

应用型人才培养新形态精品教材

高职高等数学

陈申宝 包丽君 主 编

孔豪杰 赵杏娟 副主编

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本教材是根据教育部要求和高职高专教育信息化、数字化的时代要求,结合最新的课程改革理念和教学改革成果编写而成的新形态教材。本教材融入课程思政、数学建模案例与数学软件 MATLAB 的使用,可体现高职高等数学课程的思想性、科学性、实用性,从知识、能力、素质等方面全面培养学生的数学综合素养。本教材通俗易懂,具有注重应用、融入课程思政等符合高职高专教育需求的特色。

本教材主要内容包括函数、极限与连续,导数与微分,不定积分与定积分,常微分方程,无穷级数,向量代数与空间解析几何,共 6 章。每章都包含数学文化、基础理论知识、知识拓展、数学实验、知识应用模块。本教材每章都有习题 A、习题 B,章中的小节也配有一定的练习题,可供有不同需求的读者选用。附录 A 为初等数学常用公式和相关预备知识,附录 B 为基本初等函数的图像和性质,附录 C 为参考答案,仅供读者参考。

本教材可作为高职高专院校各专业高等数学或应用数学课程的教材或参考书,也可供成人高校相关专业或参加专升本等自学考试的考生学习参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

高职高等数学 / 陈申宝, 包丽君主编. —北京: 电子工业出版社, 2023.9

ISBN 978-7-121-46260-3

I. ①高… II. ①陈… ②包… III. ①高等数学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 167682 号

责任编辑: 王 花

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱

邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 18.5 字数: 474 千字

版 次: 2023 年 9 月第 1 版

印 次: 2023 年 9 月第 1 次印刷

定 价: 56.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010) 88254609 或 hzh@phei.com.cn。

前言

本教材旨在满足高职高专教育以就业为导向，培养面向生产和管理第一线的、具有一定理论知识和较强动手能力的应用型人才的要求，以及高职高专教育信息化、数字化的时代要求，使学生具备适应社会需求变化和可持续发展的能力，并提高高职高等数学的教学质量。

本教材按照“以应用为目的，以必需、够用为度”原则编写内容，使学生在掌握高中数学的基础上，能够在有限时间内掌握专业所需的高职高等数学基本知识和基本技能，培养学生的计算能力、逻辑思维能力、分析及解决问题的能力、创新能力等。本教材具有思想性、科学性、实用性和内容方面的弹性，易学、易懂、易教，并具有以下特色。

1. 具备新形态教材形式

为适应当代学生的学习方式，满足高职高专教育信息化、数字化的时代要求，本教材对重要知识点辅以微视频教学，微视频内容简洁、制作良好，便于帮助学生预习和快速掌握知识点，满足其个性化学习需要。

2. 开展模块化教学

本教材每章都包含数学文化、基础理论知识、知识拓展、数学实验和知识应用模块。基础理论知识模块注重“必需、够用”，对必学内容进行整合，省略定理的严格证明，力求用清晰、直观、形象的方式来讲解定理，便于学生对知识的理解和掌握。知识应用模块不仅介绍数学在现实生活中的应用，还介绍其在专业中的应用，使学生体会到学习数学的必要性。

3. 引例驱动，以解决问题为导向

本教材每节尽量先以引例或问题作为引入，再抽象出数学概念。知识的展开以解决问题为导向，使数学从实际中来，又应用到实际中去，可以满足高职高专教育培养应用型人才的要求。

4. 结合专业，注重应用

本教材内容为高职高专各专业学生学习后续课程所需掌握的内容，每章的知识应用模块会介绍数学在专业中的应用，以体现高职高专教育的特点。

5. 融入课程思政，提高学生的数学素养

本教材每章都介绍数学思想或数学史、数学名人，弘扬工匠精神，旨在激发学生的学习兴趣，培养其细致、坚毅等数学品质，提高其数学素养。

6. 融合数学建模思想，强调数学软件 MATLAB 的使用

高职高等数学的课时有限，要在有限课时内让学生掌握必需的数学知识，就要减少其

在计算技巧上所花的时间. 为此, 本教材每章都融入数学软件 MATLAB 的使用, 使学生有较多的时间学习基本概念与数学的应用. 同时, 每章的知识应用模块都会结合数学软件 MATLAB 介绍数学建模案例.

