

# 第 1 章 动态系统的状态空间模型及变换

## 1.1 引言

在经典控制理论中,采用传递函数描述线性定常系统的动态。在传递函数中,可描述系统输入和输出的关系,但无法描述动态系统内部变量的信息,不能完全揭示动态系统的全部状态特性。在现代控制理论中,采用状态变量的一阶微分方程组描述动态系统,反映了系统内部状态变量的动态特性,同时便于处理系统的初始条件,成为控制系统分析和设计的有力工具。

此外,与传递函数不同,状态空间法隶属于时域分析方法。随着数字计算机的普及,控制系统时域模型的求解易于实现,时域分析方法更加便捷实用。除了线性定常系统,状态空间法同样适用于线性时变系统、非线性系统、离散系统等。本章主要研究时域分析方法构建动态系统的状态空间模型,为后续的控制理论提供基础。

## 1.2 动态系统的状态空间模型

### 1.2.1 状态变量的概念

状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  是描述动态系统运动状态的最小个数的一组变量。一个用  $n$  阶微分方程描述的动态系统,有  $n$  个独立变量,且独立变量的选取方式不唯一。

图 1.1 中给出动态系统的一般形式。 $u(t)$  是输入信号, $y(t)$  是输出信号。当状态变量在  $t_0$  时刻的初始值  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  和  $t \geq t_0$  输入信号  $u(t)$  已知时,足以确定系统状态变量的未来响应。

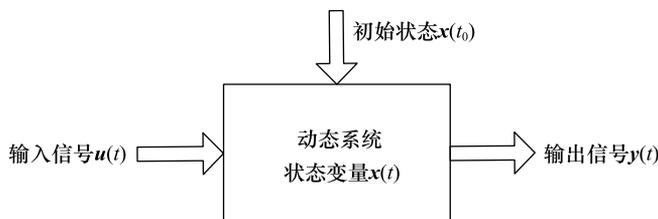


图 1.1 动态系统

以状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为坐标轴构成的空间,称为  $n$  维状态空间。初始时刻  $t_0$  的系统状态  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$  对应状态空间中的初始点。在任意  $t$  时刻,系统状态变量是状态空间中的点。随着时间的推移,在状态空间中系统状态形成一条轨迹,即状态轨线。状态空间表示是动态系统的代数形式和几何概念的桥梁。

### 1.2.2 状态空间表达式

状态变量组(状态向量)可描述动态系统。下面采用图 1.2 中的 RLC 网络,具体说明状

态变量描述系统的动态。RLC 网络中有两个独立的储能元件,即电容  $C$  和电感  $L$ ,且电容、电感储能取决于电容电压、电感电流,因此选取两个状态变量:电容电压  $u_C(t)$  和电感电流  $i_L(t)$ 。

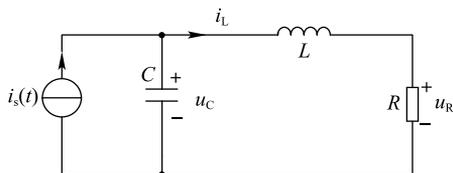


图 1.2 RLC 网络

根据电路原理,可推导如下的二元一阶微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -\frac{1}{C}i_L + \frac{1}{C}i_s \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R}{L}i_L + \frac{1}{L}u_C \end{aligned} \quad (1.1)$$

式(1.1)是 RLC 网络的状态方程,若用一般符号表示,令  $x_1 = u_C, x_2 = i_L, u = i_s$ ,则状态方程可表示为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}x_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

在 RLC 网络中,输出信号是电阻电压  $y = u_R$ ,则输出方程为

$$y = Rx_2 \quad (1.3)$$

由于动态系统结构的不确定性,状态变量的选取是不唯一的,对 RLC 网络而言,也可选择电容电压  $x_1 = u_C$  和电感电压  $x_2 = u_L$  作为状态变量。此时,RLC 网络的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{C}u \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{RC}x_1 + \left(\frac{1}{RC} - \frac{R}{L}\right)x_2 + \frac{1}{C}u \end{aligned} \quad (1.4)$$

状态变量能反映实际的动态系统存储的能量,因此可描述系统的动态行为。选取状态变量有不同的方案,通常尽量选取易于测量的变量作为系统的状态变量。

多输入多输出动态定常系统的状态响应由状态变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和输入信号  $u_1, \dots, u_r$  组成的一阶微分方程组描述,即

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r \end{aligned} \quad (1.5)$$

输出方程是状态变量的线性组合,在特殊情况下,输出方程受到输入信号的影响,因此输出方程的一般形式为

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \cdots + d_{2r}u_r \\ &\vdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + \cdots + d_{mr}u_r \end{aligned} \quad (1.6)$$

状态变量组所构成的向量称为状态向量,记为

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

则状态方程和输出方程可表示为向量矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.8)$$

其中,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$  为  $n \times n$  维系统矩阵,表示系统状态的内部联系;  $\mathbf{B} =$

$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$  为  $n \times r$  维输入矩阵或控制矩阵,表示输入信号对状态的影响;  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \cdots, u_r]^T$

为  $r$  维输入向量;  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_m]^T$  为  $m$  维输出向量;  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$  为  $m \times n$  维

输出矩阵;  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$  为输入信号对输出信号的  $m \times r$  维直接传递矩阵。

以图 1.2 所示的 RLC 网络为例,当选择电容电压  $x_1 = u_C$  和电感电流  $x_2 = i_L$  作为状态变量时,状态方程和输出方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [0 \quad R] \mathbf{x} \end{cases} \quad (1.9)$$

### 1.2.3 状态空间模型框图

为描述系统的动态特性,可建立系统的图示化框图模型来表示信号的传递关系。式(1.8)的框图如图 1.3 所示。

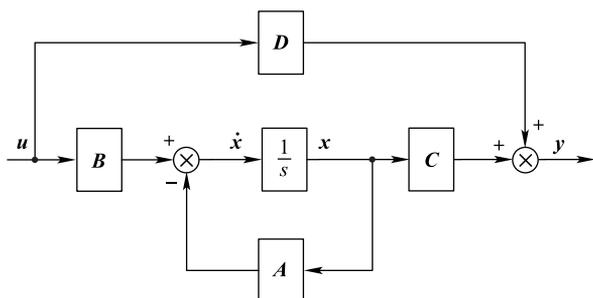


图 1.3 系统信号传递框图

式(1.9)RLC网络的框图如图 1.4 所示。

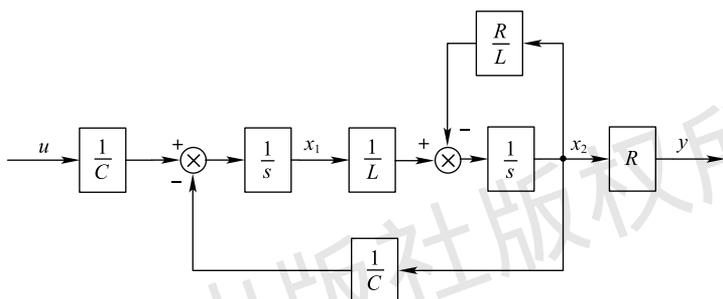


图 1.4 RLC 网络的框图

**【例 1.1】** 传染病的传播模型。受调查人群可分为 3 类,其人数分别为  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ ,  $x_1$  表示易受感染人群,  $x_2$  表示已感染人群,  $x_3$  表示从最初人群中剔除的不会再受到感染人群,原因是已进行免疫接种,或与传染病院隔离,或已死亡。输入信号为新加入易受感染者速率  $u_1$  和新加入染病者速率  $u_2$ 。描述传染病传播过程的动态系统微分方程为

