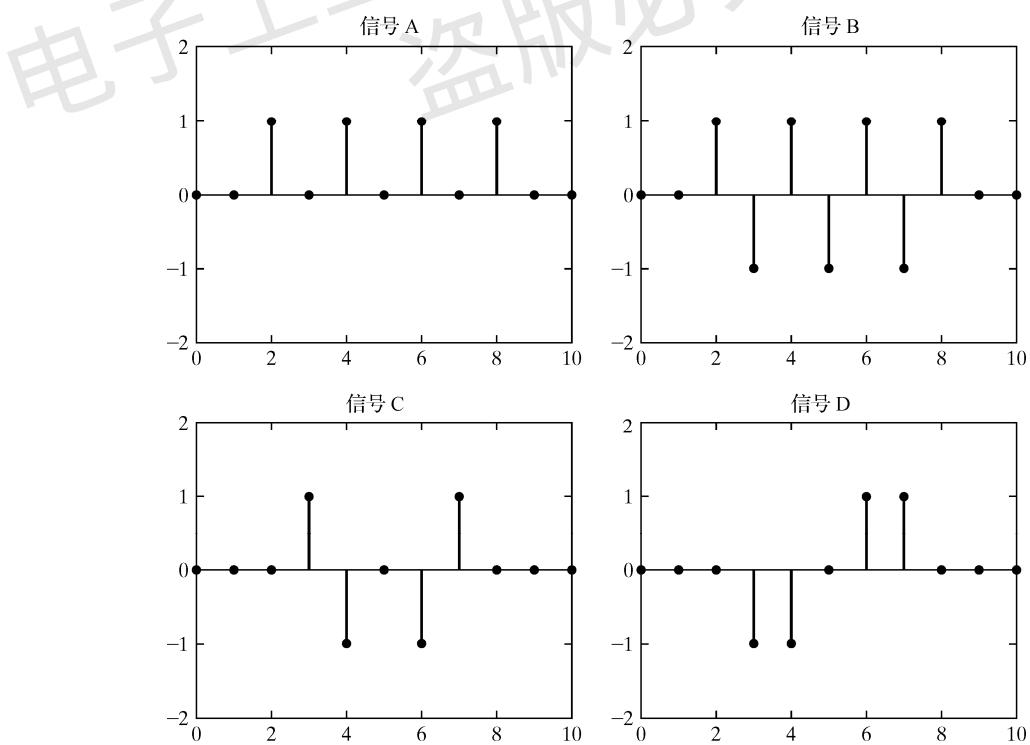


图 P1.12-2

注意，这里的  $M$  可能不为偶数。

(b) 考虑以下序列：

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi n}{M} \right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

用  $r[n]$  的 DTFT 表示  $w[n]$  的 DTFT。

(c) 画出  $R(e^{j\Omega})$  和  $W(e^{j\Omega})$  的幅度草图。

**1.14.** (a) 假设  $x(t)$  是奈奎斯特采样率为  $\omega_c$  的信号。求以下各信号的奈奎斯特采样率：

- (i)  $x(t) + 3x(t-4)$ ；
- (ii)  $x(t) * \frac{\sin(3000\pi t)}{\pi t}$ ；
- (iii)  $x^2(t)$ 。

(b) 信号  $x(t)$  是由带限信号  $x_1(t)$  与带限信号  $x_2(t)$  的卷积生成，即

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

其中

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= 0, & |\omega| > 1000\pi \\ X_2(j\omega) &= 0, & |\omega| > 2000\pi \end{aligned}$$

对  $x(t)$  进行冲激序列采样，可得

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

求采样周期  $T$  的取值范围，以确保可通过理想低通滤波从  $x_p(t)$  中恢复  $x(t)$ 。

**1.15** 考虑图 P1.15-1 中所示的使用离散时间滤波器来过滤连续时间信号的系统。这里， $x[n] = x_c(nT)$ ， $y[n] = y_c(nT)$ ，并且  $L_T(j\omega)$  是截断频率为  $\pi/T$ 、增益为  $T$  的理想低通滤波器。