7. 因材施教, 分层次教学

本教材的知识拓展模块供教师选教和学有余力的学生选学. 每章末都有习题 A 和习题 B, 习题 A 供所有学生练习, 习题 B 仅供对知识掌握程度较高的学生练习, 满足分层次教学需要, 也满足部分学生专升本和数学建模竞赛等需要, 符合高职高专学生数学基础差别较大的实际情况和高职高专教育教学的理念.

本教材的主要内容 of 高等数学知识, 涉及函数、极限与连续, 导数与微分, 不定积分与定积分, 常微分方程, 无穷级数, 向量代数与空间解析几何, 共 6 章. 本教材通俗易懂, 有利于实现“教、学、做”一体化.

本教材的结构布局和统稿由浙江工商职业技术学院的陈申宝完成. 第 1~4 章由陈申宝与宁波开放大学的包丽君编写, 第 5 章和第 6 章分别由浙江工商职业技术学院的孔豪杰和赵杏娟编写.

本教材在编写过程中得到了浙江工商职业技术学院的领导和相关兄弟院校的大力支持, 电子工业出版社的有关人员也为本教材的编写和出版提供了帮助, 编者还参考了一些相关书籍, 在此对其作者及以上提供了支持和帮助的人员一并致谢.

由于编者水平有限, 因此教材中难免存在不足之处, 敬请各位专家、同行及广大读者批评指正. 同时欢迎大家将意见反馈给编者.

编 者

2023 年 3 月



目 录

绪论	1
第 1 章 函数、极限与连续	4
数学文化——函数、极限的思想	4
基础理论知识	5
1.1 函数	5
1.2 极限的概念	12
1.3 无穷小与无穷大	18
1.4 极限的运算	22
1.5 函数的连续性	28
知识拓展	32
1.6 无穷小的比较、函数的间断点类型、闭区间上连续函数的性质、函数曲线的渐近线	32
数学实验	38
1.7 实验——用 MATLAB 进行绘图和极限计算	38
知识应用	47
1.8 函数、极限与连续的应用	47
习题 A	52
习题 B	53
第 2 章 导数与微分	55
数学文化——导数的起源与牛顿简介	55
基础理论知识	56
2.1 导数的基本概念	56
2.2 导数的基本公式与四则运算法则	64
2.3 复合函数和隐函数的导数	67
2.4 高阶导数	71
2.5 函数的微分	73
知识拓展	78
2.6 参数方程所确定的函数的导数、微分中值定理、函数的凹凸性与拐点	78
数学实验	84
2.7 实验——用 MATLAB 求导数	84
知识应用	86



2.8 导数的应用	86
习题 A	99
习题 B	103
第 3 章 不定积分与定积分	106
数学文化——莱布尼茨的故事	106
基础理论知识	107
3.1 不定积分的基本概念	107
3.2 不定积分的积分方法	112
3.3 定积分的基本概念	121
3.4 微积分基本定理与定积分的计算	128
知识拓展	133
3.5 变上限的定积分与广义积分	133
数学实验	138
3.6 实验——用 MATLAB 计算不定积分和定积分	138
知识应用	141
3.7 定积分的应用	141
习题 A	147
习题 B	149
第 4 章 常微分方程	151
数学文化——杰出的数学家欧拉	151
基础理论知识	152
4.1 微分方程的基本概念	152
4.2 可分离变量的微分方程	155
4.3 一阶线性微分方程	162
知识拓展	165
4.4 二阶线性微分方程	165
数学实验	173
4.5 实验——用 MATLAB 求微分方程	173
知识应用	175
4.6 常微分方程的应用	175
习题 A	184
习题 B	186
第 5 章 无穷级数	188
数学文化——级数的发展与傅里叶简介	188
基础理论知识	189
5.1 常数项级数的基本概念	189

5.2 常数项级数的审敛法	192
5.3 幂级数	196
知识拓展	199
5.4 傅里叶级数	199
数学实验	204
5.5 实验——用 MATLAB 求幂级数的和及泰勒级数展开式	204
知识应用	206
5.6 幂级数展开式的应用	206
习题 A	209
习题 B	211
第 6 章 向量代数与空间解析几何	214
数学文化——解析几何的发明者笛卡儿和费马	214
基础理论知识	215
6.1 向量及其线性运算	215
6.2 数量积与向量积	222
6.3 平面及其方程	227
6.4 空间直线及其方程	232
知识拓展	236
6.5 混合积、点到直线的距离、异面直线间的距离	236
数学实验	239
6.6 实验——用 MATLAB 求数量积、向量积、夹角	239
知识应用	241
6.7 平面向量的应用	241
习题 A	243
习题 B	244
附录 A 初等数学常用公式和相关预备知识	247
附录 B 基本初等函数的图像和性质	254
附录 C 参考答案	257
参考文献	286