$$\frac{dx_1}{dt} = -\alpha x_1 - \beta x_2 + u_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \beta x_1 - \gamma x_2 + u_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha x_1 + \gamma x_2$$

$$y = x_3$$

其状态方程和输出方程表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha & -\beta & 0 \\ \beta & -\gamma & 0 \\ \alpha & \gamma & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ y = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

传染病传播模型的框图如图 1.5 所示。

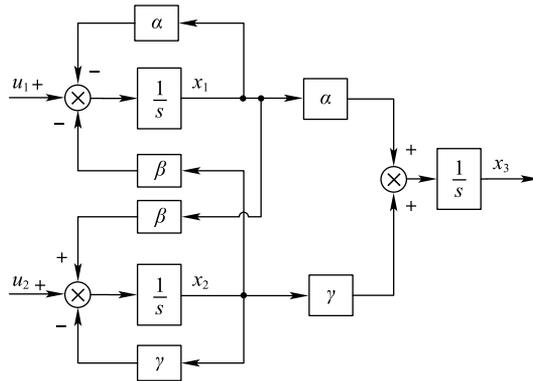


图 1.5 传染病传播模型的框图

### 1.2.4 建立状态空间模型

一般可从 3 个途径建立动态系统的状态空间模型：一是由系统框图根据动态模型中各个环节的连接情况，推导状态空间模型；二是根据动态系统实现机理建模；三是由系统的微分方程或传递函数确定状态空间模型。

#### 1. 由动态系统的框图推导状态空间模型

将系统的框图转化成对应的模拟结构图。将每个积分器的输出选作状态变量  $x_i$ ，积分器的输入是  $\dot{x}_i$ 。最后，根据模拟结构图得到系统的状态方程和输出方程。

除了框图模型，梅森(Mason)还提出一种以节点间线段为描述手段的信号流图法，无须对流图进行化简和变换，利用梅森增益公式，可推导系统变量间的信号传递关系。描述系统输出和输入关系的梅森增益公式为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{\Delta} \quad (1.10)$$

其中， $P_k$  表示第  $k$  条前向通路的增益； $\Delta$  是信号流图的特征式，其定义为

$$\Delta = 1 - \sum_{n=1}^N L_n + \sum_{n,m \text{ 不接触回路}} L_n L_m - \sum_{n,m,p \text{ 不接触回路}} L_n L_m L_p + \dots$$

其中， $L_q$  为第  $q$  条回路的增益； $\Delta_k$  为通路  $P_k$  在  $\Delta$  中的余因式，即删除了所有与第  $k$  条通路相接触的回路增益项后的余因式。

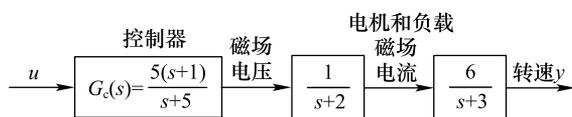
如果系统所有反馈回路都相互接触，且所有前向通路都与所有反馈回路接触，则梅森增益公式可简化为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k P_k}{1 - \sum_{n=1}^N L_n} = \frac{\text{所有前向通路增益项之和}}{1 - \text{所有反馈回路增益项之和}} \quad (1.11)$$

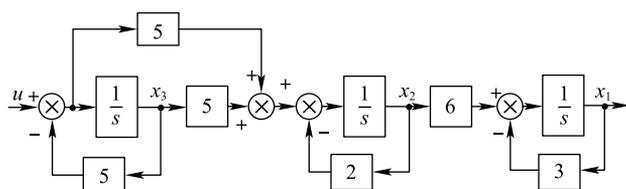
**【例 1.2】** 直流电机调速系统的框图如图 1.6(a)所示，其模拟结构图和信号流图如图 1.6(b)和(c)所示。

直流电机调速系统的状态空间模型为

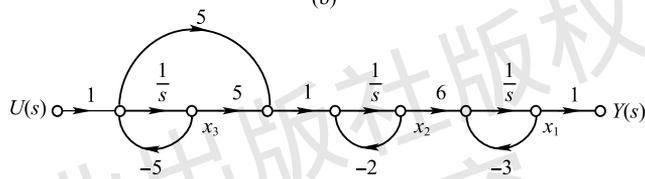
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x} \end{cases}$$



(a)



(b)



(c)

图 1.6 直流电机调速系统的框图、模拟结构图和信号流图

根据信号流图法，直流电机调速系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{30}{s^3} + \frac{30}{s^2}}{1 - \left(-\frac{5}{s} - \frac{2}{s} - \frac{3}{s}\right) + \left(\frac{5}{s} \cdot \frac{2}{s} + \frac{5}{s} \cdot \frac{3}{s} + \frac{2}{s} \cdot \frac{3}{s}\right) - \left(-\frac{5}{s} \cdot \frac{2}{s} \cdot \frac{3}{s}\right)}$$

$$= \frac{30 + 30s}{s^3 + 10s^2 + 31s + 30}$$

然后可以根据系统的微分方程或传递函数确定状态空间模型，从而确定直流电机调速系统的状态空间模型。

## 2. 动态系统机理建模

在电气系统、机械系统、机电系统、气动液压系统和热力系统等动态系统中，根据系统自身遵循的物理规律，如基尔霍夫定律、牛顿定律和能量守恒定律等，建立描述系统动态特性的微分方程，从而推导动态系统的状态空间模型。

**【例 1.3】** 双节点电路系统如图 1.7 所示。

电路中共 3 个独立储能元件，因此选取 3 个状态变量： $x_1 = u_{C1}$ ， $x_2 = u_{C2}$ ， $x_3 = i_L$ 。

针对节点 A 和节点 B，根据基尔霍夫电流定律列写电流方程为

$$C_1 \frac{dx_1}{dt} + \frac{x_1}{R_2} + \frac{x_1 - x_2}{R_1} = i_s$$

$$\frac{x_1 - x_2}{R_1} = C_2 \frac{dx_2}{dt} + x_3$$

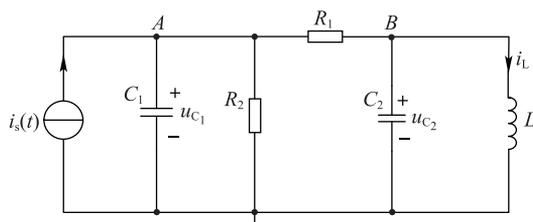


图 1.7 双节点电路系统

电感的端电压和电流满足

$$x_2 = L \frac{dx_3}{dt}$$

则双节点系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & \frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