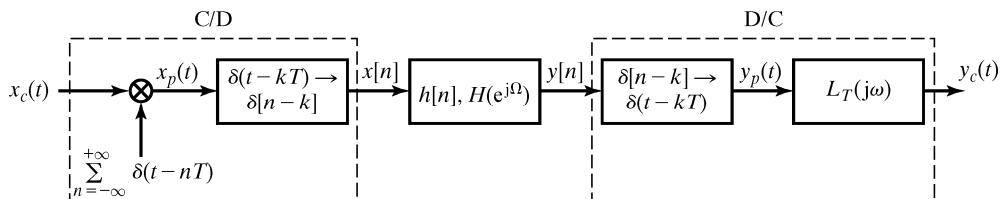


图 P1.15-1

假设  $X_c(j\omega)$  和  $H(e^{j\Omega})$  如图 P1.15-2 所示，且选择  $T$  并以奈奎斯特采样频率来对  $x_c(t)$  进行采样，试画出  $X_p(j\omega)$ ， $X(e^{j\Omega})$ ， $Y(e^{j\Omega})$ ， $Y_p(j\omega)$  和  $Y_c(j\omega)$  的草图。

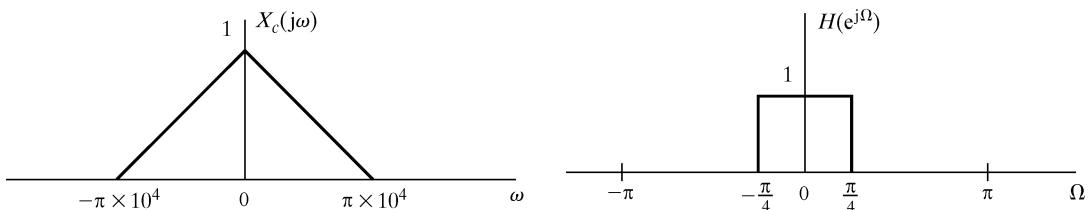


图 P1.15-2

1.16 在如图 P1.16-1 所示的系统中,  $X_c(j\omega)$  及  $H(e^{j\Omega})$  的幅度和相位如图 P1.16-2 所示。请画出下列函数的幅度及相位简洁草图, 并标上相关的幅度和斜率。

- (a)  $X(e^{j\Omega})$  为  $\Omega$  的函数,  $-2\pi < \Omega < 2\pi$ ;
- (b)  $Y(e^{j\Omega})$  为  $\Omega$  的函数,  $-2\pi < \Omega < 2\pi$ ;
- (c)  $Y_c(j\omega)$  为  $\omega$  的函数。

