高等职业教育“互联网+”立体化教材——公共基础课系列

高等应用数学

主　编：王　岳　任晓燕
副主编：蓝　梅　朱　艳　李海霞　赵　萱
主　审：张天德　季桂林

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书主要针对高职院校理工类专业编写，较好地体现了高等数学的应用性，可供大一理工类学生使用。

本书内容主要包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程和数学实验 7 个章节，书中加“*”号的内容为选学内容，供任课老师酌情选用。每章按节配置了由易到难的习题，书后附有答案，扫码可以查看答案详解。同时，每章最后有本章复习题和在线测试题。为了便于学生学习，书末附录还给出了常用数学公式和积分表。

本书内容突出数学与理工类专业及生活实践的密切联系，在案例选取上，精选与专业相关的生产、生活实例，体现“数学与专业”“数学与生产、生活”的融合性；在内容的选择上，注重对学生基础知识的强化、基本技能的训练和应用能力的培养。本书增设了数学实验章节，实现了通过数学实验学生能进一步简化计算、强化应用、拓展能力的目的。每章中结合知识点设计了“思政之窗”，将思政元素融入数学理论和方法之中。最后的“学海拾贝”对本书中提及的数学家进行了简介，使学生对数学史有初步了解，增强学生学习数学的兴趣。

本书可作为高职高专院校、成人高校及其他职业学院、继续教育学院和民办高校大一理工类学生的教学用书，也可作为专升本复习和有关人员学习高等数学知识的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学 / 王岳，任晓燕主编．—北京：电子工业出版社，2022.5

ISBN 978-7-121-43294-1

I. ①高… II. ①王… ②任… III. ①应用数学—高等学校—教材 IV. ①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2022）第 067720 号

责任编辑：贺志洪
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1 092　1/16　　印张：15.5　　字数：396.8 千字
版　　次：2022 年 5 月第 1 版
印　　次：2022 年 5 月第 1 次印刷
定　　价：39.90 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88254609，hzh@phei.com.cn。

前　言

本书是按照教育部颁布的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”和“高职高专教育专业人才培养目标及规格”组织编写的。以培养应用型人才为目标，以“强化能力，立足应用”为原则，结合高职高专高等应用数学的教学特点，以及当前教学改革实际和专业需求，力求做到课程融入思政元素，内容精简适用、条理清晰、深入浅出、通俗易懂，突出应用。

根据高素质应用型人才培养的要求，我们对传统的高等数学教材内容进行了整合，添加了思政之窗、数学建模及数学实验的内容，使教学内容与技能型人才的培养需要相衔接，与我国目前高职学生的实际数学水平相衔接。本书注重与实际应用联系较多的数学基础知识、基本方法和基本技能的训练，不追求复杂的计算和证明。内容呈现与讲授过程中，强调直观描述和几何解释，适度淡化理论推导或证明。注重揭示概念的本质，强化数学知识与专业知识和生活实际的联系。在强调数学应用的广泛性的同时，兼顾数学建模思想的渗透和数学软件应用的拓广，并通过思政元素的渗透，培养学生树立正确的人生观、价值观、世界观和良好的科学素养。本书作为高职高专的“高等数学”教材，有很多创新之处，主要体现在：

在教学内容的设计上，编者们秉持“思政融入、淡化理论、渗透思想、结合实例、引入软件、强化应用”的理念。书中精心编写了大量与专业和实际生活密切联系的，适合高职高专数学教学的应用案例，通过引例的引导学习、习题的强化渗透，使学生能够借助实际问题和专业背景理解数学概念的实质，再利用数学概念和数学思想促进对专业问题和工程原理的认识，从而进一步利用数学方法解决专业中的更多实际问题。全书由生活实践和各类工程问题启发学生思维，引出数学知识，再列举浅显、贴近生活与专业的数学应用案例分析讲解数学知识和方法。本书力图反映现代技术的新知识、新技术、新内容、新工艺和新案例，充分体现了高职教育紧密联系生产、建设、服务、管理一线的实际要求。

在思政元素的融入上，全书注重合理有效地融入思政元素，力求起到润物细无声的作用。专门设计了“思政之窗”栏目，并把部分内容录制了微课，通过介绍微积分的发展、我国传统文化中的微积分思想，古中外数学家在数学研究中百折不挠的探索精神，以及微积分中很多重要概念所体现的辩证唯物的哲学思想，使学生在知识输入的同时，提高思维

的思辨性，更好地塑造其自身的人生观、价值观乃至世界观。在努力提升素质教育的目的下，最终实现“立德树人”的根本任务。

在数学应用的体现上，本书每章中加入了数学建模案例一节，通过一到两个完整案例的分析解答，让学生了解如何利用数学建模思想，运用高等数学所学知识，解决实际问题。第七章引入了数学实验的内容，通过这部分的学习，使学生能借助计算机，充分利用数学软件 MATLAB 的数值功能和图形功能，直观地验证一些概念和结论，快捷地进行各类运算和图形绘制，并从感官上更形象地理解所学的数学知识，加深对数学基本概念的认识，突出了数学的工具性。

在课程内容的呈现上，本书中重点概念、例题、习题均配有视频讲解或动画演示，通过扫码，学生可以自行观看视频或动画，便于学生预习、复习。书中重要知识点的例题后面还配有“牛刀小试”环节，学生在课上尝试自行解答本环节的题目，以便及时检测知识和方法的掌握程度。对于书中所有章节习题、复习题的答案本书均给出了详解，学生也可以通过扫码来查看比对习题和复习题详细的解答过程。另外，除了课本上的习题和复习题之外，每章我们还设计了在线测试题，同学们学习完一章内容后，可以用手机进行在线测试，随时了解自己的学习情况。

本书由王岳、任晓燕担任主编，蓝梅、朱艳、李海霞、赵萱任副主编。其中，第一章、第二章、第三章及附录由王岳编写，第四章、第五章由任晓燕编写，第六章由王岳、蓝梅、李海霞编写，第七章由六位编者共同编写，各章数学建模案例由朱艳、王岳编写。各章微课视频的录制、在线测试题编写、习题、复习题答案详解由六位老师共同制作完成，全书框架结构安排、统稿、定稿由王岳承担。编者邀请山东大学张天德教授和济南职业学院的季桂林教授对全书进行了审稿。从编写之初的框架制定到最后的审稿结束，整个过程中两位教授提出了很多宝贵意见。本书在编写过程中还得到了学院领导和部分专业教师及企业专家的大力支持，在此一并表示衷心地感谢。

本书虽经多次修改、不断推敲，但由于编者水平有限，仍难免有疏漏和不妥之处，书中不当之处恳请同行教师和读者不吝赐教、批评指正。

编者

2021 年 7 月

目　录

第1章 函数、极限和连续

迄今为止，数学已有数千年的历史，伴随着数学思想的发展，函数概念由模糊逐渐严密．初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量，也就是函数，函数是数学的基本概念之一．我国古代数学家刘徽的极限思想给出了一种研究变量的方法，在此基础上，极限的理论不断完善．极限是高等数学的重要概念之一，是微积分研究的基本工具，它贯穿于高等数学课程的始终，是建立微积分学的理论基础．连续性是函数的重要特性之一，它在刻画函数的性态中有着举足轻重的地位．本章我们将对函数概念进行复习和补充，学习如何利用极限思想研究函数，讨论函数的连续性．极限理论的学习与讨论，将为我们奠定学习高等数学的基础．

§1.1 函数

函数是微积分的研究对象，集合、区间和邻域可以给出函数中变量的研究范围．本节先复习中学阶段学习过的集合与区间的概念，再介绍邻域、函数及相关概念及函数的性质．

1.1.1 集合、区间和邻域

1. 集合

在中学阶段，我们了解过集合的概念．一般来说，由一些确定的不同的研究对象构成的整体称为**集合**．构成集合的对象，称为集合的**元素**．

集合一般用大写英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示，集合中的元素用小写英文字母 $a, b, c, \cdots$ 表示，若 a 是集合 M 中的元素，则记为 $a \in M$ ．

构成集合的元素具有三个性质：确定性、无异性、无序性．

高等数学中常用数集及其记法如下：

（1）全体非负整数组成的集合称为非负整数集或自然数集，记为 $\mathbf{N}$ ．

（2）全体整数组成的集合称为整数集，记为 $\mathbf{Z}$ ．

（3）全体正整数组成的集合称为正整数集，记为 $\mathbf{Z}^+$ 或 $\mathbf{N}^+$ ．

（4）全体有理数组成的集合称为有理数集，记为 $\mathbf{Q}$ ．

（5）全体实数组成的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}$ ．

2. 区间

通俗地讲，**区间**就是介于两实数 a 与 b 之间的一切实数的集合，其中 a,b 称为区间的两个端点，当 $a<b$ 时，则称 a 为左端点，b 为右端点．

区间可理解为实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，可分为有限区间和无限区间．

（1）**有限区间**：设 $a, b\in \mathbf{R}$ 且 $a<b$

闭区间：若 $A=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，则集合 A 称为以 a,b 为端点的闭区间，记为$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

开区间：若 $A=\{x\,|\,a<x<b\}$，则集合 A 称为以 a,b 为端点的开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

左半开区间：若 $A=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$，则集合 A 称为以 a,b 为端点的左半开区间，记为 $(a,b]$，即

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}.$$

右半开区间：若 $A=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，则集合 A 称为以 a,b 为端点的右半开区间，记为 $[a,b)$，即

$$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}.$$

（2）**无限区间**

无限区间是指 a 与 b 两端点中至少有一个端点是正无穷大或负无穷大．为了表示正无穷大或负无穷大，我们引入记号“$+\infty$”表示正无穷大，“$-\infty$”表示负无穷大，则无限区间可分为

$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$；　　$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$；

$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$；　　$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$．

以后在不需要辨明所讨论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，我们就简单地称它为“区间”，且常用“I”表示．