**【例 1.4】** 双联推车机械运动模型如图 1.8 所示。\$M\_1\$、\$M\_2\$ 分别表示两辆推车的质量，\$y\_1\$、\$y\_2\$ 分别表示两辆推车的位移，\$v\_1\$、\$v\_2\$ 分别表示两辆推车的运动速度，\$u\$ 为推车受到的外力，\$k\_1\$、\$k\_2\$ 分别表示两个弹簧的弹性系数，\$b\_1\$、\$b\_2\$ 分别表示两个弹簧的阻尼系数。假设推车与地面的摩擦力可以忽略。

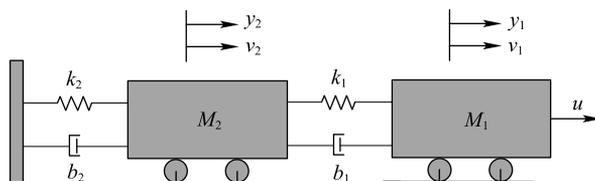


图 1.8 双联推车机械运动模型

根据牛顿第二定律，列写两辆推车的运动方程为

$$M_1 \ddot{y}_1 = u - k_1 (y_1 - y_2) - b_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 = k_1 (y_1 - y_2) + b_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_2 y_2 - b_2 \dot{y}_2$$

定义状态变量 \$x\_1 = y\_1, x\_2 = y\_2, x\_3 = \dot{y}\_1, x\_4 = \dot{y}\_2\$，则双联推车机械运动系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & -\frac{b_1}{M_1} & \frac{b_1}{M_1} \\ \frac{k_1}{M_2} & -\frac{k_1+k_2}{M_2} & \frac{b_1}{M_2} & -\frac{b_1+b_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_1} \\ 0 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

【例 1.5】 直流他励电机等效电路如图 1.9 所示。 $R_a$ 、 $L_a$  分别为电枢电路的电阻和电感， $i_a$  为电枢电流， $J$  表示机械旋转部分的转动惯量， $b$  为旋转部分的摩擦系数， $\omega$ 、 $\theta$  分别为机械旋转部分的转速和转角， $u_a$  为控制输入。

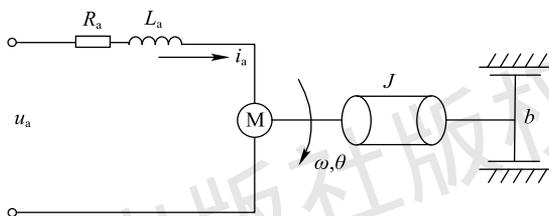


图 1.9 直流他励电机等效电路

根据牛顿定律，有

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{b}{J}\omega + \frac{K}{J}i_a \end{aligned}$$

其中， $K$  是转矩系数。

在电枢回路中，根据基尔霍夫电压方程，有

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E = u_a$$

由电磁感应定律，则感应电动势  $E$  可表达为

$$E = K_e \omega$$

其中， $K_e$  是感应电动势系数。

定义状态变量  $x_1 = \theta$ ， $x_2 = \omega$ ， $x_3 = i_a$ ，则直流他励电机的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K_e}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

### 3. 由系统的微分方程或传递函数确定状态空间模型

由系统的微分方程或传递函数确定状态空间模型,称为**实现问题**。状态空间模型描述了传递函数确定的输入、输出关系,同时描述系统的内部关系。注意:从微分方程或传递函数推导的状态空间模型不唯一,即实现的非唯一性。

考虑单变量线性定常系统,其运动方程是  $n$  阶线性定常微分方程:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (1.12)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, m \leq n \quad (1.13)$$

建立对应的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \end{cases} \quad (1.14)$$

当  $m < n$  时,式(1.14)中  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ; 当  $m = n$  时,式(1.14)中  $\mathbf{D} = b_m \neq 0$ , 传递函数可表示为

$$G(s) = b_m + \frac{(b_{m-1} - a_{n-1}b_m)s^{n-1} + (b_{m-2} - a_{n-2}b_m)s^{n-2} + \dots + (b_0 - a_0b_m)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (1.15)$$

显然,输出中包含和输入直接相关的项。

虽然实现是非唯一的,但只要不出现零极点对消, $n$  阶系统中必有  $n$  个独立状态变量,同时有  $n$  个一阶微分方程等效。同一个动态系统的实现中,矩阵  $\mathbf{A}$  的元素不尽相同,但其特征根相同。无零极点对消的传递函数的实现问题称为**最小实现**。

针对式(1.15)中的传递函数,引入定义  $Y_1(s) \triangleq \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} U(s)$ , 则

$$Y(s) = b_m U(s) + Y_1(s) [(b_{m-1} - a_{n-1}b_m)s^{n-1} + (b_{m-2} - a_{n-2}b_m)s^{n-2} + \dots + (b_0 - a_0b_m)] \quad (1.16)$$

对式(1.16)进行拉普拉斯反变换,则有

$$y(t) = b_m u(t) + (b_{m-1} - a_{n-1}b_m)y_1^{(n-1)}(t) + (b_{m-2} - a_{n-2}b_m)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + (b_0 - a_0b_m)y_1(t)$$

其模拟结构图如图 1.10 所示。

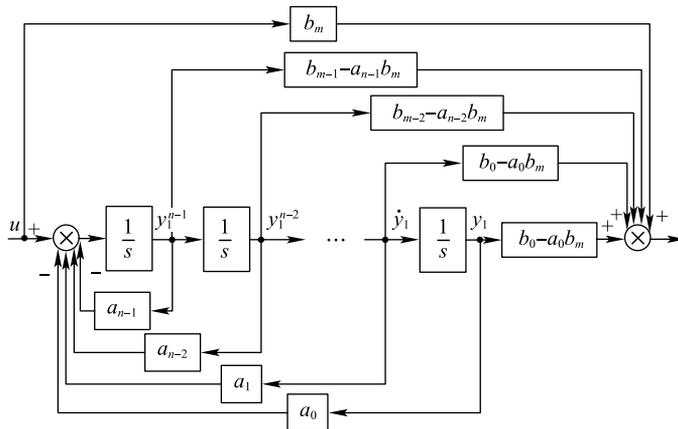


图 1.10 模拟结构图

选择状态变量  $x_1 = y_1, x_2 = \dot{y}_1, \dots, x_{n-1} = y_1^{n-2}, x_n = y_1^{n-1}$ , 则状态空间模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n - \dots - a_1x_2 - a_0x_1 + u \\ y &= b_mu + (b_{m-1} - a_{n-1}b_m)x_n + (b_{m-2} - a_{n-2}b_m)x_{n-1} + \dots + (b_0 - a_0b_m)x_1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