绪 论

俗话说“开卷有益”，为使广大读者认识到数学的重要性并提高对数学的学习兴趣，在本教材开篇，编者想谈谈对“为什么学习高等数学”“高等数学有哪些内容”“如何学好高等数学”这3个问题的一些认识。

一、为什么学习高等数学

1. 数学是现代科学技术的基础

数学是自然科学、工程技术科学、经济管理科学和社会科学等的基础。在现代科学中，任何一门学科的发展都离不开数学，可以说“科学技术就是数学技术”。

2. 学习高等数学的重要性

本教材将要介绍的高等数学主要由一元微积分、常微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何等组成。微积分是微分和积分的统称，英文为 **Calculus**，其含义为计算。微积分的产生是数学史上的一件大事，也是人类自然科学史上的一件大事。微积分是人类思维的伟大成果，是开启近代文明的钥匙，其思想方法对自然科学的各个领域都产生了巨大的推动作用，已成为人类认识和改造世界的有力工具，这充分显示了数学的发展对人类文明的影响。微积分作为一个基本的处理连续数学问题的工具，被广泛地应用于自然科学、工程技术科学、经济管理科学等领域。恩格斯曾评价道：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。”他还曾说：“在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的产生那样被看作人类精神的最高胜利了。”“计算机之父”约翰·冯·诺依曼（John von Neumann, 1903—1957）曾评价道：“微积分是近代数学中最伟大的成就，无论对它的重要性做怎样的估计都不会过分。”时至今日，微积分已成为高校中许多专业的必修课程，微积分已经并将继续影响和改变人们的生活。同样，常微分方程、无穷级数、向量代数与空间解析几何等也被广泛地应用于自然科学、工程技术科学、经济管理科学等领域。

3. 学习高等数学是学习后续专业课程的基础

无论计算机专业、电子技术专业、数控技术专业等工程类专业，还是会计专业、投资理财专业等经济管理类专业，在专业的学习中必然要用到极限、导数、积分等相关高等数学知识。若没有这些高等数学知识作为基础，则后续专业课程的学习很可能是肤浅、困难的。

4. 学习高等数学可以提高个人能力与素质

日本数学教育家米山国藏说过：“学生在学校中学到的数学知识，若毕业后没什么机会去用，一两年后，则很快就忘掉了。然而，不管他们从事什么工作，铭记在心的数学精神及数学的思维方法、研究方法、推理方法、看问题的着眼点等，却能随时随地发生作用，使他们终身受益。”学习高等数学能提高个人的思维能力、分析和解决实际问题的能力及创新能力，使他们具备终身学习的能力与素质。数学家们的奋斗故事，也将鼓励学生在工作、生活中碰到困难时能百折不挠、顽强不屈。同时，对一部分专升本的学生来说，学习高等数学也是一种硬性要求。

二、高等数学有哪些内容

1. 微积分的历史回顾

从14世纪开始的欧洲文艺复兴时期起，工业、农业、航海事业与商业的大规模发展开启了一个新的经济时代。生产力在此时得到了很大的发展，生产实践的发展向自然科学提出了新的挑战，迫切需要力学、天文学等基础学科的发展。由于这些学科都是深度依赖于数学的，因此其发展也推动了数学的发展。科学的发展对数学提出的种种要求可汇总成几个核心问题：运动中速度与距离的互求问题，求曲线的切线问题，求长度、面积、体积与重心问题，求最大值和最小值问题等。

为了解决上述几个核心问题，微积分在17世纪至少被十几个较知名的数学家和几十个不太知名的数学家探索过。例如，费马（Fermat）、巴罗（Barrow）都对求曲线的切线及由曲线围成的图形的面积问题有过深入的研究，并且取得了一些成果，但是他们都没有意识到微积分的重要性。17世纪下半叶，牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibniz）在前人的研究基础上，创立了微积分学，使其成为一门独立的学科。微积分是能应用于许多类函数的一种普遍方法。