3. 邻域

由于有时需要讨论函数在一点附近的变化情况，为了描述某一点附近的点所组成的集合，下面我们介绍一下邻域的概念．

学习笔记	视频
	邻域的概念

定义 1.1　设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，数集 $\{x\,||x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$，即实数轴上到点 a 的距离小于定长 δ 的点的全体，称为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$．点 a 与数 δ 分别称为这个邻域的**中心**与**半径**．如图 1.1 所示．

$$U(a,\delta)=\{x\,||x-a|<\delta,x\in R\}=(a-\delta,a+\delta).$$

当泛指某个邻域时，也可以简单地记作 $U(a)$，它表示以点 a 为中心的任何开区间．

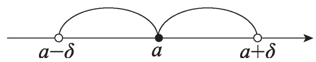


图 1.1

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉．点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 的空心（去心）δ 邻域**，记作 $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$．如图 1.2 所示．

$$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

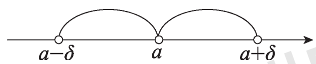


图 1.2

1.1.2　函数的概念

在自然现象或生产过程中，同时出现的某些变量，往往存在着相互依赖、相互制约的关系，其中，有的变量间的关系在数学上称为函数．

1. 函数的定义

定义 1.2　设 x 和 y 是两个变量，D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，对于任意 $x\in D$，变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，数集 $\{f(x)\,|\,x\in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域．当 $x=x_0$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$．

由函数的定义可以看出，确定**函数有两个要素：定义域和对应法则**．所以，两个函数相同的充分必要条件是两函数的定义域和对应法则均相同．

在实际问题的应用中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定．在数学的研究学习中，有时候不需要考虑函数的实际意义，对于用解析式表示的函数，定义域就是使解析式有意义的自变量的全体．例如，函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为（$-1,1$）．

例 1　判断下列函数是否表示相同的函数关系．

（1）函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 和 $y=x$；

（2）函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$．

解：（1）因为函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，而函数 $y=x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，它们的定义域不同，所以说函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$ 不同.

（2）函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $x\in\mathbf{R}$，而 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，因此函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 有相同的定义域和对应法则，所以说函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示相同的函数关系.

例 2　求函数 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$ 的定义域.

解：根据对数的真数必须为正数，分数的分母不能为零，可以得到该函数的自变量应满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-1\neq 0. \end{cases}$$

解得

$$x>-1 \text{ 且 } x\neq 1,$$

即

$$D=(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

牛刀小试

1.1.1　求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

2. 函数的表示法

表示一个函数通常有三种方法：表格法、图像法和公式法.

（1）**表格法**：就是用表格来表达函数关系．这种方法的优点是查找函数值比较方便，缺点是数据有限、不直观，不便于确定自变量和因变量的对应关系.

例如，某公司 2021 年上半年某产品的销量（单位：个）如表 1.1 所示.

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 y	1900	1850	2000	1950	1920	1890

（2）**图像法**：就是用图像来表达函数关系．这种方法直观性强，并可观察函数的变化趋势．但根据函数图形所求出的函数值一般准确度不高，且不便于研究两变量之间的关系.

例如，某海域昼夜水温 T 和时间 t 是两个变量，通过自动温度记录仪可以描绘出一条曲线，如图 1.3 所示.

这个图形表示了气温 T 和时间 t 之间的函数关系.

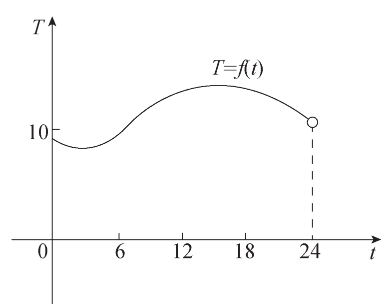


图 1.3

再如，股票曲线反映股票当天的价格随时间的变化波动情况，该曲线是以时间为自变量，以价格为函数的函数图像．

（3）**公式法**：就是用数学表达式表示函数关系．例如 $y=(1+x)^2$，这种方法的优点是形式简明，便于作理论研究与数值计算，缺点是不够直观．

在用公式法表示的函数中，有以下两种需要指明的情形．

①**分段函数**：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数．

例如，绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

电学中的常用函数：单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases} 1, & t\geqslant 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$

例 3　求分段函数 $f(x)$ 的定义域和值域．

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0<x<1, \\ 0, & x=0, \\ -x-1, & -1\leqslant x<0. \end{cases}$$

解：如图 1.4 所示，$f(x)$ 的定义域为

$$D=\{x|-1\leqslant x<1\};$$

其值域为　$Z=\{f(x)|-1<f(x)<1\}$．

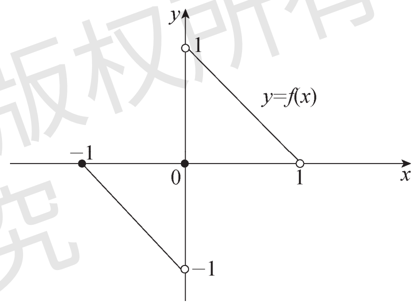


图 1.4

函数由解析式给出时，其定义域是使解析式有意义的一切自变量的值．为此，求函数的定义域时应遵守以下原则：

- 分式中分母不能为零；
- 偶次根式的被开方数非负；
- 对数函数中真数部分大于零；
- 反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$；
- 多个函数和、差、积、商后所形成的函数的定义域，应是这几个函数定义域的交集；
- 分段函数的定义域是各段定义域的并集．

②**显函数与隐函数**：若因变量 y 用自变量 x 的解析式直接表示出来，即等号一端只有 y，而另一端是 x 的表达式，这样的函数称为**显函数**．例如，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\ln(x+1)$ 都是显函数．

若两个变量 x 与 y 之间的函数关系用方程 $F(x,y)=0$ 来表示，则称为**隐函数**．我们称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数．例如 $3x+y-1=0$，$e^{x+y}-xy=0$ 都是隐函数．

有的隐函数，可以从关系式 $F(x,y)=0$ 中解出 y 来，则表示为显函数．例如，由 $3x+y-1=0$ 解出 y，得显函数 $y=-3x+1$，把一个隐函数化成显函数的过程，称为“**隐函**

数的显化”．而多数隐函数却不能从关系式 $F(x,y)=0$ 中解出 y，因此不能表示为显函数，例如，$e^{x+y}-xy=0$．

3. 反函数

很多问题都有相应的反问题，对函数 $y=f(x)$ 来说，给定自变量 x 的值去求因变量 y 的值很容易，直接将 x 的值代入函数表达式即可．但有时实际问题中可能遇到已知函数 y 的值，而要求自变量 x 的对应取值．为了方便研究，我们引入反函数的概念．

定义 1.3　设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 Z，如果对于 Z 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 Z 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，我们称之为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$．习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$．

对于函数而言，**单调函数一定有反函数，而且单调增加（减少）函数的反函数也是单调增加（减少）的．**若从几何图形看，一个函数当且仅当它的图形与任意一条水平直线至多相交一次时，才具有反函数．如果函数在其定义域内不是单调的，则它没有反函数．此时，我们可以限制自变量的取值范围，使得在这个范围内，函数具有单调性，从而求得此范围内的反函数．例如，对于 $y=x^2$，在定义域内不单调，所以没有反函数．但如果限制 $x\in[0,+\infty)$，则可得到反函数 $y=\sqrt{x}$；若限制 $x\in(-\infty,0]$，则可得到反函数 $y=-\sqrt{x}$．

在同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称．

由反函数的定义我们可以发现，函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，且 $f^{-1}\left[f(x)\right]=x$，$f\left[f^{-1}(y)\right]=y$．

例 4　求 $y=2^{x-1}$ 的反函数．

解：由 $y=2^{x-1}$ 解得 $x=1+\log_2 y$，然后交换 x 和 y，得 $y=1+\log_2 x$．即 $y=1+\log_2 x$ 是 $y=2^{x-1}$ 的反函数．

1.1.3　函数的特性

下面所讨论的函数的定义域都假设为 D．

1. 奇偶性

如果函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；若对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**．

关于函数的奇偶性，有以下结论：

（1）偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称．

（2）判断一个函数是奇函数还是偶函数，首先要看它的定义域是否关于原点对称，然后再来判断它的奇偶性．

（3）奇（偶）函数的**运算性质**：

①奇函数的代数和仍是奇函数，偶函数的代数和仍是偶函数．

②奇数个奇函数的乘积是奇函数，偶数个奇函数的乘积是偶函数．

③偶函数与偶函数的乘积仍是偶函数，奇函数与偶函数的乘积是奇函数．

④奇函数和奇函数的复合是奇函数，奇函数与偶函数的复合是偶函数，偶函数与偶函数的复合是偶函数．

例 5　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；　　（2）$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$．

解：（1）函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D$ 关于原点对称．任意取 $x\in D$，则 $-x\in D$ 有

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数．

（2）函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 的定义域为 $D=(-1,1)$，D 关于原点对称．任意取 $x\in D$，则 $-x\in D$，有

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数．

2. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内随 x 的增大而增大，即对于 I 内的任意两点 $x_1,x_2\in I$，且当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的；反之，当 $x_2<x_1$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的．

例如，$f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 是单调增加的；$f(x)=x^2+1$ 在区间 $[0,+\infty)$ 是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 是单调减少的．可见，函数的单调性一定要针对某个区间而言，同一函数在不同区间上的单调性有可能是不同的．

3. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为函数的周期．通常我们所说的周期函数的周期 T 是指满足上述条件的最小正周期．

例如：$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π

为周期的周期函数.

关于函数的周期性，我们有以下结论：

（1）若函数的周期为 T，则在每个长度为 T 的相邻区间上函数图象有相同形状.

（2）若函数的周期为 T，则 $nT(n\in \mathbf{Z})$ 也是函数的周期.

（3）若 $f(x)$ 的周期为 T，则函数 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$，（$a,b\in \mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$）.

牛刀小试

1.1.2　求函数 $y=\cos(2x-3)$ 的周期.

4. 有界性

对于函数 $f(x)$，若存在正常数 M，在区间 $I\subseteq D$ 内，对任意 $x\in I$，对应的函数值均有 $|f(x)|\leqslant M$ (可以没有等号)，则称 $f(x)$ 在区间 I 内**有界**；如果不存在这样的正常数 M，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**无界**.

例如，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界；$y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，但在 $[-1,2]$ 上有界. 与单调性类似，函数的有界性也必须针对相应的区间而言，同一函数在不同区间上的有界性也可能不同.