或向量矩阵形式

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = \begin{bmatrix} (b_0 - a_0b_m) & (b_1 - a_1b_m) & \cdots & (b_{m-2} - a_{n-2}b_m) & (b_{m-1} - a_{n-1}b_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_mu \end{cases} \quad (1.18)$$

前面已指出, 动态系统的实现是非唯一的。针对定常系统(1.13), 模拟结构图 1.11 和图 1.10 是等效的。

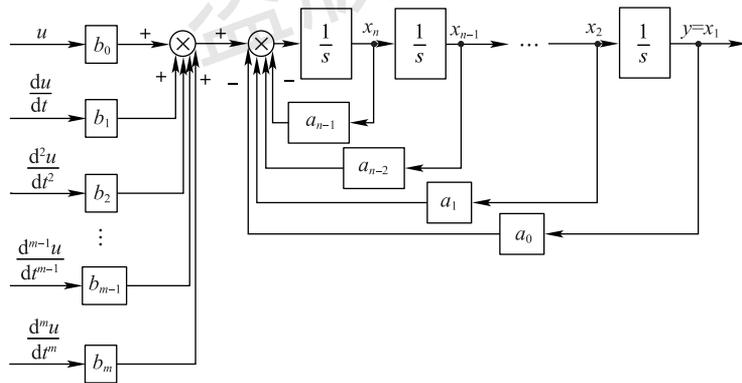
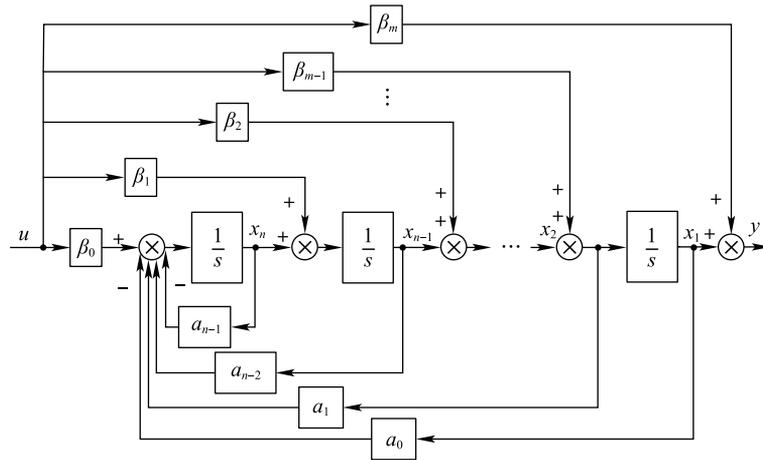


图 1.11 模拟结构图

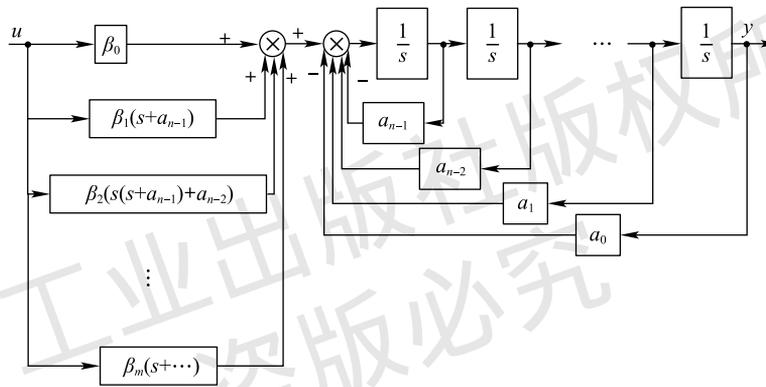
将模拟结构图 1.11 中输入量  $u$  的各阶导数进行等效移动, 得图 1.12(a)。将图 1.12(a) 中的综合点等效前移, 得到等效的模拟结构图, 如图 1.12(b) 所示。

由图 1.12(b) 推导传递函数为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{\beta_m(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0) + \beta_{m-1}(s^{m-1} + a_{m-1}s^{m-2} + \dots + a_1) + \dots + \beta_1(s + a_{m-1}) + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \\ &= \frac{\beta_ms^m + (a_{m-1}\beta_m + \beta_{m-1})s^{m-1} + \dots + (a_1\beta_m + a_2\beta_{m-1} + \dots + \beta_1)s + (a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \dots + \beta_0)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (1.19)$$



(a)



(b)

图 1.12 模拟结构图

对比传递函数式(1.13),采用待定系数法,确定未知系数  $\beta_i$  为

$$\begin{aligned} \beta_m &= b_m \\ a_{m-1}\beta_m + \beta_{m-1} &= b_{m-1} \\ &\vdots \\ a_1\beta_m + a_2\beta_{m-1} + \cdots + \beta_1 &= b_1 \\ a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + \beta_0 &= b_0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \beta_m &= b_m \\ \beta_{m-1} &= b_{m-1} - a_{m-1}\beta_m \\ &\vdots \\ \beta_1 &= b_1 - \sum_{i=1}^{m-1} a_i\beta_{m+1-i} \\ \beta_0 &= b_0 - \sum_{i=0}^{m-1} a_i\beta_{m-i} \end{aligned} \tag{1.20}$$

根据模拟结构图 1.12(a),选择每个积分器的输出为状态变量,则式(1.13)的状态空间模

型也可表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{m-1} \\ \beta_{m-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [1 \ \vdots \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_m u \end{cases} \quad (1.21)$$

【例 1.6】单回路控制系统如图 1.13 所示。

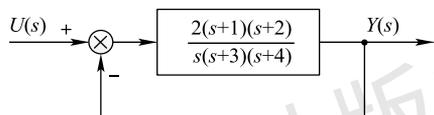


图 1.13 单回路控制系统

其闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{2s^2 + 6s + 4}{s^3 + 9s^2 + 18s + 4}$$

对应式(1.13)中传递函数,系数分别为

$$a_2 = 9, a_1 = 18, a_0 = 4, b_3 = 0, b_2 = 2, b_1 = 6, b_0 = 4$$

根据式(1.18),状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [4 \ 6 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

根据式(1.21),状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -18 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 76 \end{bmatrix} u \\ \\ y = [1 \ \vdots \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中,  $\beta_i$  的取值见式(1.20)。

注意:上述两种状态空间模型中状态变量的选取是不同的。

## 1.3 动态系统状态空间模型的线性变换

### 1.3.1 动态系统状态空间模型的非唯一性

对给定的定常系统,状态变量的选取方式不唯一,其状态空间模型表达式也不唯一。但所选取的状态向量之间,可实现线性变换。

针对如下的定常系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (1.22)$$

存在任意一个非奇异变换矩阵  $\mathbf{T}$ ,对原状态向量  $\mathbf{x}$  实现线性变换,得到另一状态变量  $\mathbf{z}$  为