牛顿发现了微积分的一般计算方法，确立了微分与积分的逆运算关系（微积分基本定理），他在其划时代巨著《自然哲学之数学原理》中首次发表了这些成果，把微积分称为“流数术”。莱布尼茨是与牛顿同时代的杰出数学家和哲学家，他主要从几何角度出发研究了微积分的基本问题，确立了微分与积分之间的互逆关系，其创设的便利符号“ d ”和“ $\int$ ”一直沿用至今。

17世纪以来，微积分不断发展并被广泛应用于天文学、物理学中的各种实际问题的求解中。但在19世纪下半叶之前，其数学分析的严密性问题一直没有得到解决。在18世纪时，包括牛顿和莱布尼茨在内的许多知名数学家都意识到了这个问题并针对这个问题做了一定研究，但都没有成功地解决这个问题。此时微积分的基础是混乱、不清楚的。许多英国数学家可能仍然被古希腊的几何学束缚，所以怀疑微积分的全部内容。这个问题一直到19世纪下半叶才由德国数学家柯西（Cauchy）成功解决，柯西极限存在准则为微积分注入了严密性，由此极限理论得以创立。极限理论的创立使微积分从此建立在严密的数学分析基础之上，这也为20世纪数学的发展奠定了坚实的基础。

2. 本教材的内容解析

本教材主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，不定积分与定积分，常微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何。各项内容主要研究的问题：函数——变量之间依存关系的数学模型；极限与连续——变量无限变化的数学模型和变量连续变化的数学模型；导数与微分——函数变化率和增量的估值描述；不定积分——微分的逆运算问题；定积分——求总量的问题；常微分方程——含变化率的方程问题；无穷级数——无限个离散量之和的数学模型；向量代数与空间解析几何——空间直线与平面问题。本教材同时结合数学软件 MATLAB 来使读者认识数学应用。

三、如何学好高等数学

1. 要有自信心

数学的抽象性可能会使读者觉得数学很难，但如果一个人对数学有兴趣并且有自信心，那么他就会接受高等数学这门课程，发现数学其实并不难。只要建立自信心，就会发现数学具有其独特的魅力和内在美。

2. 尽可能做好预习

预习可以提高听课效率，带着问题去听课，能更快地掌握知识。

3. 上课认真听讲

认真听老师讲解提出、分析、思考、解决问题等的过程，可以更好地获取新知识，达到事半功倍的效果。同时，要结合自己的思考，及时向老师请教不懂的地方。

4. 做好课后复习并独立完成作业

复习是巩固所学知识的一种好方法，通过复习可以达到抓住要领、提取精华、加深理解、强化记忆的效果。复习包括每节、每章的复习及期末总复习。学习数学必须做题，所以认真、及时、独立完成作业是一个十分重要的学习环节。通过做题可以加深对数学概念、定义、定理的理解，提高计算速度。

5. 及时解决疑难问题

由于微积分知识具有连贯性，前面知识的学习效果会影响后面知识的学习效果，因此有疑难问题要及时解决，不要“拖欠”，也可对某些问题提出自己的见解，与同学、老师一起探讨。当然，学有余力的同学还可到图书馆借阅相关书籍，进行更深入的学习。

法国数学家笛卡儿曾说：“没有正确的方法，即使有眼睛的博学者也会像盲人一样盲目摸索。”学习必须讲究方法。希望读者能够尽快掌握正确的学习方法，把高等数学这门课程学好。

第 1 章

函数、极限与连续



数学文化——函数、极限的思想

在现实世界中，事物大都在一定的空间中运动着．17 世纪初，数学首先在对运动（如天文、航海中的运动）的研究中引出了函数这个基本概念．在接下来的数年中，这个概念在很多科学研究工作中占据了中心位置．对于一个未知的量，如果能够找到它与一个已知量的关系，就可利用已知量来研究这个未知量．函数就是通过一个或几个已知量来研究未知量的工具．

函数描述了自然界中量的依存关系，反映了一个事物随着另一个事物变化而变化的关系和规律．函数的思想方法就是提取问题的数学特征，用联系、变化的观点提取数学对象，抽象其数学特征，建立其函数关系，并利用函数的性质研究、解决问题的一种数学思想方法．

函数的思想方法主要包括以下几个方面：运用函数的有关性质解决函数的某些问题；以变化的观点分析和研究具体问题中的数量关系，建立数学对象的函数关系，运用函数的知识使问题得到解决；通过适当的数学变化和构造，将一个非函数形式的问题转化为函数形式，并运用函数的性质来解决这一问题．