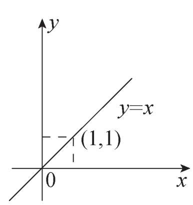
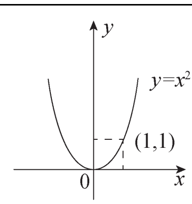
常见的在整个定义域上有界的函数有 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$ 等.

1.1.4　初等函数

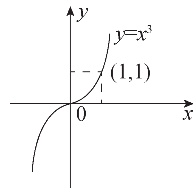
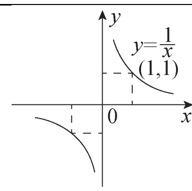
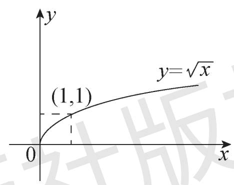
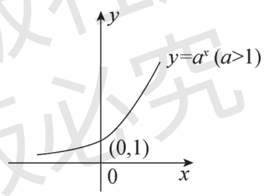
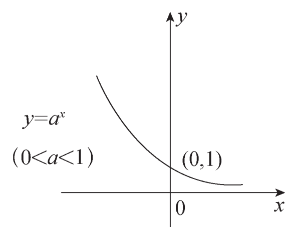
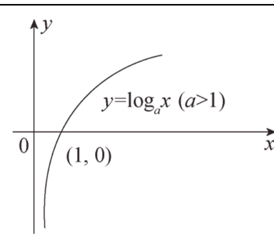
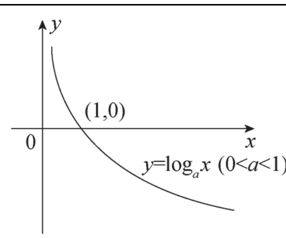
1. 基本初等函数

我们通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的图像、性质如表 1.2 所示.

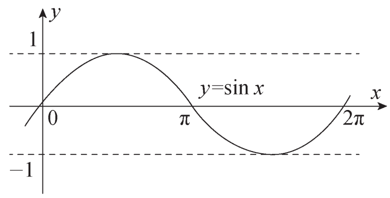
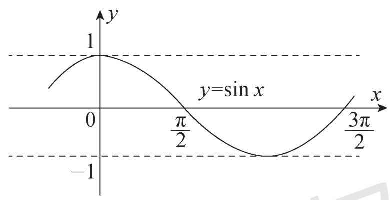
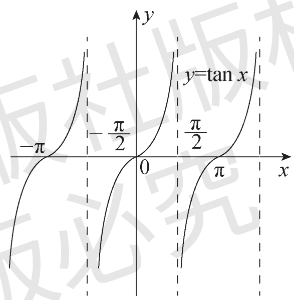
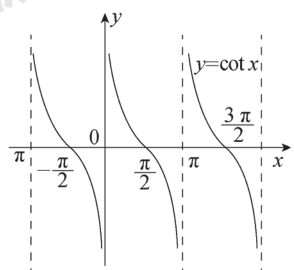
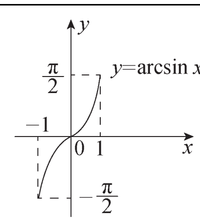
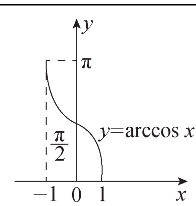
表 1.2

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加

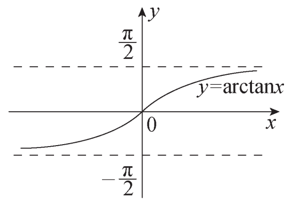
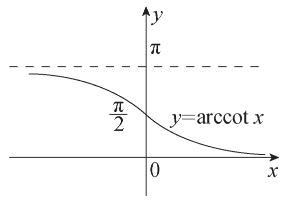
续表

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少

续表

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[-1, 1]$		奇函数，周期 2π，有界，在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$内单调增加，在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty, +\infty)$ $y\in[-1, 1]$		偶函数，周期2π，有界，在 $[2k\pi, 2k\pi+\pi]$ 内单调减少，在$[2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi]$内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty, +\infty)$		奇函数，周期 π，在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty, +\infty)$		奇函数，周期 π，在$(k\pi, k\pi+\pi)$内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1, 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1, 1]$ $y\in[0, \pi]$		减调减少，有界

续表

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

学习笔记	视频
	正弦函数和余弦函数　常数函数和幂函数 指数函数和对数函数(1)　指数函数和对数函数(2)

三角函数中还有正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$，其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，且 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$， $\csc^2 x=\cot^2 x+1$.

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y=\sin u$， $u=x^2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $u=x^2\in[0,+\infty)$，又通过 $y=\sin u$，得到 $y=\sin x^2\in[-1,1]$，即通过中间变量 u，从而构成 y 是 x 的函数，于是称 $y=\sin x^2$ 是 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 的复合函数．由此我们看到，通过复合的方法可以产生一个新函数．这类函数是我们在今后的学习中经常遇到的，下面给出复合函数的定义．

定义 1.4　设有两个函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空，那么 y 通过 u 的作用成为 x 的函数，于是我们称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，u 称为中间变量．

实际问题中，经常出现复合函数．例如，做自由落体运动的物体，其动能 $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ 及速度 $v=gt$，于是它们所构成的复合函数是 $E=\dfrac{1}{2}mg^2t^2$．

学习笔记	视频
	复合函数的定义

例 6 设 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$．

解： 由复合函数的定义可知

$$f[\varphi(x)]=(\sin 2x)^3-\sin 2x,$$

$$\varphi[f(x)]=\sin 2(x^3-x).$$

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 求：$f(-1)$，$f(0)$ 及 $f[f(-1)]$．

解： $f(-1)=2\times(-1)+3=1$，

$f(0)=2\times 0+3=3$，

$f[f(-1)]=f(1)=2^1=2$．

例 8 下列复合函数是由哪些基本初等函数或简单初等函数复合而成的？

（1）$y=\arcsin(\ln x)$；

（2）$y=\sin^2(3x+1)$；

（3）$y=\ln(\tan \mathrm{e}^{x^2+2\sin x})$．

例 8 讲解

解：（1）外层是反正弦函数，即 $y=\arcsin u$，内层是对数函数，即 $u=\ln x$．所以 $y=\arcsin(\ln x)$ 是由 $y=\arcsin u$、$u=\ln x$ 复合而成的．

（2）最外层是幂函数，即 $y=u^2$，从外向里第二层是正弦函数，即 $u=\sin v$，最内层是多项式函数，即 $v=3x+1$．所以 $y=\sin^2(3x+1)$ 是由 $y=u^2$、$u=\sin v$、$v=3x+1$ 复合而成的．

（3）最外层是对数函数，即 $y=\ln u$，次外层是正切函数，即 $u=\tan v$，从外向里第三层是指数函数，即 $v=\mathrm{e}^w$，最里层是简单初等函数，即 $w=x^2+2\sin x$．所以，$y=\ln(\tan \mathrm{e}^{x^2+2\sin x})$ 是由 $y=\ln u$、$u=\tan v$、$v=\mathrm{e}^w$、$w=x^2+2\sin x$ 复合而成的．

需要注意的是：

（1）并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数．如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 在实数范围内就不能进行复合．这是因为 $u=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 的值对应的 u 值都小于 2，它们都不能使 $y=\sqrt{u-2}$ 有意义．因此，两函数 $y=f(u),u=\varphi(x)$ 能**复合的充要条件是：内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与外函数 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空．**

（2）复合函数的复合过程是由内到外，函数“套”函数而成的；分解复合函数时，是采取由外到内、层层分解的办法，将复合函数拆分成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算的函数（**简单初等函数**）．

3. 初等函数

定义 1.5　由常数和基本初等函数经过**有限次**的四则运算和复合构成的且能用**一个**式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=2x^2-1$，$y=\sin\dfrac{1}{x}$，$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 及前面我们见过的很多函数都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数.

但需要注意的是，分段函数一般不是初等函数.

函数 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$ 也不是初等函数.

习题 1.1

1. 用区间表示满足下列不等式的集合：

（1）$|x-1|\leqslant 3$；　（2）$|x-2|\geqslant 3$；　（3）$x^2-2x-3<0$.

2. 点 a 的空心邻域与点 a 的邻域有何区别？

习题 1.1 第 2 题讲解

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}$；　（2）$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\arccos\dfrac{1}{x}$；　（4）$f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<2,\\ (x-2)^2, & 2\leqslant x<3.\end{cases}$

4. 求下列函数的值：

（1）设 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x^2}$，求：$f(0)$，$f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$，$f[f(0)]$；

（2）设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x-4, & x>0,\end{cases}$ 求：$f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f[f(\mathrm{e}+2)]$.

5. 下列函数是否相同，为什么？

（1）$f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

（2）$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

6. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=\sin^2 x\cos x$；　（2）$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

7. 设 $f(x)=1-x^2$，$\varphi(x)=\cos x$，求：$f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

8. 写出下列各函数的复合过程：

（1）$y=\arctan x^2$；　（2）$y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$；

8（1）讲解

（3）$y=(1+\ln x)^3$；　　　　　　　　（4）$y=\ln\sqrt{x+\sin x}$.