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \quad (1.23)$$

其逆变换为

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \quad (1.24)$$

在状态变量  $\mathbf{z}$  下,式(1.22)转化为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{ATz} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Bu}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{CTz} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (1.25)$$

**【例 1.7】** 某动态系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

(1) 若取变换矩阵  $\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,则变换后的状态向量为

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{AT}_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{Bu} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -15 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{CT}_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{Du} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_1(0) = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

(2) 若取变换矩阵  $\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,则变换后的状态向量为

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u} \\ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}_2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}_2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{T}_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{D} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_2(0) = \mathbf{T}_2^{-1} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

(3) 若将(2)中的矩阵  $\mathbf{B}$  由  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$  变换成  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 可取变换矩阵  $\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ , 则变换

后的状态向量为

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{T}_3^{-1} \mathbf{z}_2 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}_2$$

变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_3 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \mathbf{z}_3 + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{z}_3(0) = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

下面将给出动态系统的几个重要定义。

**定义 1.1 系统特征值:** 针对定常系统(1.22), 定义方阵  $\mathbf{A}$  的特征值为系统特征值。方阵  $\mathbf{A}$  的特征值, 即特征方程  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$  的根。若  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 则系统有  $n$  个特征值。若  $\mathbf{A}$  为实数矩阵, 则系统特征值为实数或共轭复数; 若  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵, 则系统特征值为实数。

**注意:** 针对定常系统(1.22), 其状态空间模型表达式不唯一, 但系统特征值具有不变性。

**证明:** 针对定常系统(1.22), 线性变换后, 其状态空间模型表达式转化为式(1.25), 特征方程  $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = 0$  满足

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| &= |\lambda \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \lambda \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1} (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}| |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| |\mathbf{T}| \\ &= |\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}| |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| \end{aligned}$$

式(1.22)和式(1.25)中, 特征方程的根相同, 则系统特征值不变。

**定义 1.2 系统特征向量:** 针对系统方阵  $\mathbf{A}$ , 若存在向量  $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^n$ , 使得  $\mathbf{A} \mathbf{P}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i$  成立, 则称  $\mathbf{P}_i$  为  $\mathbf{A}$  对应于特征值  $\lambda_i$  的特征向量, 其中特征值  $\lambda_i$  为标量。

**【例 1.8】** 求  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$  的特征向量。

解: 方阵  $\mathbf{A}$  的特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -3 & \lambda & -2 \\ 12 & 7 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

解得  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ 。

假设对应于  $\lambda_1 = -1$  的特征向量  $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$ , 根据特征向量的定义  $\mathbf{A}\mathbf{P}_1 = \lambda_1 \mathbf{P}_1$ , 则有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

因此, 有  $p_{11} = -p_{21} = -p_{31}$ 。选择  $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。

同理, 计算对应  $\lambda_2 = -2$  和  $\lambda_3 = -3$  的特征向量分别为  $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。

### 1.3.2 动态系统状态空间模型的约当标准型

#### 1. 约当标准型

定义 1.3 约当标准型: 定常系统(1.22)的约当标准型定义为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.26)$$

$\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  为系统特征值, 约当标准型矩阵  $\mathbf{J}$  定义为

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{0} & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{系统特征值无重根} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \mathbf{0} & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_1 & & \\ \hline & & & & \lambda_{q+1} & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{系统特征值有 } q \text{ 个重根 } \lambda_1 \end{cases} \quad (1.27)$$

建立系统(1.22)约当标准型的关键在于求取线性变换矩阵  $\mathbf{T}$ 。

(1) 系统特征值无重根时

$$\mathbf{T} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \dots \quad \mathbf{P}_n] \quad (1.28)$$

其中,  $\mathbf{P}_i$  为互异特征根  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  对应的特征向量。

证明:由于系统特征值  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$  互异, 则特征向量  $\mathbf{P}_i$  是线性无关的, 因此  $\mathbf{T} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_n]$  是非奇异的, 即  $\mathbf{T}^{-1}$  存在。

在  $\mathbf{AT} = \mathbf{A}[\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_n]$  中, 由特征向量的定义知  $\mathbf{AP}_i = \lambda_i \mathbf{P}_i$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{AT} &= [\mathbf{AP}_1 \ \mathbf{AP}_2 \ \dots \ \mathbf{AP}_n] = [\lambda_1 \mathbf{P}_1 \ \lambda_2 \mathbf{P}_2 \ \dots \ \lambda_n \mathbf{P}_n] \\ &= [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.29)$$

式(1.29)两边左乘  $\mathbf{T}^{-1}$ , 有

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathbf{0} & \\ & \mathbf{0} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即矩阵  $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$  是对角矩阵。

**【例 1.9】** 将以下动态系统转换为约当标准型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

解: 方阵  $\mathbf{A}$  的特征值和对应的特征向量在例 1.8 已求出, 为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

线性变换矩阵及其逆矩阵选取为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \mathbf{P}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ -6 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

线性变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}u = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ \mathbf{y} = \mathbf{CT} = [1 \ 2 \ 1] \mathbf{z} \end{cases}$$

(2) 系统特征值有重根时

设  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_1$  有  $q$  个重根, 其他  $n-q$  个特征值  $\lambda_i$  互异, 选取如下线性变换矩阵

$$\mathbf{T} = [\mathbf{P}_1 \ \mathbf{P}_2 \ \dots \ \mathbf{P}_q \ \mathbf{P}_{q+1} \ \dots \ \mathbf{P}_n]$$

其中,  $\mathbf{P}_i (i=q+1, \dots, n)$  为互异特征值对应的特征向量。重根  $\lambda_1$  所对应的特征向量按下式求取:

$$\begin{cases} \lambda_1 \mathbf{P}_1 - \mathbf{A} \mathbf{P}_1 = \mathbf{0} \\ \lambda_1 \mathbf{P}_2 - \mathbf{A} \mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 \mathbf{P}_q - \mathbf{A} \mathbf{P}_q = -\mathbf{P}_{q-1} \end{cases}$$

$\mathbf{P}_1$  是  $\lambda_1$  对应的特征向量,  $\mathbf{P}_i (i=2, \dots, q)$  是广义特征向量。

**【例 1.10】** 将以下动态系统转换为约当标准型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

解: 系统特征方程为

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)^2 = 0$$

解得  $\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = -2$ 。

对应于  $\lambda_{1,2} = -1$  的特征向量  $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$  满足:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = -1 \times \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$$

因此, 有  $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

对应于  $\lambda_{1,2} = -1$  的广义特征向量  $\mathbf{P}_2$  满足  $\lambda_1 \mathbf{P}_2 - \mathbf{A} \mathbf{P}_2 = -\mathbf{P}_1$ , 即

$$\mathbf{P}_2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则  $\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