在运用函数的思想方法解决问题的过程中，人们注意到，用函数解决问题后会出现一个共同特点，或者说会出现一种共同的指向，那便是用有限的公式去描述一个有着无限数据的事物．在经过归纳总结后，科学家们用一个简洁的公式描述了这个性质：“已知+未知+规定思想”．“已知”是指“定量”；“未知”是指“变量”；“规定思想”是人们根据事物的规律构造的一种客观函数关系，是用于解决问题的一种策略（人为的因素造就一个自我的空间——规定思想）．大家在中学阶段学习过的常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数统称为基本初等函数．以基本初等函数为基础，可构造出许多复杂的函数，人们通过这些函数或通过拟合这些函数的方法来研究现实世界中事物复杂的相互关系．

极限思想可以追溯到古代，我国魏晋时期的数学家刘徽提出了“割圆术”（用圆内接正多边形的周长逼近圆的周长的极限思想来近似计算圆周率 π ），就是建立在直观基础上的一种原始的极限思想的应用；古希腊人的穷竭法也蕴含了极限思想．由于在 16 世纪，欧洲的生产力得到了极大的发展，只运用初等数学的方法已无法解决生产和技术中的大量问题，

因此要求数学突破只研究常量的传统范围, 提供能够用以描述和研究运动、变化过程的新工具, 这就促进了极限思想的研究和发展.

所谓极限思想, 是指用极限概念分析和解决问题的一种数学思想. 用极限思想分析和解决问题的一般步骤: 对于被考察的未知量, 先设法构思一个与它有关的变量, 并确保该变量通过无限过程的结果就是被考察的未知量; 然后用极限计算来求得未知量.

存在一种情况: 当需要确定某个量时, 首先要确定的不是这个量本身, 而是它的近似值, 而且所确定的不是一个而是一连串越来越精确的近似值; 通过考察这一连串近似值的趋向, 把该量的精确值确定下来. 这就是极限思想方法的运用. 极限思想是近代数学中的一种重要思想, 也是微积分的基本思想. 极限思想在现代数学乃至物理学等学科中都有着广泛的应用, 这是由它本身固有的思维功能决定的. 极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立与统一关系, 是唯物辩证法的对立与统一规律在数学领域中的应用. 借助极限思想, 人们可以从有限认识无限, 从不变认识变, 从直线图形认识曲线图形, 从量变认识质变, 从近似认识精确.



基础理论知识

1.1 函数

【引例】某学生一个月的生活费用为 1000 元, 假定其吃饭用去 p 元, 其他消费 (如买书、买衣服等) 用去 q 元, 则 $p+q=1000$, 显然这个学生可根据吃饭费用的多少来考虑其他消费额度, 即 $q=1000-p$.

上面的引例反映了在某个特定过程中两个变量 (在过程中发生变化的量) 之间的依存关系. 变量之间的这种关系就是函数.

函数是现代数学的基本概念之一, 是中学阶段, 特别是高中阶段数学学习中的重要内容, 也是高等数学的主要研究对象. 这里将中学阶段的函数知识进行简要总结, 并补充一些必备的知识, 为进一步学习打下基础.

1.1.1 函数的概念

1. 区间与邻域

1) 区间

开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}$.

闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$.

左开右闭区间: $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.

左闭右开区间: $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.

无穷区间: $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$, $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$.



2) 邻域

定义 1-1 设 $a, \delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, 数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 点 a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 集合 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ 称为点 a 的去心 δ 邻域 (又称空心邻域), 记为 $U^\circ(a, \delta)$.

2. 函数的定义

定义 1-2 设 x, y 是两个变量, D 是一个非空实数集合, 如果对于 D 中的每个数值 x , 按照某种对应规则 f , 都有唯一确定的数值 y 与之对应, y 就称为定义在集合 D 上的 x 的函数, 记为 $y = f(x)$, $x \in D$. x 称为自变量, y 称为因变量或函数, f 是函数符号. 集合 D 称为函数的定义域.

当 x 取定值 x_0 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值, 记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$, 当 x 取遍 D 中的一切实数时, 对应的函数值的集合 M 称为函数的值域.

说明:

- (1) 函数的定义域和对应规则是确定函数的两个基本要素, 与用什么字母表示无关.
- (2) 在实际问题中, 函数的定义域应根据问题的具体意义具体确定, 若讨论问题的是纯数学问题, 则取使函数表达式有意义的所有实数组成的集合作为函数的定义域.