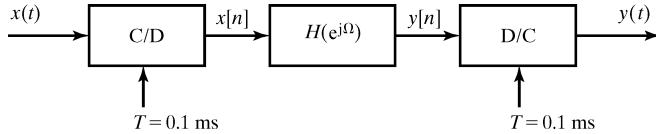


图 P1.16-1

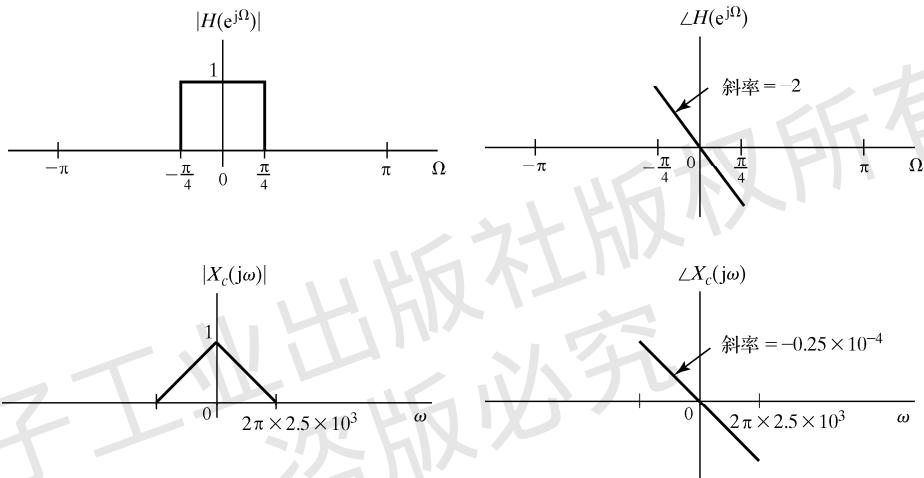


图 P1.16-2

1.17 图 P1.17-1 显示了一个连续时间滤波器, 该滤波器是通过利用频率响应为  $H(e^{j\Omega})$  的线性时不变离散时间滤波器实现的。

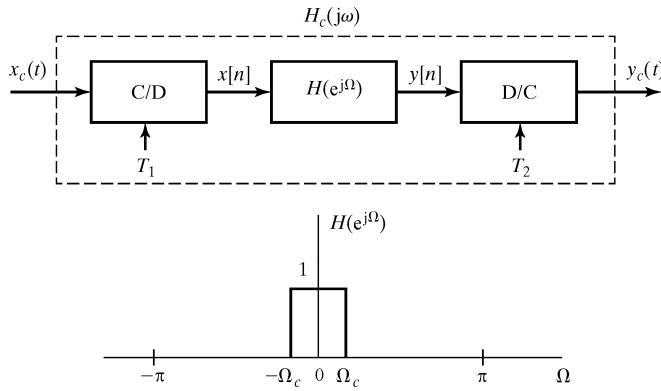


图 P1.17-1

- (a) 如果  $x_c(t)$  的 CTFT[如  $X_c(j\omega)$ ] 如图 P1.17-2 所示, 且  $\Omega_c = \pi/5$ , 那么针对下列各种情况, 画出  $X(e^{j\Omega})$ ,  $Y(e^{j\Omega})$  和  $Y_c(j\omega)$  的草图并加以标注。

$$(i) \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 2 \times 10^4 ;$$

$$(ii) \frac{1}{T_1} = 4 \times 10^4, \quad \frac{1}{T_2} = 10^4 ;$$

$$(iii) \frac{1}{T_1} = 10^4, \quad \frac{1}{T_2} = 3 \times 10^4 .$$

(b) 如果  $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2} = 6 \times 10^3$ , 且输入信号  $x_c(t)$  的频谱被带限在  $|\omega| < 2\pi \times 5 \times 10^3$  (但在其他频带没有限制), 那么使得整个系统为线性时不变系统的滤波器  $H(e^{j\Omega})$  的最大截断频率  $\Omega_c$  是多少? 求  $\Omega_c$  取该最大值时的  $H_c(j\omega)$ 。

- 1.18** 考虑连续时间信号的标准离散时间处理系统, 其中 C/D 转换器以  $T$  s 的采样间隔对连续时间信号  $x_c(t)$  进行采样, 同时发射器的理想 D/C 转换器利用  $T$  s 的重构时间间隔对样本  $y[n]$  进行了带限插值。假设在这两类转换器之间的线性时不变离散时间系统是陷波滤波器, 即该系统的频率响应  $H(e^{j\Omega})$  的值在  $\Omega = \pm\Omega_0$  处为零(其中  $\Omega_0 > 0$  被称为“陷波频率”), 在  $|\Omega| < \pi$  的其他地方的值为非零。假设输入信号形如

$$x_c(t) = \cos(\omega_{in}t + \theta)$$

求使输出  $y_c(t)$  恒为零的所有  $\omega_{in}$  的值。

- 1.19** 已知带限连续时间信号  $x_c(t)$  包含一个 60 Hz 的分量, 利用图 P1.19 中的系统来消除该分量。假设  $T = 2 \times 10^{-4}$  s, 且

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{(1 - e^{-j(\Omega - \Omega_0)})(1 - e^{-j(\Omega + \Omega_0)})}{(1 - 0.5e^{-j(\Omega - \Omega_0)})(1 - 0.5e^{-j(\Omega + \Omega_0)})}$$

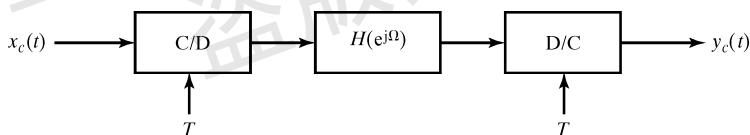


图 P1.19

(a) 在不发生混叠的前提下,  $x_c(t)$  可以包含的最高频率是多少?