§1.2　函数的极限

通过函数一节的学习，大家已经熟悉了函数的概念和函数值的计算问题．但是，在客观世界中，还有大量问题需要我们研究当自变量无限接近某个常数或某个“目标”时，函数是否无限趋近于某一确定的值．这就需要极限的概念和方法．

函数概念刻画了变量之间的关系，而极限概念着重刻画变量的变化趋势．极限是学习微积分的基础和工具．

1.2.1　数列的极限

因为无穷数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$ 可以看作自变量为正整数 n 的函数 $f(n)$，其中 $f(n)=x_n$，因此，数列的极限是一类特殊函数的极限，为了便于学习函数极限，我们先通过引例来研究数列的极限．

1. 极限的探究

思政之窗

引例：圆面积的计算方法

早期在很长一段时间里，人们一直试图采用各种方法去近似计算圆的面积．我国古代魏晋时期的数学家刘徽在著《九章算术》时，提出了“割圆术”的方法，即用圆的内接或外切多边形穷竭的方法求圆面积和圆周长．

数列的极限及引例

求圆面积的方法为：如图 1.5 所示，先作圆的内接正三边形，把它的面积记为 A_1，再作圆的内接正六边形，其面积记为 A_2，再作圆的内接正十二边形，其面积记为 A_3，…，照此下去，把圆的内接正 $3\times2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n，从而得到一数列 A_1，A_2，A_3，…，A_n，…．

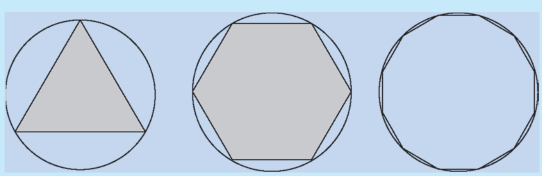


图 1.5

从图形上不难看出，随着圆内接正多边形边数的增加，圆内接正多边形的面积与圆的面积越来越接近．可以想象：当边数 n 无限增大时，内接正 $3\times2^{n-1}$ 边形的面积 A_n 会无

限接近圆的面积 A．刘徽称“割之弥细，所失弥少，割之弥割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”．“割圆术”反映了古人初步的极限思想．它通过不断倍增圆内接正多边形的边数求出圆周率的方法，为计算圆周率建立了严密的理论和完善的算法．

数学发展到南北朝时期，我国数学家祖冲之在刘徽“割圆术”的基础上进行了深入研究，求出的圆周率精确到了小数点后 7 位，为世界数学史和文明史做出了伟大的贡献．这两位古代数学家是我们中华民族的骄傲！

2. 数列极限的定义

结合上述引例，为刻画随着项数的增大，数列的值无限趋近于某个常数的这种变化趋势，下面引入数列极限的概念．

定义 1.6　对于数列 $\{x_n\}$，若当项数 n 无限增大时，数列中的项 x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A\ (n\to\infty).$$

其中上式中的“$\to$”读作“趋于”．若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 是**收敛**的；若数列 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 是**发散**的．

例 1　观察下列数列是否有极限：

例 1 讲解

（1）$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$；

（2）$2, 2, 2, \cdots, 2, \cdots$；

（3）$2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots$；

（4）$1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{4},\cdots,1,\frac{1}{2n},\cdots$；

（5）$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$；

（6）$2,\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\ \cdots$．

解：（1）随着 n 的无限增大，该数列的通项 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$．

（2）随着 n 的无限增大，该数列的通项 x_n 恒等于 2，所以该数列的极限为 2．

（3）随着 n 的无限增大，该数列的通项 $x_n=2n$ 无限增大，不能无限接近一个常数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}2n$ 不存在．这种数列虽然没有极限，但有确定的变化趋势，我们可以借用极限记法表示它的变化趋势．记作

$$\lim_{n\to\infty}2n=+\infty.$$

（4）该数列中，随着 n 的无限增大，奇数项恒等于 1，而偶数项无限趋近于 0，因此通项 x_n 不可能无限趋近于一个常数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在．

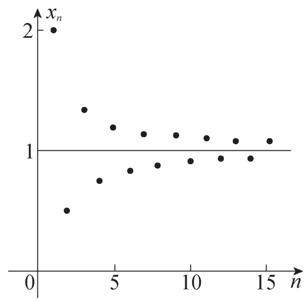


图 1.6

（5）该数列中，$x_{2n-1}\equiv -1, x_{2n}\equiv 1$．随着 n 的无限增大，奇数项 x_{2n-1} 恒等于 -1，而偶数项 x_{2n} 恒等于 1，因此通项 x_n 不可能无限趋近于一个常数，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在．

（6）随着 n 的无限增大，如图 1.6 所示，该数列的通项 $x_n=1+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 无限趋近于 1，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]=1.$$

例 2 观察下列数列的变化趋势，根据定义写出它们的极限：

（1）$x_n=3+\dfrac{1}{n^2}$；（2）$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$；

（3）$x_n=\sqrt[n]{4}$；（4）$x_n=\dfrac{1}{2}$．

解： 根据数列极限的定义，容易看出

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)=3$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{3^n}=0$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=1$；（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$．

还有若干重要极限，我们列举如下：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0\quad(|q|<1)$；

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>1)$；（4）$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）．

思政之窗

我国战国时期的哲学家周庄在他所著的《庄子·天下篇》中有这样一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭．”意思是：一根一尺长的木棒，每天截去其长度的一半，总会剩下一半，再截去剩下的这一半的一半，…，如此这样，可以无限地截下去．这句话体现出我国古代人民对无穷的认识水平，我国人民很早就创造性地将极限思想运用到数学之中，对极限思想的提出比西方早了 500 多年，我国古代数学所取得的成就是无比辉煌、伟大的．

1.2.2　函数的极限

在各类工程和社会生活中，我们常需要考虑如下问题：物体温度的变化趋势，某一种群数量的变化趋势等，而这些现象都涉及函数的极限问题．

前面我们给出了定义于正整数集合上的特殊函数“数列”的极限，现在我们沿着数列极限的思路，讨论定义于实数集合上的函数 $y=f(x)$ 的极限．根据自变量不同的变化趋势，

分别给出函数极限的定义.

1. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

引例 1　水温的变化趋势

将一盆 90℃的热水放在一间室温恒为 20℃的房间里，水温 T 将逐渐降低，随着时间 t 的无限推移（$t \to \infty$），水温 T 会越来越接近室温 20℃（$T \to 20$）.

引例 2　自然保护区中动物数量的变化规律

我国为保护野生动物，在某地建立了一个自然保护区，在这个保护区内生长着一群野生动物．起初，该自然保护区内的动物群体数量 N 会逐渐增长，但随着时间 t 的无限推移，由于自然保护区内各种资源的限制，这一动物群体数量 N 不可能无限地增大，它应达到某一种相对饱和的状态（例如，$N \to 1000$），如图 1.7 所示，所谓的饱和状态是指当时间 $t \to \infty$ 时，最终野生动物的数量 N 基本趋近于某个常数.

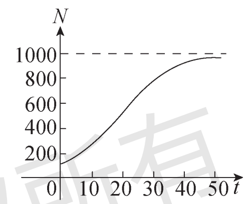


图 1.7

这两个问题都有一个共同的特征：当自变量无限增大时，相应的函数值趋近于某一常数.

自变量 x 趋向无穷大，可以分为以下三种情形：

（1）$x \to +\infty$，它表示 x 趋向于正无穷大，即 $x>0$，且 x 无限增大的过程.

（2）$x \to -\infty$，它表示 x 趋向于负无穷大，即 $x<0$，且 $-x$ 无限增大的过程.

（3）$x \to \infty$，它表示 x 趋向于无穷大，即 x 既取正值又取负值，且 $|x|$ 无限增大的过程.

我们先考察在自变量 $x \to \infty$ 时，反比例函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化情况．如图 1.8 所示，由图像可以看出，x 轴是该曲线的一条渐近线，也就是说当自变量 x 的绝对值无限增大时，相应的函数值 y 无限趋近于常数 0，我们就说：当 $x \to \infty$ 时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0.

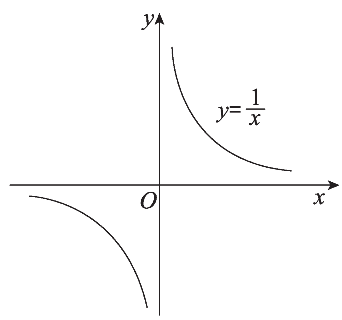


图 1.8

由此我们给出 $x \to \infty$ 时，函数极限的定义.

定义 1.7　设有常数 $M>0$，当 $|x|>M$ 时，函数 $f(x)$ 有定义，当自变量的绝对值 $|x|$ 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to \infty).$$

根据定义 1.7 可知，当 $x \to \infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限是 0，可记为

$$\lim_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0.$$

例 1 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{3x+1}{x}$ 的极限 .

解： 由于 $\dfrac{3x+1}{x}=3+\dfrac{1}{x}$，且当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$3+\dfrac{1}{x}\to 3$，因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x}=3 .$$

例 2 讨论当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限.

解： 由 $f(x)=\sin x$ 的图像（见图 1.9）和周期性可得：当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的值在−1 和+1 之间无休止地来回摆动，不趋向任何定数，即该函数当 $x\to\infty$ 时没有极限.

下面我们再来研究 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时函数的变化趋势．我们考察反正切函数 $f(x)=\arctan x$ 的图像，如图 1.10 所示.

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限趋近于常数 $\dfrac{\pi}{2}$；而当 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\arctan x$ 的值无限趋近于常数 $-\dfrac{\pi}{2}$．对于函数的这种变化趋势，我们给出如下的定义.

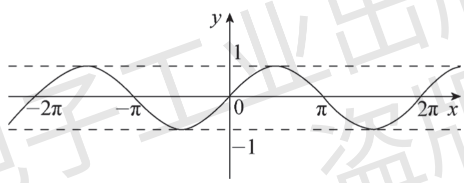


图 1.9

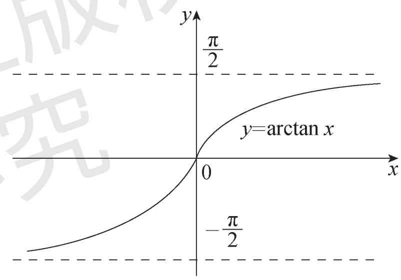


图 1.10

定义 1.8 设有常数 $M>0$，函数 $f(x)$ 在 $x>M$（或 $-x>M$）上有定义，当 x（或 $-x$）无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时 $f(x)$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad（或 \lim_{x\to-\infty}f(x)=A），$$

也可记为

$$f(x)\to A\ (x\to+\infty)\quad（或 f(x)\to A\ (x\to-\infty)）.$$

根据定义 1.8，可得：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

思政之窗

极限是微积分学的重要研究工具，描述的是运动变化的过程．极限思想是用辩证的思想研究问题，函数极限存在的思想精髓就是在自变量的某一变化过程中，函数最终能无限逼近一个确定的值．这个极限值正如我们最初树立的理想和目标，我们在成长之路上，应该不忘初心，砥砺前行，永不停息，方得始终.

牛刀小试

1.2.1　考察当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时，$y=e^x$ 的极限.