[例 1-1] 求函数 $y = \frac{1}{x} + \sqrt{x+1} - \ln(1-x)$ 的定义域.

解: 要使该函数有意义, 应满足 $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -1 \\ x < 1 \end{cases}$, 所以该函数的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1)$.

[例 1-2] 某圆柱形容器的容积为 V , 试将它的侧面积表示成底面半径的函数, 并确定其定义域.

解: 设圆柱的底面半径为 r , 高为 h , 侧面积为 S .

因为 $V = \pi r^2 h$, 即 $h = \frac{V}{\pi r^2}$, 根据圆柱侧面积计算公式, $S = 2\pi r h$, 所以 $S = \frac{2V}{r}$, 由实际意义可知, 其定义域为 $(0, +\infty)$.

3. 函数的表示方法

函数的表示方法通常有 3 种: 解析法 (又称公式法)、列表法 (又称表格法)、图像法.

1) 解析法

某汽车租赁公司出租某种汽车, 收费标准为每天 200 元的基本租金加 15 元/千米的行程费. 若租用一辆该种汽车一天, 则行程为 x (单位为千米) 时的租车费 $y = (200 + 15x)$ 元. 这是用解析式来表示函数的方法, 称为解析法.

2) 列表法

将自变量的值及对应的函数值列成表的方法称为列表法, 如平方表、三角函数表等,

都是用列表法来表示函数关系的.

3) 图像法

在坐标系中用图像来表示函数关系的方法称为图像法. 通过某个函数的图像, 可以方便地研究其某些性质.

这 3 种表示方法各有特点, 解析法便于对函数进行精确的计算和深入的分析; 列表法简单明了, 便于查得某个函数值; 图像法形象直观, 能从图像上看出函数的某些性质.

4. 分段函数

当用解析法表示函数时, 还有一种特殊形式.

[例 1-3] 浙江省宁波市的电费采用阶梯收费方式, 对于非峰谷分时用户, 月用电量低于 $100\text{kW}\cdot\text{h}$ (含 $100\text{kW}\cdot\text{h}$) 的部分, 按 0.538 元/ $(\text{kW}\cdot\text{h})$ 收费; 月用电量在 $100\sim 200\text{kW}\cdot\text{h}$ (含 $200\text{kW}\cdot\text{h}$) 的部分, 按 0.568 元/ $(\text{kW}\cdot\text{h})$ 收费; 月用电量超过 $200\text{kW}\cdot\text{h}$ 的部分, 按 0.638 元/ $(\text{kW}\cdot\text{h})$ 收费. 求电费 y (元) 与用电量 x ($\text{kW}\cdot\text{h}$) 之间的函数关系.

解: 由题意得

$$y = \begin{cases} 0.538x & 0 \leq x \leq 100 \\ 53.8 + (x - 100) \times 0.568 & 100 < x \leq 200 \\ 110.6 + (x - 200) \times 0.638 & x > 200 \end{cases}$$

该函数在其定义域的不同取值范围内, 用不同的解析式来表示, 这样的函数称为分段函数. 分段函数在整个定义域上是一个函数, 而不是几个函数, 其定义域为各段自变量取值集合的并集. 在画分段函数的图像时, 要画出各区间相应的解析式的图像, 特别要注意其在交接点处一般有比较大的变化. 在求分段函数的函数值时, 应把自变量的值代入相应取值范围的

解析式中进行计算. 例如, 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

也是分段函数, 其定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $M = [0, +\infty)$, 其图像如图 1-1 所示.

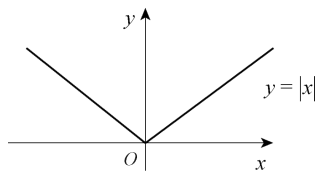


图 1-1

1.1.2 函数的几种常见性质

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义.

1. 有界性

若存在正数 M , 使得对任意 $x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上是有界的; 若这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上是无界的.

例如, $f(x) = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界, 因为 $|\sin x| \leq 1$,

$g(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 在 $(0,1)$ 内无界, 但在 $(1,2)$ 内有界, 如图 1-2

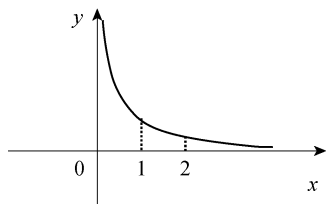


图 1-2



所示. 所以函数的有界和无界除了与函数本身有关, 还与所讨论的区间有关.