计算对应  $\lambda_3 = -2$  的特征向量为  $\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

线性变换矩阵及其逆矩阵选取为

$$\mathbf{T} = [\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

线性变换后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 14 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{z} \end{cases}$$

特殊地, 方阵  $\mathbf{A}$  为标准型  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ 。

(1) 特征值无重根

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

线性变换矩阵  $\mathbf{T}$  是范德蒙德(Vandermonde)矩阵。

(2) 特征值有重根(以  $\lambda_1$  是三重根为例)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & \lambda_4 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & \cdots & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \frac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \cdots & \lambda_4^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

(3) 特征值有共轭复根(以 4 阶为例,  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm j\omega, \lambda_3 \neq \lambda_4$ )

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \sigma & \omega & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \sigma^2 - \omega^2 & 2\sigma\omega & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \sigma^3 - 3\sigma\omega^2 & 3\sigma^2\omega - \omega^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

且有

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

## 2. 动态系统的并联型实现

传递函数为

$$G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (1.34)$$

系统(1.34)特征值  $\lambda_i$  是互异的, 或者有重根。下面将分情况讨论。

(1) 特征值互异时, 传递函数可展开成分式形式

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\dots(s-\lambda_n)} \\ &= \frac{c_1}{s-\lambda_1} + \frac{c_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{c_n}{s-\lambda_n} \end{aligned} \quad (1.35)$$

式(1.35)对应的积分器并联型模拟结构图如图 1.14(a)或(b)所示。

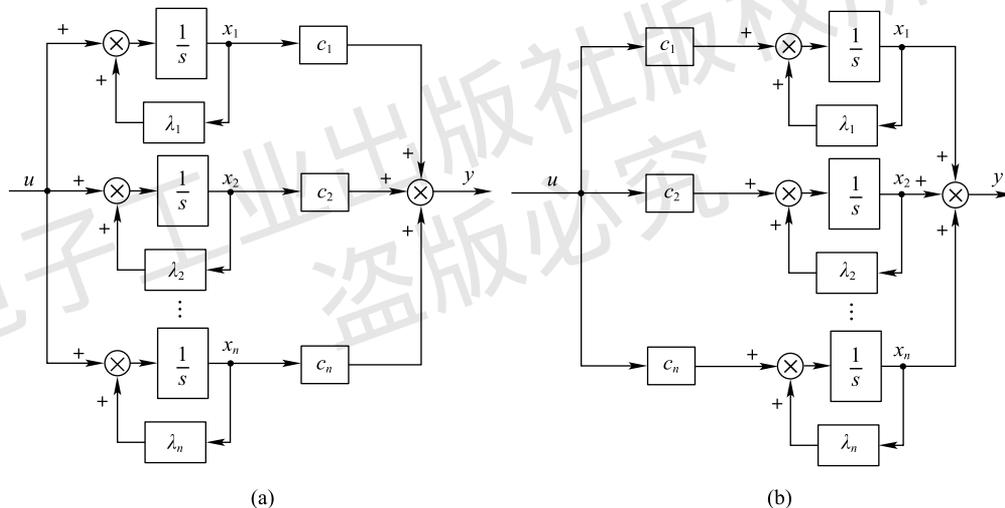


图 1.14 积分器并联型模拟结构图

选取积分器的输出为状态变量, 系统状态空间模型是对偶的, 可表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.36)$$



### 1.3.3 从状态空间模型求取传递函数阵

上面介绍了从传递函数求取状态空间模型的系统实现问题,本节将讨论从状态空间模型求取传递函数阵问题。

已知动态系统的状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \quad (1.40)$$

其中,  $\boldsymbol{x}$  为  $n$  维状态向量;  $\boldsymbol{A}$  为  $n \times n$  维系统矩阵;  $\boldsymbol{B}$  为  $n \times r$  维输入矩阵;  $\boldsymbol{u}$  为  $r$  维输入向量;  $\boldsymbol{y}$  为  $m$  维输出向量;  $\boldsymbol{C}$  为  $m \times n$  维输出矩阵;  $\boldsymbol{D}$  为  $m \times r$  维直接传递矩阵。

在零初始条件的前提下,对式(1.40)进行拉普拉斯变换,得

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \\ \boldsymbol{Y}(s) = (\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{U}(s) \end{cases} \quad (1.41)$$

因此,  $\boldsymbol{U}(s)$  与  $\boldsymbol{X}(s)$  间的传递函数阵为

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{u}\boldsymbol{x}}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad (1.42)$$

$\boldsymbol{U}(s)$  与  $\boldsymbol{Y}(s)$  间的传递函数阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} &= \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|} [\boldsymbol{C}\text{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|] \in \mathbb{R}^{m \times r} \end{aligned} \quad (1.43)$$

其中,  $G_{ij}(s)$  是标量传递函数,表示第  $j$  个输入对第  $i$  个输出的影响。当  $i \neq j$  时,  $G_{ij}(s)$  表示不同标号的输入和输出有耦合关系。

式(1.43)中,  $\boldsymbol{G}(s)$  的分母  $|s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$  是系统矩阵的特征多项式。可以证明,同一动态系统,可以用不同的状态空间模型表示,但传递函数阵是相同的。采用线性变换  $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$  后,新的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \quad (1.44)$$

对应的传递函数阵  $\bar{\boldsymbol{G}}(s)$  为

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{G}}(s) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{T}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T})\boldsymbol{T}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \\ &= \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} \end{aligned} \quad (1.45)$$

已证,同一动态系统的传递函数阵是唯一的。

### 1.3.4 子系统组合后的传递函数阵

在实际系统中,系统由多个子系统并联、串联或反馈组合而成,本节将讨论子系统组合后等效的传递函数阵。

假设第 1 个子系统  $\Sigma(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1)$  的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}_1 \end{cases} \quad (1.46)$$

假设第 2 个子系统  $\Sigma(\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{D}_2)$  的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases} \quad (1.47)$$

### 1. 子系统并联连接

子系统并联,即各子系统输入相同,而组合系统的输出是各子系统输出的代数和。子系统并联连接的结构图如图 1.16 所示。

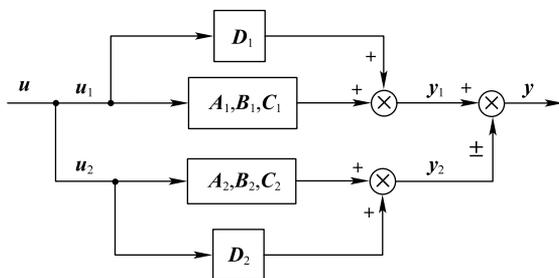


图 1.16 子系统并联连接的结构图

由于  $u = u_1 = u_2$ ,  $y = y_1 \pm y_2$ , 子系统并联连接的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \quad \pm C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2) u \end{cases} \quad (1.48)$$