由 $x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限定义，我们可以得到下面的重要定理.

定理 1.1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

通过这个定理，对于有些函数 $f(x)$，我们可以通过分别求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 的极限，来判断 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 的极限是否存在，若存在，结果是多少.

例 3　讨论当 $x\to\infty$ 时，下列函数的极限：

（1）$f(x)=2^{-x}$.　　　　（2）$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

解：（1）因为 $f(x)=2^{-x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，

当 $x\to+\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\to0$；当 $x\to-\infty$ 时，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\to+\infty$.

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^{-x}$ 不存在.

因此，由定理 1.1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}$ 不存在.

（2）因为当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to0$；当 $x\to-\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to0$.

所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

因此，由定理 1.1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

自变量 x 变化的另一种重要形式是 x 无限趋近于某个定点 x_0，有时我们需要研究函数在自变量的这种变化过程中的函数的变化趋势．先看一个引例.

引例 3　人影长度

若一个人从 B 点沿着直线（BO）走向目标——路灯（OA）正下方的那一点 O，如图 1.11 所示．由常识我们知道，此人越靠近目标，其影子长度 y 越短，当人越来越接近目标（$x\to0$）时，其影子长度也趋近于 0（$y\to0$）.

由图中的比例关系，可以得到：$\dfrac{y}{x}=\dfrac{h}{H-h}$，即 $y=\dfrac{xh}{H-h}$，由函数关系也可以看出，当 $x\to0$ 时，其影子长度 $y\to0$.

此例中，当自变量无限趋近于某个定点时，函数无限趋近于某个确定的值.

自变量 x 趋向定点 x_0，可以分为以下三种情形：

（1）$x\to x_0^-$，它表示 $x<x_0$，且 x 从左侧趋向于 x_0；

（2）$x \to x_0^+$，它表示$x > x_0$，且x从右侧趋向于x_0；

（3）$x \to x_0$，它表示$x \to x_0^-$和$x \to x_0^+$同时发生，即x从左、右两侧同时趋向于x_0.

在自变量x的上述三种变化过程中，x**无限趋近于**x_0，**但并不等于**x_0.

下面我们考察当$x \to 1$时，函数$f(x) = x+1$的变化情况，如图 1.12 所示．由图可以看出，当x从定点 1 的左、右两侧同时趋近于 1 时，函数$f(x) = x+1$的值沿着直线无限趋近于常数2，对于函数的这种变化趋势，有下面的定义．

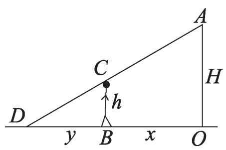


图 1.11

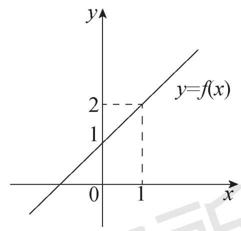


图 1.12

定义 1.9 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义，当自变量x在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内与x_0无限接近时，相应的函数的值无限趋近于某个常数A（见图 1.13），则称A为$x \to x_0$时，函数$f(x)$的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (x \to x_0).$$

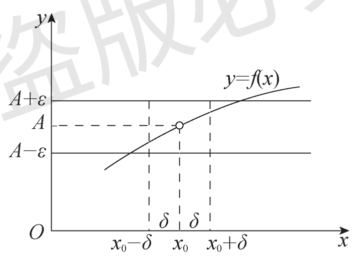


图 1.13

根据定义 1.9，上面的极限可记为：$\lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$.

由极限的定义，显然有（1）$\lim\limits_{x \to x_0} C = C$（$C$为常数）；　（2）$\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

思政之窗

我们高职数学教材上呈现的极限的定义，虽是描述性的定义，不是严格的数学定义，但它准确地反映了极限所描述的过程和研究的内容，它是成熟的，也是经过历史打磨的，还是可以作为知识传播的.

极限定义的产生过程相当之长，无论是从我国古代《庄子·天下篇》中的极限思想“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，还是从古希腊哲学家对于“不可再分”这一想法的不断思考开始，一直到如今标准的极限定义（严格的数学定义），整个过程的时间跨度

有两千多年．在这两千多年里，有无数的数学天才在为“极限”这一思想贡献智慧，这简练的、短短几行的极限定义是千百年来无数思想家和数学家智慧的结晶，蕴藏着巨大的力量，而数学家们的求知、求真、努力、创新、坚持……这一系列亘古不变的美好品质就是这力量的源泉．

微积分就是从“无限细分”这样朴素的想法发展为准确的极限定义的，然后依靠这个定义撑起了微积分的学科体系．极限的定义就像一颗种子，虽然很小，但蕴含的内容足以成长成微积分整个学科体系这棵参天大树．极限概念的学习，让我们体会到支撑我们走向强大的力量，往往是看似渺小却内含巨大能量的事物．它虽然微小或简单，但却精练、蕴含能量，让我们走得远、走得久、走成坚不可摧的体系．

例 4　讨论当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限．

解： 如图 1.14 所示，该函数图像与 $g(x)=x+1$ 的不同之处，就在于函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处没有定义．由于在 $x \to 1$ 的变化过程中 $x \neq 1$，因此

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1 .$$

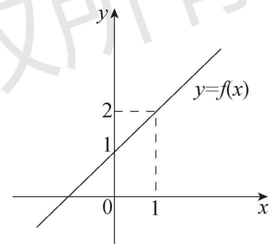
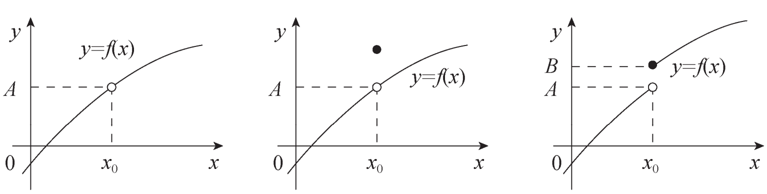


图 1.14

所以，当 $x \to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的对应值也趋近于常数 2，即 $f(x)$ 以 2 为极限．记作

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x+1)=2 .$$

由上面的两个例子可以看出，在定义 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可以有定义，也可以没有定义；**$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 是否存在，与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有没有定义及有定义时其值是多少都毫无关系．** 如图 1.15 所示，图(a)中，$y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处没有定义．图(b)中，$y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处虽然有定义，但值不为 A．这两个图中，当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都为 A．在图(c)中，在 $x=x_0$ 点左右两侧函数 $f(x)$ 变化趋势不一致，因此当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在．



(a)　(b)　(c)

图 1.15

由前面例 2 我们可以得出：当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限不存在．下面我们探讨一下当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限．

例 5　讨论当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限．

解： 由 $f(x)=\sin x$ 的图像（见图 1.9）可得：当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的值从原点的左右两侧无限趋近于零，因此，当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\sin x$ 的极限为零，即 $\lim\limits_{x \to 0}\sin x = 0$．

同理，我们还可以求得 $\lim\limits_{x \to 0}\cos x = 1$， $\lim\limits_{x \to 0}\tan x = 0$．

有些函数在其定义域上的某些点，左侧与右侧所用的解析式不同（如分段函数的分段点），或函数仅在某一点的一侧有定义（如在其有定义的区间端点上），这时，函数在这样的点上的极限问题只能单侧地加以讨论．

由此，我们给出当 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时，函数**单侧极限**的定义．

定义 1.10　设在 x_0 的某个左半邻域（$x_0-\delta, x_0$）（或者右半邻域（$x_0, x_0+\delta$））内函数 $f(x)$ 有定义，且当自变量 x 在此半邻域内与 x_0 无限接近时，相应的函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**（或**右极限**），记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \left(\text{或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A\right).$$

定理 1.2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$．

由定义 1.10 及定理 1.2 得，图 1.15(c)中，$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = B$，但由于 $A \neq B$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在．因此，定理 1.2 给出了通过求某点处的左、右极限来讨论该点极限是否存在的方法．尤其是对于分段点左右两侧函数表达式不同的分段函数，讨论分段点的极限时，此定理有广泛的应用．

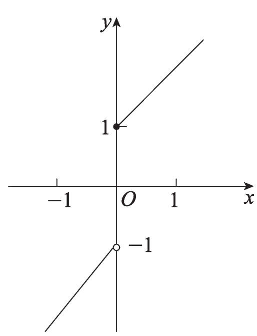


图 1.16

例 6　设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ x+1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 讨论 $x \to 0$ 时的极限．

解： 因为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x-1) = -1,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(x+1) = 1,$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$．（如图 1.16 所示）

由定理 1.2 可知，极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在．

例 7　设函数 $f(x)=\begin{cases} \cos x + a, & x \leqslant 0, \\ 2x-3, & x>0, \end{cases}$ 且 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 存在，求 a 的值．

解：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(\cos x + a) = 1 + a;$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(2x-3) = -3.$$

由定理 1.2 可知，因为 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$存在，所以 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，

即 $1+a=-3$，所以 $a=-4$.

牛 刀 小 试

1.2.2　设函数 $f(x)=|x|$，画出它的图像，并讨论：当 $x\to 0$ 时，该函数在 $x=0$ 处的极限是否存在.

习题 1.2

1. 通过观察下列数列的变化趋势，对收敛数列写出它们的极限：

（1）$x_n=\dfrac{2}{n^2}$；　　（2）$x_n=\dfrac{n-(-1)^n}{n}$；

（3）$x_n=\dfrac{3}{3^n}$；　　（4）$x_n=(-1)^n n$.

2. 写出下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$；

（3）$\lim\limits_{x\to e}\ln x$；　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}$.

3. （1）设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x>0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

（2）设函数 $h(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \cos x, & x>0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)$；$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)$；$\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

3（2）题讲解

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

5. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，讨论 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

6. 单项选择题：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义是它在该点处存在极限的（　　）.

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 的值（　　）.