(b)  $\Omega_0$  应取何值?

(c) 画出  $H(z)$  的零-极点图, 画出  $|H(e^{j\Omega})|$  的草图。

- 1.20** 本题考虑图 P1.20-1 所示的系统,

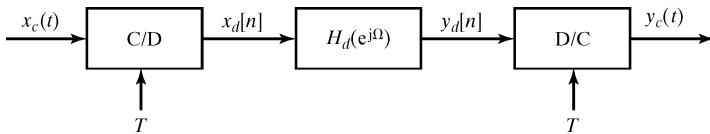


图 P1.20-1

以及由图 P1.20-2 和以下方程描述的  $-\pi \leq \Omega \leq \pi$  时的离散时间滤波器:

$$H_d(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega/3}, & |\Omega| \leq \pi/3 \\ 0, & \pi/3 < |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

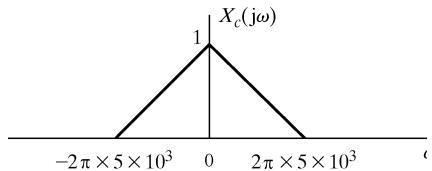


图 P1.17-2

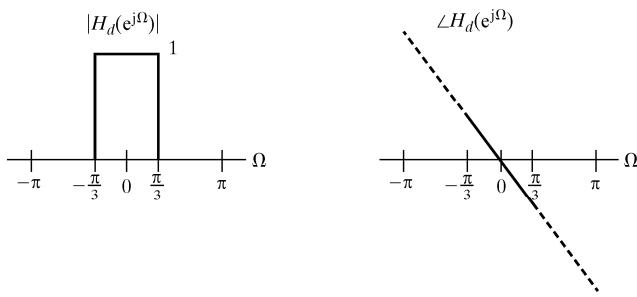


图 P1.20-2

(a) 假设采样周期为  $T = \frac{1}{2} \times 10^{-6}$  s。并设系统的输入为  $x_c(t) = \cos(\omega_0 t)$ 。求下列情况下的输出  $y_c(t)$ 。

- (i)  $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \times 10^6$  rad/s；
- (ii)  $\omega_0 = \pi \times 10^6$  rad/s；
- (iii)  $\omega_0 = \frac{7\pi}{2} \times 10^6$  rad/s。

现在假设输入  $x_c(t)$  受到带宽限制，且对  $|\omega| \geq 2\pi \times 10^6$  rad/s，满足  $X_c(j\omega) = 0$ 。

(b) 使输出恒等于输入[除了可能的时移  $t_0$ ，即  $y_c(t) = x_c(t - t_0)$ ]的最大采样周期  $T$  是多少？

(c) 使频率响应为  $H_d(e^{j\Omega})$  的给定系统从输入到输出均表现为线性时不变连续时间系统的最大采样周期  $T$  是多少？

**1.21** 考虑形如 1.5.3 节所述的通用 D/C 转换器。假设

$$y_d[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

画出在以下情况下对  $y_c(t)$  和  $Y_c(j\omega)$  进行完全标注的草图：

- (a) 理想带限插值 D/C 转换器；
- (b) 中心零阶保持 D/C 转换器；
- (c) 线性插值 D/C 转换器。

**1.22** 判断以下各条陈述的真假，并说明得出该结论的理由。

陈述：

从连续时间信号的样本中精确重构该信号需要采样频率高于最高频率的两倍。

陈述：

如果采样频率高于最高频率的两倍，则从连续时间信号的样本中精确重构该信号总是可能的。

陈述：

如果采样频率高于或等于最高频率的两倍，则从连续时间信号的样本中精确重构该信号总是可能的。

**1.23** 在一辆电动汽车沿下列微分方程给定的轨道运动的简单物理模型中， $y(t)$  表示该车的位置。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\left(\frac{c_f}{m}\right) \frac{dy(t)}{dt} - \left(\frac{c_b}{m}\right) \frac{dy(t)}{dt} x_b(t) + x_a(t)$$