因此,等效传递函数阵为

$$\begin{aligned} G(s) &= [C_1 \quad \pm C_2] \begin{bmatrix} (sI - A_1)^{-1} & \\ & (sI - A_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} + (D_1 \pm D_2) \\ &= (C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 + D_1) \pm (C_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 + D_2) \\ &= G_1(s) \pm G_2(s) \end{aligned} \quad (1.49)$$

子系统并联连接的等效传递函数阵,等于子系统传递函数阵的代数和。

### 2. 子系统串联

子系统串联连接的结构图如图 1.17 所示。

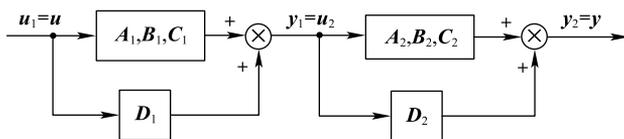


图 1.17 子系统串联连接的结构图

子系统串联连接的等效传递函数阵为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y_2(s) Y_1(s)}{U_2(s) U_1(s)} = G_2(s) G_1(s) \quad (1.50)$$

子系统串联连接的等效传递函数阵,等于子系统传递函数阵的乘积。

### 3. 子系统反馈连接

子系统反馈连接的结构图如图 1.18 所示。

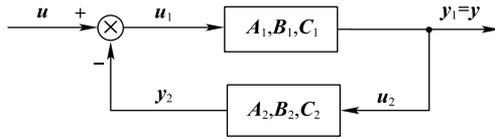


图 1.18 子系统反馈连接的结构图

由于  $u_1 = u - y_2$ ,  $u_2 = y_1$ , 子系统反馈连接的状态空间模型为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & -B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u \\ y = [C_1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.51)$$

因此, 等效传递函数阵为

$$\begin{aligned} G(s) &= [C_1 \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} sI - A_1 & B_1 C_2 \\ -B_2 C_1 & sI - A_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= G_1(s) (I + G_2(s) G_1(s))^{-1} \\ &= (I + G_1(s) G_2(s))^{-1} G_1(s) \end{aligned} \quad (1.52)$$

## 1.4 线性时变系统和非线性系统的状态空间模型

### 1.4.1 线性时变系统

在线性状态空间模型中, 系统矩阵的元素依赖于时间, 则系统称为线性时变系统。

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (1.53)$$

式中

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nm}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B &= \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r} \\ C &= \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ D &= \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times r} \end{aligned}$$

## 1.4.2 非线性系统

非线性系统的动态特性表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \quad (1.54)$$

式中,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  为状态向量;  $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$  为输出向量;  $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_r]^T \in \mathbb{R}^r$  为输入向量;  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{g} = [g_1, g_2, \dots, g_m]^T \in \mathbb{R}^m$  为向量函数。

非线性系统的动态特性也可表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), & i=1, 2, \dots, n \\ y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), & j=1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (1.55)$$

若式(1.54)或式(1.55)的表达式不显式含时间,则为非线性时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (1.56)$$

假设  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)$  是满足式(1.56)的一组解:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \end{cases} \quad (1.57)$$

当考虑输入  $\mathbf{u}$  对  $\mathbf{u}_0$  的偏离  $\delta\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$  对  $\mathbf{x}_0$  的偏离  $\delta\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  对  $\mathbf{y}_0$  的偏离  $\delta\mathbf{y}$  时,可对非线性时不变系统(1.56)的平衡点线性化,即对  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  在  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  附近进行泰勒级数展开:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta\mathbf{u} + \varepsilon_f(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0} \delta\mathbf{u} + \varepsilon_g(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (1.58)$$

式中,  $\varepsilon_f(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}), \varepsilon_g(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u})$  是关于  $\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}$  的高阶项;  $\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}, \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0}$  是向量函数  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  相对状态向量  $\mathbf{x}$  和输入向量  $\mathbf{u}$  的偏导数矩阵:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times r} \end{aligned}$$

忽略高阶项  $\varepsilon_f(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u}), \varepsilon_g(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{u})$ , 则式(1.58)可表示为

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{y} &= \mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0} \delta \mathbf{u}\end{aligned}\quad (1.59)$$

定义  $\bar{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{x}$ ,  $\bar{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{u}$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = \delta \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0}$ ,  $\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0}$ ,  $\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{x_0, u_0}$ ,  $\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{x_0, u_0}$ , 则线性化后的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}} \end{cases}\quad (1.60)$$

**【例 1.11】** 求如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 1.4x_2^3 + 3u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

在  $x_0 = 0$  处的线性化状态空间模型。

**解:** 非线性系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, u) &= x_2 \\ f_2(x_1, x_2, u) &= x_1 + x_2 + 1.4x_2^3 + 3u \\ g(x_1, x_2, u) &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x_0=0} &= 0, \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x_0=0} = 1, \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x_0=0} = 1, \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x_0=0} = 1, \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{x_0=0} = 0, \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{x_0=0} = 3 \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x_0=0} &= 1, \left. \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|_{x_0=0} = 1, \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_0=0} = 0\end{aligned}$$

线性化的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}} \end{cases}$$

## 1.5 MATLAB 在动态系统状态空间模型中的应用

**【例 1.12】** 求  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$  的特征向量。

**解:** 采用 MATLAB 求解该问题, 代码如下:

```
>> A=[0 1 0; 3 0 2; -12 -7 -6];
>> [V,D]=eig(A)
```

结果显示为:

```
V =  
-0.5774  -0.4364   0.2294  
 0.5774   0.8729  -0.6882  
 0.5774  -0.2182   0.6882  
D=  
-1.0000    0    0  
 0  -2.0000    0  
 0    0  -3.0000
```

上述指令返回特征值的对角矩阵  $D$  和矩阵  $V$ , 矩阵  $D$  的对角元素是  $A$  的特征值, 矩阵  $V$  的列是  $A$  对应的特征向量。

**【例 1.13】** 将以下动态系统转换为约当标准型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

解: 采用 MATLAB 求解该问题, 代码如下:

```
>> A = [0 1 0; 3 0 2; -12 -7 -6];  
>> J = jordan(A)  
>> A = [0 1 0; 3 0 2; -12 -7 -6];  
>> B = [0; 0; 1];  
>> C = [1 0 0];  
>> D = 0;  
>> sys = ss(A, B, C, D);  
>> csys = canon(sys, 'modal')
```

结果显示为:

```
csys=  
A=  
      x1  x2  x3  
x1  -1   0   0  
x2   0  -2   0  
x3   0   0  -3  
B=  
      u1  
x1  -2.291  
x2   5.679  
x3   3.905  
C=  
      x1  x2  x3  
y1  -0.4364  -0.3522  0.2561
```

$D=$   
 $u1$   
 $y1 \quad 0$   
 Continuous-time state-space model.