A. 等于−1　　B. 等于 1

C. 等于 ∞　　D. 不存在

§1.3　无穷小与无穷大

在自变量的一定变化趋势下（如 $x \to \infty, x \to x_0$），函数 $f(x)$ 的极限可能存在，也可能不存在，其中有两种特殊的情况：一种是函数的绝对值“无限变小”；一种是函数的绝对值“无限变大”．下面就这两种特殊情况加以研究．

1.3.1　无穷小

1. 无穷小的定义

在实际问题中，我们常会遇到一些变量，它们的变化趋势无限趋近于零．比如，在用刘徽的“割圆术”求圆面积的过程中，当边数无限增大时，圆面积与内接正多边形面积之差无限趋近于零．又如，单摆离开铅直位置而摆动，由于空气阻力和机械摩擦力的作用，它的振幅随着时间的增加而逐渐减少，并无限趋近于零．为了方便研究这类变量，我们给出如下定义．

定义 1.11　在自变量的某个变化过程中，极限为零的变量称为**无穷小（量）**．

由定义可知当 $x \to 0$ 时，x、$\tan x$ 等都是无穷小；当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{1}{x^2}$ 等也是无穷小．

注：（1）零是唯一可以看作是无穷小的常数．

（2）一般来说，无穷小是相对于自变量的某个变化过程而言的．

例如 $\dfrac{1}{x}$，当 $x \to \infty$ 时，它为无穷小，但当 $x \to 1$ 时，它不是无穷小．

思政之窗

无穷小量是一个无限变小、逐渐消失的量，它虽是一个比较抽象的概念，但却是能被我们感受到的．唐代诗仙李白的千古名诗《送孟浩然之广陵》中就有它的体现．“孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流．”诗中这后两句的景物描写，淋漓尽致地刻画了数学中“无穷小量”的美妙意境．长江之中的“孤帆之影”是一个随时间变化而无限趋近于零的变量，正是一个无穷小量，淋漓尽致地刻画出友人渐渐消失在李白视线之外的场景，用数学之美体现了朋友间的依依不舍之情．在高等数学中，这样含蓄内敛而又精妙深奥的美无处不在．

例 1　自变量 x 在怎样的变化过程中，下列函数是无穷小？

（1）$y=\dfrac{1}{2x-1}$；　　（2）$y=2x-4$；　　（3）$y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$．

解：（1）因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x-1}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2x-1}$ 是无穷小.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 2}(2x-4)=0$，所以当 $x\to 2$ 时，$2x-4$ 是无穷小.

（3）当 $a>1$ 时，当 $x\to-\infty$ 时，a^x 是无穷小.

当 $0<a<1$ 时，当 $x\to+\infty$ 时，a^x 是无穷小.

牛刀小试

1.3.1 当 $x\to 0$ 时，下列哪个变量是无穷小？

（1）$\cos x$；（2）$\sin x$；（3）x^2+1；（4）e^x-1.

2. 极限与无穷小之间的关系

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，即 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，也就是 $f(x)-A$ 无限趋近于常数 0，设 $f(x)-A=\alpha(x)$，则当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 为无穷小且 $f(x)=A+\alpha(x)$. 由此有：

定理 1.3 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小.

例如，因 $f(x)=\dfrac{x+1}{x}=1+\dfrac{1}{x}$，而当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，即当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 可表示为常数 1 和无穷小 $\dfrac{1}{x}$ 之和，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1\Leftrightarrow\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}\quad（当\ x\to\infty\ 时，\frac{1}{x}\to 0）.$$

定理 1.3 说明了有极限的函数等于它的极限值与一个无穷小之和. 反之，如果函数可表示为一个常数与无穷小之和，则这个常数为该函数的极限. 同时，定理 1.3 把函数极限转化成了一个含有无穷小的函数关系式，从而使得我们可以借助无穷小的性质来研究函数.

注：定理 1.3 中自变量的变化过程换成其他任何一种情形，如 $x\to x_0^+, x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，结论仍成立.

3. 无穷小的性质

无穷小具有如下的性质：

性质 1 有限个无穷小的代数和还是无穷小.

性质 2 有界量与无穷小的乘积还是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积还是无穷小.

性质 3 有限个无穷小的乘积还是无穷小.

注：（1）无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小. 如当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2},\dfrac{2}{x^2},\cdots,\dfrac{x}{x^2}$ 都

是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}+\cdots+\dfrac{x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

（2）两个无穷小的商未必是无穷小．如当 $x\to 0$ 时，$x, 2x, x^2$ 都是无穷小，

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$ 可知，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{2x}{x}$ 不是无穷小．

但由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$ 可知，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x^2}{x}$ 是无穷小．

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，所以 x 为当 $x\to 0$ 时的无穷小，又由于 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，由无穷小的性质 2 可得 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

牛刀小试

1.3.2　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}\cos x$.

1.3.2　无穷大

在极限不存在的情况下，我们着重讨论函数的绝对值无限增大的情形．

定义 1.12　在自变量 x 的某个变化过程中，相应函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 为在该过程中的无穷大；如果相应的函数值 $f(x)$（或 $-f(x)$）无限增大，则称 $f(x)$ 为该变化过程中的正（负）无穷大．

若函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$；

若函数 $f(x)$ 是 $x\to\infty$ 时的正无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$；

若函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0^+$ 时的负无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$.

学习笔记	视频
	无穷大的定义

由定义 1.12 可知，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{1}{x^2}$ 等是无穷大；当 $x\to\infty$ 时，x^3 是无穷大；当 $x\to+\infty$ 时，e^x、$\ln x$ 也都是无穷大．

注：（1）无穷大是变量，绝对值再大的常数也不是无穷大；

（2）极限为无穷大是极限不存在的一种情形，我们只是借用极限的符号

“$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$”表示“当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷大”；

（3）无穷大是相对于自变量的某个变化过程而言的.

例如 $\frac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时为无穷大，但当 $x \to \infty$ 时却是无穷小.

例 3　自变量在怎样的变化过程中，下列函数为无穷大？

例 3 讲解

（1）$y = \frac{1}{x+2}$；　　（2）$y = \ln(x-1)$；　　（3）$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

解：（1）当 $x \to -2$ 时，$\frac{1}{x+2} \to \infty$，所以当 $x \to -2$ 时，$\frac{1}{x+2}$ 是无穷大.

（2）当 $x \to 1^+$ 或 $x \to +\infty$ 时，$\ln(x-1)$ 是无穷大.

（3）当 $x \to -\infty$ 时，$\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 是无穷大.

1.3.3　无穷大与无穷小的关系

无穷大与无穷小之间存在一种简单的关系，即：

定理 1.4　如果函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某一变化过程中是无穷大，则在同一变化过程中 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，在自变量 x 的某一变化过程中，如果 $f(x)$ $(f(x) \neq 0)$ 为无穷小，则在同一变化过程中，$\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

例如，当 $x \to +\infty$ 时，$y = e^x$ 是无穷大，而 $\frac{1}{y} = e^{-x}$ 是无穷小；

又如，当 $x \to 1$ 时，$y = x-1$ 是无穷小，而 $\frac{1}{y} = \frac{1}{x-1}$ 是无穷大.

习题 1.3

1. 指出下列各题中的无穷大与无穷小：

（1）$\tan x \left(x \to \frac{\pi}{2}\right)$；　　（2）$e^{-x}$ $(x \to +\infty)$；

（3）$2^x - 1$ $(x \to 0)$；　　（4）$\frac{1}{x-1}$ $(x \to 1)$.

2. 下列函数在怎样的变化过程中是无穷大或无穷小？

（1）$\sin x$；　　（2）$\frac{3}{x+1}$；　　（3）$\ln x$.

3. 求下列函数的极限：

3（3）题讲解

（1）$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\arctan x}{x}$；　　（3）$\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + x) \cos \frac{1}{x}$.

4. 如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中极限不存在，问：此函数在这一变化过程中是不是无穷大？请举例说明.

§1.4　极限的运算法则及应用

1.4.1　极限的四则运算法则

下面我们给出极限的**四则运算法则**.

定理 1.5　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则有

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$（其中 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$）.

此定理称为极限的四则运算法则.

推论 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，C 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$；

推论 2　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$n\in\mathrm{N}$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$.

注：（1）以上法则对自变量的其他另外几种变化过程也成立.

（2）在自变量的同一变化过程中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限必须都存在，才能用四则运算法则.

（3）定理 1.5 中的法则（1）（2）可以推广到任意**有限个**函数的情形，如

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

利用极限的基本性质和极限的四则运算法则可以解决许多极限问题，下面我们来看几个具体例子.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-1)$.

解：由极限运算法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3x-1)&=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1\\&=(\lim_{x\to 1}x)^2+\lim_{x\to 1}3x-\lim_{x\to 1}1=1^2+3-1=3.\end{aligned}$$

一般地，有

$$\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n.$$

其中 $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 称为 n **次多项式函数**.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+x+2}$．

解： $\lim\limits_{x\to1}(3x^2+x+2)=6\neq0$， $\lim\limits_{x\to1}(2x^2-1)=1$，

由商的极限法则得

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-1}{3x^2+x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to1}(3x^2+x+2)}=\frac{1}{6}.$$

例 3　讨论极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$．

解： 当 $x\to1$ 时，分母的极限为 0，不能直接用极限运算法则．由于 $x\to1$ 时，该分式倒数的极限值为零，即

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2+x}=\frac{1^2-1}{1^2+1}=0.$$

因此，由定理 1.4 无穷大和无穷小的关系得：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，该极限不存在．

例 4、例 5、例 6 讲解

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$．

解： 当 $x\to1$ 时，分母的极限为零，故不能直接用极限的运算法则．但由极限定义可知，当 $x\to1$ 时的极限，与函数在 $x=1$ 时有无定义没有关系，因而可以先通过分解因式约去零因子 $(x-1)$ 后，再求极限．

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(x-2)}=-3.$$

注意，以下解法是**错误**的

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-2)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+2)}=\frac{0}{0}.$$

像例 4 这样，先通过对分子、分母进行因式分解或恒等变形来消去零因子，再求极限的方法，在求一些“$\dfrac{0}{0}$”型极限时经常用到．由于“$\dfrac{0}{0}$”型的极限，可能存在也可能不存在，即使存在，值也不确定，因此这种极限称为**不定式（或未定式）**．

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$．

解： 此题也是“$\dfrac{0}{0}$”型不定式，但求解时不能直接通过分解因式化简消去零因子，由于分母中含根号，可以先通过“分母有理化”化简，然后再求极限．

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1}=\lim_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=2.$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$， $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x^2-1}=\infty$，所以不能用差的极限的运算法则．应先将函数进行通分，化成“$\dfrac{0}{0}$”型不定式，再利用因式分解化简消零因子.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

牛刀小试

1.4.1 求极限：（1）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$； （2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

例 7、例 8、例 9 讲解

解：当 $x\to\infty$ 时，分子、分母都是无穷大，极限都不存在，所以不能直接用商的极限的运算法则．这种两个无穷大的“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限，和“$\dfrac{0}{0}$”型的极限一样，极限可能存在，也可能不存在，即使存在，值也不确定，因此这种极限也是不定式（未定式）．由于分子、分母关于 x 的最高次幂是 x^2，所以我们可以将分子、分母同除以 x^2，然后再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=3.$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x-1}$.