其中， $x_b(t)$  是作用于车胎的制动力， $x_a(t)$  是由电动发动机提供的加速度， $m$  是该车的质量， $c_f$  和  $c_b$  分别表示车辆和制动器的摩擦系数。假设限定  $x_b \geq 0$ ，而  $x_a$  可正可负。

(a) 该模型是线性的吗？即其非零解服从叠加原理吗？该模型是时不变的吗？

(b) 如果制动力  $x_b(t)$  恒等于零，结论又会有怎样的变化呢？

**1.24** 连续时间信号的 Parseval 关系描述如下：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

这表明，在所有频率上求  $|X(j\omega)|^2$  的积分可得该信号的总能量。现在，考虑由图 P1.24 所示的理想带通滤波器  $H(j\omega)$  处理的实值信号  $x(t)$ 。

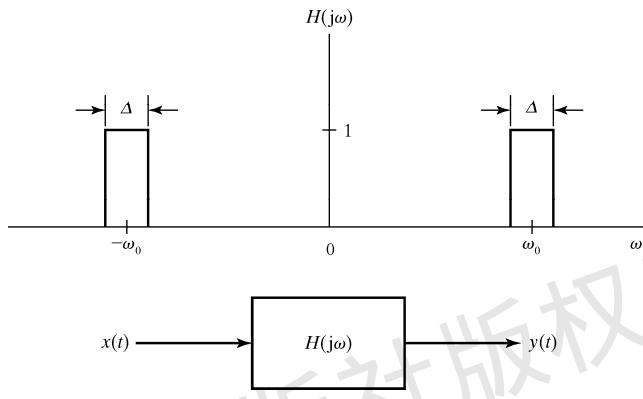


图 P1.24

(a) 将该能量表示为在  $|X(j\omega)|^2$  的频率上对输出信号  $y(t)$  的积分。

(b) 当充分小的  $\Delta$  使  $|X(j\omega)|$  在宽为  $\Delta$  的频率区间上近似为常量时，证明该带通滤波器的输出  $y(t)$  的能量近似正比于  $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ 。

由上述结论可知，在频率  $\omega_0$  附近的带宽  $\Delta$  中， $\Delta|X(j\omega_0)|^2$  正比于该信号的能量。因此， $|X(j\omega)|^2$  是信号  $x(t)$  的能量谱密度。

(c) 现在考虑离散时间信号  $x[n]$ 。假设已知确定性信号  $x[n]$  的 DTFT  $X(e^{j\Omega})$  在  $|\Omega| < 0.4\pi$  时的幅度为 2，而在  $0.4\pi \leq |\Omega| \leq \pi$  时的幅度未知。将该信号作为某个理想低通滤波器的输入，该低通滤波器在  $|\Omega| < 0.25\pi$  时的频率响应  $H(e^{j\Omega})$  为 3，在  $0.25\pi \leq |\Omega| \leq \pi$  上的频率响应为零。输出信号 ( $y[n]$ ) 的能量 ( $\sum y^2[n]$ ) 是多少？

## 进阶习题

**1.25** 如果某个连续时间线性时不变系统对单位阶跃函数  $u(t)$  的响应为  $g(t)$ ，那么对一般输入  $x(t)$  的响应  $y(t)$  是怎样的？要使该系统具有 BIBO 稳定性， $g(t)$  需满足的充要条件是什么？

**1.26** 考虑由下列微分方程描述的因果线性时不变系统：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

该系统的逆系统可用某个微分方程来描述。求描述该逆系统的微分方程。同样，求原始系统及其因果逆系统的冲激响应  $h(t)$  和  $g(t)$ 。

**1.27** (a) 某个线性时不变系统的输入  $x(t)$  和输出  $y(t)$  满足如下微分方程：

$$4 \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = 3x(t)$$

(i) 证明输入-输出对

$$x(t) = \delta(t), \quad y(t) = \frac{3}{4}e^{0.5t}u(t)$$

及

$$x(t) = \delta(t), \quad y(t) = -\frac{3}{4}e^{0.5t}u(-t)$$

满足上述微分方程。

(ii) 当  $x(t) = \delta(t)$  时, 求满足该微分方程的所有输出  $y(t)$ , 并显式地验证所得到的解包含

(i) 中的两个特例。提示: 回顾一下, 线性微分方程的通解是一个特解加上一个齐次解。同样应注意: 一般地, 解  $y(t)$  不一定具有拉普拉斯变换; 事实上, 在这个问题中, 只有在(i)中求得的两个解具有拉普拉斯变换。

(iii) 如果该系统是因果的, 那么其冲激响应是多少?