2. 单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 内随着 x 的增大而增大 (或减小), 即对于 I 内的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增大 (或单调减小) 的, 区间 I 叫作函数 $f(x)$ 的单调增大区间 (或单调减小区间). 单调增大函数与单调减小函数统称为单调函数, 单调增大区间与单调减小区间统称为单调区间.

单调增大函数的图像随 x 的变大而上升; 单调减小函数的图像随 x 的变大而下降.

例如, 函数 $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增大的, 在 $(-\infty, 0]$ 内是单调减小的, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内则不是单调的.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 且对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为奇函数; 若函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 且对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如, 函数 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 函数 $f(x) = \sin x$ 是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$, 若存在一个常数 $T \neq 0$, 使得对于定义域 D 内的一切 x , 有 $x+T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为 $f(x)$ 的一个周期. 周期函数的周期通常是指它的最小正周期 (满足上式的最小正数 T), 简称周期, 但并非每个周期函数都有最小正周期.

周期函数图像的特点: 对于周期为 T 的函数, 只要画出它在任意区间 $[a, a+T]$ 上的图像, 并将图像一个周期一个周期地左右平移, 就可得到整个周期函数的图像.

例如, $f(x) = \sin x$ 和 $f(x) = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, $f(x) = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

1.1.3 初等函数及其相关概念

1. 反函数

定义 1-3 设函数 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 值域为 M , 若对于 M 中的每个数值 y , 通过关系式 $y = f(x)$ 都有唯一确定的数值 x 与之对应, 则称在集合 M 中定义了一个关于 y 的函数, 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x = f^{-1}(y)$, $y \in M$. 按习惯记法 (用 x 表示自变量), 函数 $y = f(x)$ 的反函数常记为 $y = f^{-1}(x)$, $x \in M$, 其定义域为函数 $y = f(x)$ 的值域, 值域为函数 $y = f(x)$ 的定义域. 函数 $y = f(x)$ 称为**直接函数**.

函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ ($x \in M$) 的图像关于直线 $y = x$ 对称. 例如, 函数 $y = 2x$ 的反函数为 $y = \frac{x}{2}$, 如图 1-3 所示.

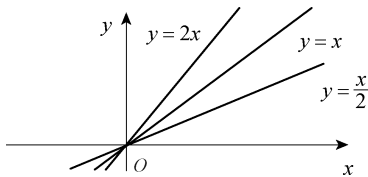


图 1-3

2. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这 6 类函数统称为基本初等函数.

基本初等函数是研究其他更为复杂的函数的基础, 基本初等函数的图像和性质见附录 B.

3. 复合函数

函数 $y = \sin x^2$ 是不是基本初等函数? 显然不是! 但它可看作由两个基本初等函数 $y = \sin u$ 和 $u = x^2$ 构成的函数, 这种函数叫作复合函数.

定义 1-4 设 y 是 u 的函数, $y = f(u)$, 而 u 又是 x 的函数, $u = \varphi(x)$, 且 $u = \varphi(x)$ 的值域或部分值域包含在函数 $y = f(u)$ 的定义域内, 那么 y (通过 u 的关系) 也是 x 的函数, 这个函数叫作 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数, 简称**复合函数**, 记为 $y = f[\varphi(x)]$, 其中 u 称为中间变量.

说明:

(1) 不是任意两个函数都可以构成一个复合函数的. 例如, $y = \ln u$ 和 $u = -x^2$ 就不能构成复合函数, 因为对任意 x , 函数 $u = -x^2 \leq 0$, 而在 $y = \ln u$ 中只有 $u > 0$ 时才有意义.

(2) 复合函数可以有一个中间变量, 也可以有多个中间变量. 例如, 由 $y = e^u$ 、 $u = \sqrt{v}$ 、 $v = x+1$ 复合形成函数 $y = e^{\sqrt{x+1}}$, u 和 v 都是中间变量.

(3) 基本初等函数或由基本初等函数经过四则运算形成的函数称为简单函数. 复合函数不一定是由纯粹的基本初等函数复合而成的, 更多的复合函数是由简单函数复合而成的. 例如, 函数 $y = \sqrt{x + \sin x}$ 可以看作由函数 $y = \sqrt{u}$ 与 $u = x + \sin x$ 复合而成的函数.

[例 1-4] 求由函数 $y = \ln u$ 、 $u = \cos v$ 、 $v = x+1$ 构成的复合函数.