解：该题也是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限，用分子、分母同除以它们的最高次幂 x^2，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^3-1}$.

解：该题还是“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的极限，用分子、分母同除以它们的最高次幂 x^3，再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}=0.$$

根据以上三个例题，可得到如下一般结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

牛 刀 小 试

1.4.2　求极限：（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{5x^3-x+3}$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{4x^3+x+1}$.

例 10　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

分析： 先用等比数列求和公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 求和后再求极限.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1.$$

小结：（1）运用极限的四则运算法则时，必须注意只有各项极限都存在（求商时还要规定分母的极限不为零）才能适用.

（2）如果所求极限是"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"等不定式形式，不能直接用极限法则时，必须先对原式进行恒等变形（因式分解、有理化、约分、通分等），然后再求极限.

1.4.2　极限的应用

例 11　**（野生动物的数量增长）** 在某一自然环境保护区内放入一群野生动物，总数为 20 只，假设野生动物数量的增长规律满足：在 t 年后，动物总数 $N=\dfrac{220}{1+10\cdot(0.83)^t}$，求在这一自然环境保护区中，最多能供养多少只野生动物.

解： 随着时间的延续，由于受到自然环境保护区内的各种资源限制，故动物总数不可能无限增大，它应达到某一饱和状态.在这一自然环境保护区中，设最多能供养的野生动物数为 $\lim\limits_{t\to\infty}N$.

$$\lim_{t\to+\infty}N=\lim_{t\to+\infty}\frac{220}{1+10(0.83)^t}=220.$$

即在这一自然环境保护区中，最多能供养 220 只野生动物.

例 12　**（游戏销量）** 当推出一种新的游戏程序时，其销售量在短期内会迅速增加，然后开始下降，函数关系为 $s(t)=\dfrac{200t}{t^2+100}$，其中 t 为月份，如图 1.17 所示.

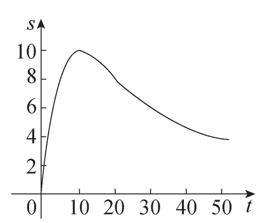


图 1.17

（1）请计算游戏推出后第 6 个月、第 12 个月和第 3 三年最后一个月的销售量.

（2）如果想对该产品的长期销售量做出预测，请建立相应的销售量表达式，并做出分析.

解：（1）$s(6)=\dfrac{200\times 6}{6^2+100}=\dfrac{1200}{136}\approx 8.8235$；

$$s(12)=\frac{200\times 12}{12^2+100}=\frac{2400}{244}\approx 9.8361；$$

$$s(36)=\frac{200\times 36}{36^2+100}=\frac{7200}{1396}\approx 5.1576.$$

（2）从上面的数据可以看出，随着时间的推移，该游戏的长期销售量应为时间 $t\to+\infty$ 时的销售量，即 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{200t}{t^2+100}=0$．此式说明当时间 $t\to+\infty$ 时，销售量的极限为 0，即购买此游戏的人会越来越少，直至无人购买.

例 13 （**企业融资**）某企业获投资 50 万元，该企业将投资作为抵押品向银行贷款，得到相当于抵押品 75% 的贷款．该企业将此贷款再进行投资，并将再投资作为抵押品又向银行贷款，仍得到相当于抵押品 75% 的贷款．企业又将此贷款再进行投资，这样贷款→投资→再贷款→再投资，如此反复，进行扩大再生产．问该企业共计可获得融资多少元？

解：设该企业获投资本金为 A，贷款额占抵押品价值的百分比为 r（$0<r<1$），第 n 次投资后获再投资（贷款）额为 a_n，n 次投资与再投资的资金总和为 S_n，最终投资与再投资的资金总和为 S，得到

$$a_1=A，\quad a_2=Ar，\quad a_3=Ar^2\cdots.$$

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=A+Ar+Ar^2+\cdots Ar^{n-1}=\frac{A(1-r^n)}{1-r},$$

于是得到融资模型

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{A(1-r^n)}{1-r}=\frac{A}{1-r}.$$

在本题中，$A=50$，$r=0.75$，代入上式得 $S=\dfrac{50}{1-0.75}=200$（万元）.

这表明，50 万元的本金通过多次反复融资，最多能融资 200 万元.

习题 1.4

1. 计算下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x+\tan x)$；

（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+2x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$；

（4）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

（5）$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$；

1（5）讲解

（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$；

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+3x^2-2x+1}{6x^3-2x^2-5}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+3}}{\sqrt{x^2-2}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　　（10）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+1}-x^2)$．

2. 计算下列数列的极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\cdots+\dfrac{2n}{n^2}\right)$；　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right]$．

3. （1）已知 a,b 是常数，且 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{ax+b}{x+1}=3$，求 a 和 b．

（2）已知 a,b 是常数，且 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a 和 b．

（3）已知 a,b 是常数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a 和 b．

4.（传染人数）假定某种疾病流行 t 天后，感染人数 N 满足 $N=\dfrac{1000000}{1+5000\mathrm{e}^{-0.1t}}$，问：经过足够长的传染时间后，将有多少人感染上这种病？

5.（物体温度）一个物体放置在温度为 150℃的火炉上，它的温度满足如下模型 $T=-100\mathrm{e}^{-0.029t}+100$，$t$ 表示时间（单位：min），问：

（1）物体温度达到 100℃所需的时间是多长？

（2）当 $t\to+\infty$ 时，物体的温度为多少？

§1.5　两个重要极限

通过前面几节的学习，我们知道了一些求极限的方法，如运用极限的定义和运算法则及无穷小的性质等．除此之外，我们还可以利用两个重要极限公式和等价无穷小代换的方法来求极限．事实上，很多领域中的一些实际问题都可以利用这两类极限来解决．

1.5.1　两个重要极限公式

1. 第一个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1.1}$$

表 1.3 列出了函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 x 无限接近 0 时的一些函数值．

表 1.3

x	−1	−0.5	−0.1	−0.01	…	0.01	0.1	0.5	1
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.841471	0.95885	0.99833	0.99998	…	0.99998	0.99833	0.95885	0.84147

由图 1.18 我们可以看出，当 x 趋近于 0 时，$\sin x$ 与 x 的值无限接近，因此 $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$.

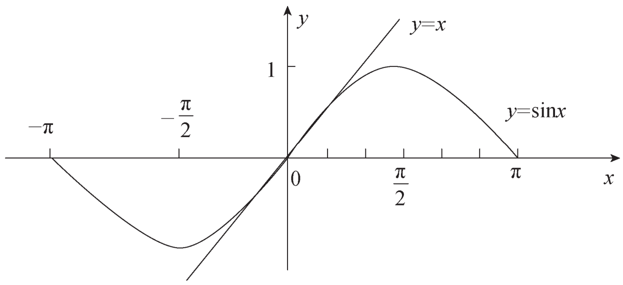


图 1.18

由表 1.3 和图 1.18 可得，当 $x \to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. 在此，本书不再给出第一个重要极限的严格证明.

第一个重要极限在极限计算中有重要应用，它在形式上有以下特点：

（1）它是“$\dfrac{0}{0}$”型不定式；

（2）公式（1.1）的形式可变形成 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$；

（3）公式（1.1）的另一变形公式：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$ 仍然成立，其形式可变形成 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\sin\varphi(x)} = 1$.

利用公式（1.1），可以求解一些与三角函数有关的“$\dfrac{0}{0}$”型不定式的极限.

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1\times 1 = 1$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right) = 3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 3$.

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解： 由三角函数的降幂公式 $\sin^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1-\cos x}{2}$ 可得：$1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}\cdot1^2=\dfrac{1}{2}$.

牛刀小试

1.5.1　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$.

2. 第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\,. \tag{1.2}$$

学习笔记	演示
	第二个重要极限

我们在表 1.4（a）中列出了 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 x 取正值无限增大时的一些函数值.

表 1.4（a）

x	3	10	100	1000	10000	100000	…
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	2.370	2.594	2.705	2.717	2.718	2.718	…

表 1.4（b）中列出了 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 x 取负值无限减小时的一些函数值.

表 1.4（b）

x	−3	−10	−100	−1000	−10000	−100000	…
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	3.375	2.868	2.732	2.720	2.718	2.718	…

从上面的两个表可以看出，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，其中数 e 是一个无理数，$\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots$.

在 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 中，若令 $\dfrac{1}{x}=t$，则当 $x\to\infty$时，$t\to0$，可得此极限的另一种形式：

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}\quad，即\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\ .$$

第二个重要极限是幂指函数的极限，它的两种形式有以下共同**特点**：

（1）它们是“1^{∞}”型不定式；

（2）函数的底数是“1+无穷小”的形式；

（3）函数的指数是无穷大，并且与底数中的无穷小互为倒数.

第二个重要极限的两个公式的形式也可以变形为

$$\lim_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}\ .$$

利用第二个重要极限我们可以解决一些“1^{∞}”型不定式的极限，在运用公式时，要注意公式的推广.

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=\mathrm{e}^{3}$.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}\cdot(-2)}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}}\}^{(-2)}$

$=\{\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}}\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+5}$

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{5}$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{5}=\mathrm{e}^{2}\cdot 1^{5}=\mathrm{e}^{2}$.