(iv) 如果该系统是稳定的, 那么其冲激响应是多少?

(b) 某个线性时不变系统的输入和输出满足如下差分方程:

$$y[n] - 3y[n-1] = 2x[n]$$

(i) 假设该系统是因果的, 求其冲激响应(如单位采样响应)。该系统具有 BIBO 稳定性吗?

(ii) 反过来, 假设该系统是稳定的, 求其冲激响应。该系统是因果的吗?

**1.28** 考虑图 P1.28-1 中的 3 个线性时不变系统的因果级联关系。

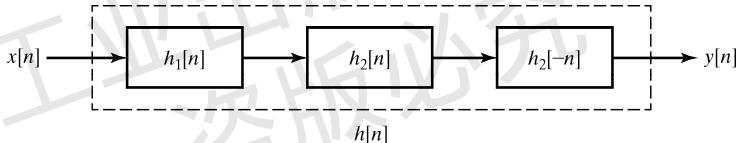


图 P1.28-1

冲激响应  $h_2[n]$  由  $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$  给出, 且整个冲激响应  $h[n]$  如图 P1.28-2 所示。

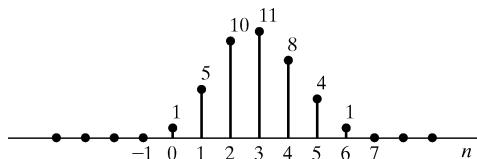


图 P1.28-2

(a) 求冲激响应  $h_1[n]$ 。

(b) 求整个系统对以下输入的响应:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$$

**1.29** 注意: 本题要求利用适当的计算包。考虑简单的离散时间差分方程

$$x[n+1] = rx[n](1-x[n]), \quad n \geq 0$$

假设  $0 < x[0] < 1$  及  $r \geq 0$ 。

(a) 本系统是线性的吗? 是时不变的吗?

(b) 如果  $x[0]=1/2$ , 那么  $r$  取什么值时,  $x[n]$  有界?

(c) 用适当的计算包计算并画出  $r$  取不同值时的  $x[n]$ ，包括  $r = k/4, k = 1, 2, \dots, 15$ 。所画出的图形支持(b)中的结论吗？

- 1.30** (a) 某个特定的离散时间系统将输入信号  $x[n]$  映射为输出信号  $y[n]$ 。若输入信号为

$$x[n] = (-1)^n, \text{ 对所有 } n$$

则输出信号为

$$y[n] = 1, \text{ 对所有 } n$$

若输入信号为

$$x[n] = (-1)^{n+1}, \text{ 对所有 } n$$

则输出信号为

$$y[n] = 1, \text{ 对所有 } n$$

(i) 该系统是线性的吗？说明理由。

(ii) 该系统是时不变的吗？说明理由。

- (b) 某个特定的离散时间系统将输入信号  $x[n]$  映射为输出信号  $y[n]$ 。若输入信号为

$$x[n] = (-1)^n, \text{ 对所有 } n$$

则输出信号为

$$y[n] = 1, \text{ 对所有 } n$$

若输入信号为

$$x[n] = (-1)^{n+1}, \text{ 对所有 } n$$

则输出信号为

$$y[n] = -1, \text{ 对所有 } n$$

回答与上述(a)中(i)和(ii)相同的问题。

- 1.31** 对图 P1.31 中的离散时间系统  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  和  $S_4$ ，所示的输入-输出对表示在相应系统上的实验结果。对适当的冲激响应  $h[n]$ ，确定该系统的输出  $y[n]$  和输入  $x[n]$  是否绝对不可能、有可能或必定满足形如  $y[n] = h[n]*x[n]$  的卷积关系。写出适当的陈述并对推理过程进行解释。对于回答为“有可能”或“必定”的每一种情况，确定冲激响应  $h[n]$ 、频率响应  $H(e^{j\omega})$  或系统函数  $H(z)$ ，以解释给定的输入-输出对。