## 小 结

本章是现代控制理论的基础,介绍了采用时域分析方法构建动态系统的状态空间模型和系统模型的线性变换,并阐述线性时变系统和非线性系统的状态空间模型。其中,本章重点知识为建立状态空间模型。

## 人物小传——钱学森

钱学森(1911—2009),中国近代力学和航天事业的奠基人之一,中国科学院学部委员(院士),中国工程院院士。1999年,获中共中央、国务院、中央军委颁发的“两弹一星功勋奖章”。钱学森在应用力学、工程控制论、航空工程、火箭导弹技术、系统工程和系统科学等领域成就斐然,主要著作包括《工程控制论》《物理力学讲义》《星际航行概论》《论系统工程》等。

钱学森是一位智慧的教育家,为我国培养了大批优秀的人才;作为一位杰出的科学家,他对航天技术、系统科学和系统工程做出了巨大的和开拓性的贡献;他毕生探索科学、追求真理、勇于创新、淡泊名利,为我国科技事业呕心沥血,为国家富强、民族振兴不懈奋斗。

## 习 题 1

1-1 根据如图 1.19 所示的多回路反馈系统框图,画出模拟结构图,并求状态空间模型。

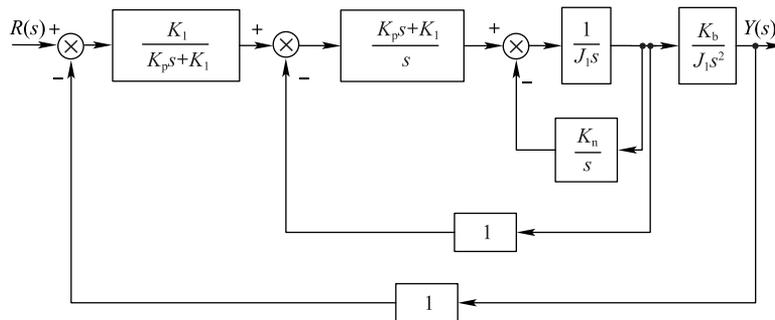


图 1.19 多回路反馈系统框图

1-2 电子电路图如图 1.20 所示,选取电压源电压为输入量、电容端电压和电感电流为状态变量,建立电路的状态方程和输出方程。

1-3 双质量块-弹簧系统如图 1.21 所示,求该系统的状态空间模型。

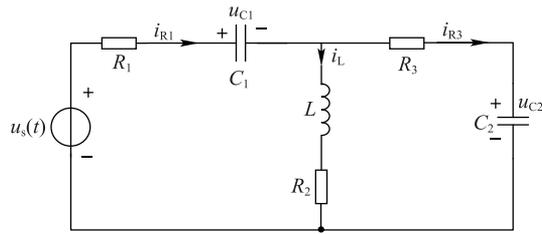


图 1.20 电子电路电路图

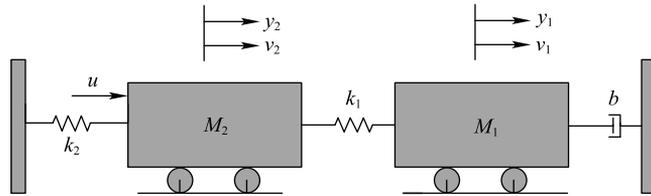


图 1.21 双质量块-弹簧系统

1-4 双输入双输出系统的模拟结构图如图 1.22 所示,求该系统的状态空间模型和传递函数阵。

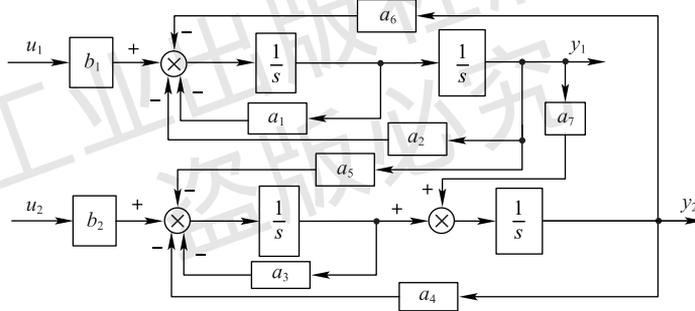


图 1.22 双输入双输出系统的模拟结构图

1-5 根据系统的微分方程列写状态空间模型,并画出其模拟结构图。

(1)  $\ddot{y} + 4\dot{y} + 6y = 20u$

(2)  $\ddot{y} + 3\dot{y} + 3y = \ddot{u} + 2\dot{u} + 4u$

1-6 根据系统传递函数,求约当标准型实现,并画出模拟结构图。

(1)  $G(s) = \frac{5(s-2)}{s(s+2)(s+4)}$

(2)  $G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+4)^3(s+5)}$

1-7 潜艇的深度控制十分重要,考虑竖直方向潜艇动力学特性:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.0071 & -0.111 & 0.12 \\ 0 & 0.07 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -0.095 \\ 0.072 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

其中,潜艇的状态变量  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  依次为俯仰角、俯仰角速率、攻角,输入变量  $u$  是尾部控制面的倾斜度。画出潜艇系统的模拟结构图,并求其传递函数。

1-8 直升机需要人工操控才能实现低空悬停,在恶劣天气情况下更应如此。直升机悬停时模型的状态矩阵  $\mathbf{A}$  为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

试求直升机悬停模型的特征值。

1-9 计算以下矩阵的特征值和特征向量。

$$(1) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(3) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(4) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1-10 将以下状态空间模型转化成为约当标准型。

$$(1) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

1-11 将以下两个子系统分别串联连接、并联连接,求组合系统的等效传递函数阵。

$$\mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+3} \\ 0 & \frac{s+2}{s+3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+4} & \frac{1}{s+5} \\ \frac{1}{s+2} & 0 \end{bmatrix}$$

1-12 将以下两个子系统按图 1.18 所示反馈连接,求闭环传递函数阵。

$$\mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & -\frac{1}{s} \\ 0 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1-13 如图 1.23 所示的单摆系统,非线性运动方程为

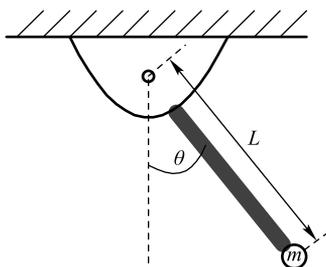


图 1.23 单摆系统

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

其中,  $\theta$  为摆角,  $k$  为支点的摩擦系数,  $m$  为小球质量(摆杆质量忽略不计),  $g$  为重力常数,  $L$  为单摆长度。

- (1) 推导单摆的状态空间模型。
- (2) 在平衡点  $\theta(0) = 0^\circ$  附近, 对单摆的运动方程线性化。

电子工业出版社版权所有  
盗版必究