一般地，有下面的结论：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=\mathrm{e}^{ab}\ .$$

思政之窗

第二个重要极限是银行计算复利的重要模型，假设银行某种定期储蓄的年利率是 r，存款本金为 A_0 万元，以存期 3 年为例：

如果每年计息 1 次，3 年后本息合计值应为 $A_3 = A_0(1+r)^3$ 万元；如果每月计息 1 次，则每年计息 12 次，3 年后本息合计值应为 $A_3 = A_0\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{36}$ 万元；…；如果每年计息 n 次，则每次计息的利率为 $\dfrac{r}{n}$，那么 3 年后的本息合计值应为 $A_3 = A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{3n}$ 万元；如果计算瞬时复利，就是 n 的取值应该很大很大乃至无穷大，这种情况下，3 年后的本息合计值 A_3 应为多少呢？这个问题其实就转换成了求当 $n\to\infty$ 时，$A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{3n}$ 的极限问题，利用第二个重要极限就可以解决．

由计算结果可以看出，以复利计算的投资报酬效果是相当惊人的，并且复利期越短，投资时间越长，最终得到的本息合计值就越高．存款是这样，贷款亦是如此．现在有很多“校园贷”就是利用了复利计息，再加上高额高息的违约金，使貌似可以还上的钱，本息总额越来越多，逾期还款的违约金也越来越高，甚至使得很多贷款的学生最终无法承受，从而严重影响正常的学习和生活，后果不堪设想．

如今，同学们用所学的数学知识就可以明辨，“校园贷”其实就是走进校园的“套路贷”．大家一定要充分认识网络不良借贷存在的隐患和风险，树立理性、科学的消费观，远离一切不良贷款．

牛 刀 小 试

1.5.2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} A_0\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{3n}$．

1.5.2　无穷小的比较

我们已经知道，以零为极限的变量称为无穷小．不过，不同的无穷小收敛于零的速度有快有慢，例如，当 $x\to 0$ 时，$x^2, x^{\frac{1}{3}}, 2x, \sin x$ 都是无穷小，但趋近于零的速度是不同的．当然快慢是相对的，我们可以用 x 收敛于零的速度作为标准进行比较．

对此，我们通过考察两个无穷小之比，引进无穷小阶的概念．

定义 1.13　设当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小，

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，记作 $f(x)=o(g(x))$；

（2）如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ **低阶的无穷小**；

（3）如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$（$C$ 为常数），则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**同阶无穷小**；

（4）特别地，如果当 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ 时，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是**等价无穷小**，记作 $f(x) \sim g(x)$（$x \to x_0$）.

学习笔记	视频
	无穷小比较

例 8 比较下列两组无穷小的阶.

（1）当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 与 $\tan x$；（2）当 $x \to +\infty$ 时，e^{-x} 与 2^{-x}.

解：（1）因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$，所以，当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 和 $\tan x$ 是等价无穷小.

（2）因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{2^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e}{2}\right)^{-x} = 0$，所以，当 $x \to +\infty$ 时，e^{-x} 是比 2^{-x} 高阶的无穷小.

关于等价无穷小有如下的一个定理，此定理在极限的计算中经常会遇到.

定理 1.6 设当 $x \to x_0$ 时，$f(x) \sim \alpha(x)$，$g(x) \sim \beta(x)$，

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$；

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

当 $x \to 0$ 时，下列几组无穷小是等价的：

$\sin x \sim x$；　$\tan x \sim x$；　$\arcsin x \sim x$；　$\arctan x \sim x$；

$\ln(1+x) \sim x$；　$e^x - 1 \sim x$；　$\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{2} x$；　$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2} x^2$.

利用等价无穷小的性质，在求极限时，分子分母的无穷小因子可用它们相应的等价无穷小代换，从而达到简化计算的目的，这种方法叫作**等价无穷小代换法**.

学习笔记	视频
	定理 1.6

注：若将上述 8 个等价形式的 x 替换为 $\varphi(x)$，只要满足 $\varphi(x) \to 0$，结论仍成立. 例如，当

$x \to 0$ 时，$3x \to 0$，则 $\sin 3x \sim 3x$，$\ln(1+3x) \sim 3x$；当 $x \to 1$ 时，$(x-1) \to 0$，则 $\tan(x-1) \sim (x-1)$.

例 9　利用等价无穷小代换法求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

9（2）讲解

解：（1）因为当 $x \to 0$ 时，$-x \to 0$，因此 $e^{-x}-1 \sim -x$，

所以 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x} = -1$.

（2）因为 $\tan x - \sin x = \tan x(1-\cos x)$，当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

注：在求极限做等价无穷小的代换时，只能对分子或分母整体代换或对乘积因子进行代换，不能对分子或分母的加减项用等价无穷小代换.

牛刀小试

1.5.3　当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 是等价无穷小，求 $\lim\limits_{x \to \infty} 3xf(x)$.

习题 1.5

1. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　　（2）$\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{3}{x}$；

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\arcsin 3x}{x}$；　　（4）$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$；

（5）$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x^2-1}$；　　（6）$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x^3-1)}{x^2-1}$；

（7）$\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$；　　（8）$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+\sin x}{x-2\sin x}$.

2. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} (1+5x)^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$；

（3）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-2x}$；　　（4）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2+x}{x}\right)^{x-1}$；

（5）$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{2\sec x}$；　　（6）$\lim\limits_{x \to 0} (1-\tan x)^{3\cot x}$；

（7）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$；　　（8）$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<0, \\ -1, & x=0, \\ -\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限.

4. 利用等价无穷小代换法求下列函数的极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1-2x)}$； （2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\tan x^2}$；

（3） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sin x}$； （4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)(e^x-1)}{(1-\cos x)\sin 2x}$.

4（4）讲解

§1.6 函数的连续性

有许多自然现象，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等，都是随着时间在连续不断地变化的，这些现象反映在数学上就是函数的连续性．我们学过的很多函数，例如 $y=\sin x$、$y=x^2$，它们的图像是一条连续变化的曲线．函数连续性的概念从变量关系上看是指当自变量的变化很微小时，函数相应的变化也很微小．例如，气温随着时间的改变而发生连续变化，当时间的改变量很小时，则该时刻气温的改变量也很小．本节将以极限的概念来研究函数的连续性．为此，我们先引入增量的概念．

定义 1.14 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量从 x_0 变动到 $x_0+\Delta x$ 时，称 Δx 为**自变量的增量**（或改变量），对应的函数值从 $f(x_0)$ 变动到 $f(x_0+\Delta x)$，则称 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为**函数的增量**（或改变量）．

变量的增量可以是正数、负数或零．

1.6.1 函数连续的概念

首先，我们从函数图像上观察函数 $f(x)$ 在给定点 x_0 处的变化情况．由图 1.19 可以看出，函数 $y=f(x)$ 是连续变化的，它的图像是一条不间断的曲线．当 x_0 保持不变而让 Δx 无限趋近于零时，曲线上的点 N 就沿着曲线趋近于点 M，即 Δy 趋近于零．

由图 1.20 可以看出，函数 $y=\varphi(x)$ 不是连续变化的．它的图像是一条在点 x_0 处间断的曲线．当 x_0 保持不变，让 Δx 无限趋近于零时，曲线上的点 N 就沿着曲线趋近于点 N'，Δy 不能趋近于零．

下面给出了函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义．

定义 1.15 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果在 x_0 处，当自变量的增量 Δx 趋于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **处连续**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

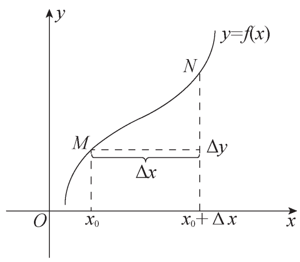


图 1.19

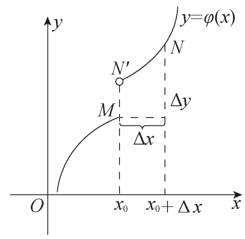


图 1.20

在定义 1.15 中，若设 $x = x_0 + \Delta x$，则 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$. 由 $\Delta x \to 0$，就有 $x \to x_0$；由 $\Delta y \to 0$，就有 $f(x) \to f(x_0)$. 因此，我们可以得到函数在 x_0 处连续的另一等价定义.

定义 1.16　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在，且等于它在 x_0 点的函数值，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，点 x_0 称为函数的**连续点**.

根据定义 1.16，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，下述三个条件皆须满足：

（1） $f(x_0)$ 有定义；

（2）极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在；

（3）极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 的值等于该点函数值 $f(x_0)$.

我们常用上述三个条件来讨论函数 $f(x)$ 在某点处是否连续.

例 1　讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解：因为当 $x \to 0$ 时， $x\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，且

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

所以，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

由函数在点 x_0 的左极限与右极限的定义，我们还可以得到函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续与右连续的定义.

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 有 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点**左连续**；

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 有 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点**右连续.**

关于函数的左连续和右连续可得下述定理.

定理 1.7　函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的**充分必要条件**是函数 $f(x)$ 在该点左连续且右连续.

由定理 1.7 可得，对于有些直接判断连续性不方便的函数（如：分段点两侧表达式不同的分段函数），我们可以分别研究函数在一点是否左、右连续，来判断函数在该点是否连续.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ e^x+1, & x>0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解： 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的左、右表达式不同，所以先讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右连续性．由于

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^x+1)=2=f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin 3x}{x}=3\neq f(0),$$

所以，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处只是右连续，但不是左连续，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

牛刀小试

1.6.1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a.

如果函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，区间 (a,b) 称为连续区间．如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且该函数在左端点处右连续，在右端点处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

函数 $f(x)$ 在它的定义域内的每一点都连续，则称 $f(x)$ 为**连续函数**.

从几何直观上，连续函数的图像是一条连续不间断的曲线.

1.6.2　初等函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 在一个区间的每一点处都连续，则称 $f(x)$ 在该区间上连续．可以证明：**基本初等函数在它们的定义域内都是连续的，一切初等函数在其定义区间内都是连续的.**

所谓定义区间，就是包含在定义域内的区间．因此，求初等函数 $f(x)$ 在其定义区间内的点 x_0 处的极限，我们可以直接用 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 来求；求初等函数的连续区间就是求定义区间．分段函数一般不是初等函数，因此关于分段函数的连续性，必须讨论该函数在分段点处的连续性.

1.6.3　函数的间断点及其分类

定义 1.17　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域内有定义且函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**.