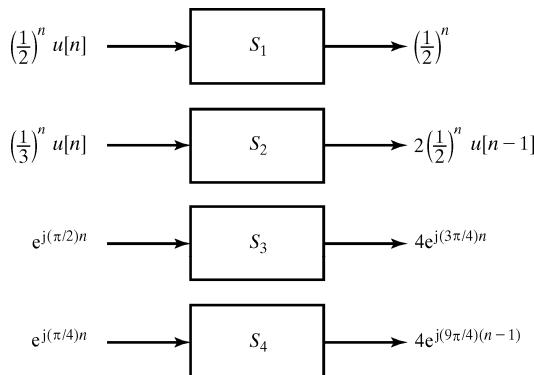


图 P1.31

**1.32** 确定以下陈述的真假，并给予简要证明(对为“假”的陈述，举一反例)。

- (i) 如果  $e^{jt} + e^{j3t}$  是某个连续时间系统的特征函数，则该系统不可能是线性时不变的。
- (ii) 如果  $h(t)$  是某个稳定线性时不变系统的非零冲激响应，则  $h(t)$  可能是周期性的。
- (iii) 一个因果、稳定的线性时不变系统总是存在因果逆系统，尽管该逆系统可能并不稳定。

**1.33** 考虑具有以下频率响应的实值离散时间线性时不变系统：

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1+ae^{-j2\Omega}+2e^{-j4\Omega}}{1+be^{-j2\Omega}}$$

求常量  $a$  和  $b$ ，给定的输入-输出对如图 P1.33 所示。

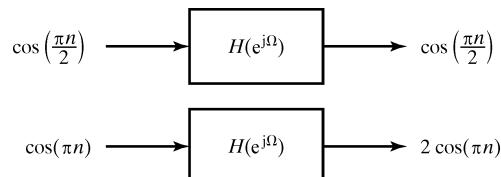


图 P1.33

**1.34** 考虑其冲激响应  $h(t)$  为实值的线性时不变系统，与该系统关联的系统函数为  $H(s)$ 。

假设本题中的输入为  $x(t) = e^{-3t} \cos t$  ( $t$  取所有值)，并且对于该输入的输出  $y(t)$  有着严格的规定。

- (a) 如果可以求对应于某个单值  $s$  的  $H(s)$  值，那么为了获得一个对应于上述输入的输出  $y(t)$  在时域上的显式表示，应选择哪一个  $s$  值？写出用所选的  $s$  计算得到的  $H(s)$  表示的这样一个  $y(t)$ 。
- (b) 假设已知  $y(0) = 0$  及  $\dot{y}(0) = 1$ 。将(a)中获得的  $y(t)$  的表达式简化为  $y(t) = e^{-3t}(A \cos t + B \sin t)$  的形式，并确定常量  $A$  和  $B$ 。

**1.35** 考虑具有如下频率响应的离散线性时不变系统：

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} e^{-j\Omega^3}, & |\Omega| < \frac{\pi}{5} \\ 0, & \frac{\pi}{5} \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases}$$

该系统的输入是周期性的单位采样“序列”(周期为  $N=12$ )：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n+12k]$$

求该系统的输出  $y[n]$ 。

**1.36** 考虑具有如下频率响应的离散线性时不变系统：

$$H_d(e^{j\Omega}) = |\Omega| e^{-jg(\Omega)}, \quad |\Omega| < \pi$$

已知函数  $g(\Omega)$  可能为  $g(\Omega) = \Omega^2$  或者  $g(\Omega) = \Omega^3$ 。

- (a) 已知该系统的单位采样响应  $h_d[n]$  为实值。利用这一事实推断上述两个可能的  $g(\Omega)$  中哪一个是正确的，并予以说明。

$$(b) \text{ 求 } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d[n].$$

$$(c) \text{ 求 } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d^2[n].$$

**1.37** 有理系统函数为  $H(s)$  的连续时间线性时不变系统具有如图 P1.37 所示的  $s$  平面图，其中收敛域为

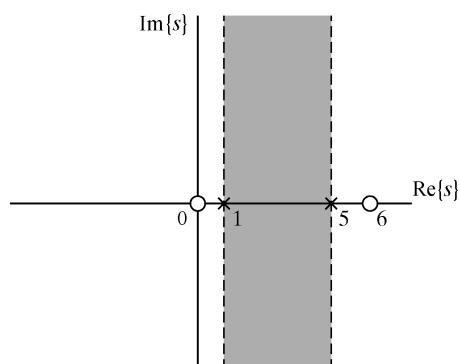


图 P1.37

$1 < \operatorname{Re}\{s\} < 5$ 。极点在 1 和 5，零点在 0 和 6。另外，已知  $H(3) = 9$ 。求逆系统  $G(s)$ ，使得如果  $H(s)$  和  $G(s)$  级联，则整个系统的输出  $y(t)$  等于输入  $x(t)$ 。

- (a) 写出该系统的有理系统函数  $H(s)$ 。
- (b) 存在因果逆系统吗？若存在，写出该逆系统的系统函数  $G(s)$  并指出其收敛域。若不存在，说明理由。
- (c) 存在具有 BIBO 稳定性的逆系统吗？若存在，写出该逆系统的系统函数  $G(s)$  并指出其收敛域。若不存在，说明理由。
- (d) 存在双边逆系统吗？若存在，写出该逆系统的系统函数  $G(s)$  并指出其收敛域。若不存在，说明理由。

1.38 考虑具有以下频率响应的离散时间线性时不变系统：

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{4 - 9e^{-j\Omega}}{4\cos\Omega + 2e^{-j\Omega} - 9}$$

- (a) 可将对应于上述频率响应的有理系统函数  $H(z)$  表示为

$$H(z) = \frac{\alpha_1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\alpha_2}{z - 4}$$

求  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$ ，并指出收敛域。

- (b) 该系统是因果的吗？
- (c) 该系统的冲激响应  $h[n]$  是什么？
- (d) 假设对所有  $n$ ，该系统的输入为信号  $x[n] = 3^n$ 。对应的输出  $y[n]$  是什么？
- (e) 假设对所有  $n$ ，该系统的输入为信号  $x[n] = 3^n u[n]$ ，其中  $u[n]$  为单位阶跃函数。当  $n \rightarrow -\infty, y[n] \rightarrow \beta z_0^n$  时， $z_0$  为多少？

1.39 (a) 如果信号  $x[n]$  在  $|\Omega| \leq \pi$  上的 DTFT 如图 P1.39-1 中的 A 所示，当  $n = 0$  时，该信号的值为多少？

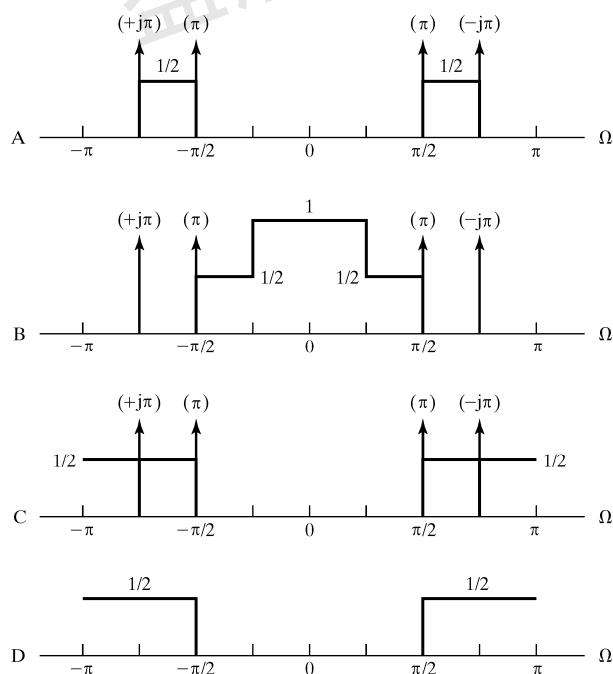


图 P1.39-1