解: $y = \ln u = \ln \cos v = \ln \cos(x+1)$, 即 $y = \ln \cos(x+1)$.

[例 1-5] 求下列函数的复合过程.

(1) $y = \sin^2 x$ (2) $y = \arcsin(\ln 2x)$

解: (1) 函数 $y = \sin^2 x$ 是由 $y = u^2$ 、 $u = \sin x$ 复合而成的.

(2) 函数 $y = \arcsin(\ln 2x)$ 是由 $y = \arcsin u$ 、 $u = \ln v$ 、 $v = 2x$ 复合而成的.

4. 初等函数

定义 1-5 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合步骤所构成的用

扫一扫



微课: 反三角函数的
相关知识

扫一扫



微课: 复合函数的相
关知识

一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如， $y = \arcsin \frac{x}{2}$ 、 $y = \ln(x + \sin x)$ 、 $y = e^{x^2} \tan x$ 等都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，但绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ 是分段函数，也是初等函数，因为 $y = |x| = \sqrt{x^2}$ ，它可看作由函数 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = x^2$ 复合而成的函数.

初等函数是今后微积分学习中研究的主要函数.

1.1.4 数学模型的建立

1. 数学模型方法简述

数学模型 (Mathematical Modeling) 方法又称 MM 方法，是针对所考察的问题构造出相应的数学模型，通过对数学模型的研究来解决问题的一种数学方法.

数学模型方法是处理科学理论问题的一种经典方法，也是处理各类实际问题的一般方法. 掌握数学模型方法是非常必要的. 在此，对数学模型方法进行简述.

1) 数学模型的含义

数学模型是针对现实世界的某个特定对象，为了达到某个特定的目的，根据特有的内在规律，进行必要的简化和假设，运用适当的数学工具，采用形式化语言概括或近似地表述出来的一种数学结构. 它或者能解释该对象的现实形态，或者能预测该对象的未来状态，或者能提供处理该对象的最优决策. 数学模型源于现实而高于现实，不是对象的实际原形，而是关于对象的一种模拟. 它在数值上可以作为公式应用，推广应用到与对象原形相近的一类问题中；可以作为对象的数学语言；也可以译成算法语言，用于编写程序并进行计算.

2) 数学模型的建立

建立一个实际问题的数学模型，需要一定的洞察力和想象力，抛弃次要因素，突出主要因素，进行适当的抽象和简化. 数学模型的建立过程一般分为表述、求解、解释、验证几个阶段，通过这些阶段完成先从现实对象到数学模型，再从数学模型到现实对象的循环. 该过程可用流程图表示，如图 1-4 所示.

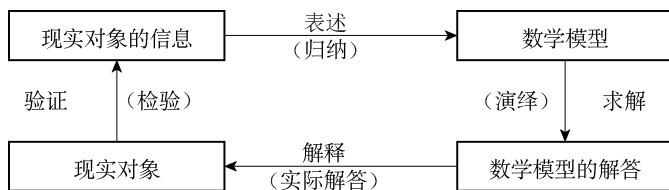


图 1-4

表述：根据建立数学模型的目的和掌握的现实对象的信息，将实际问题翻译成数学问题，用数学语言准确地表述出来.

表述是一个关键的过程，需要对实际问题进行分析，甚至要进行调查研究，查找资料，

对问题进行简化、假设、抽象,运用有关的数学概念、数学符号和数学表达式去表述客观对象及其关系.若现有的数学工具不够用,则可根据实际情况大胆创造新的数学概念和方法去表述.

求解:选择适当的方法,求得数学模型的解答.

解释:将数学模型的解答翻译成现实对象,对实际问题进行解答.

验证:检验解答的正确性.

总体来说,数学模型只是近似地表述现实对象的某些属性,而对于所要解决的实际问题而言,它更深刻、正确、全面地反映了现实.从广义上讲,一切数学概念、数学理论体系、数学公式、方程式、函数关系及由一系列公式构成的算法系统等,都可以叫作数学模型.从狭义上讲,只有那些反映特定问题或特定事物系统的数学关系的结构,才叫作数学模型.在现代应用数学中,数学模型都为狭义解释含义.建立数学模型的目的主要是解决具体的实际问题.

2. 函数关系的建立

研究数学模型,建立数学模型,进而借鉴数学模型,对提高解决实际问题的能力及数学素养都是非常重要的.函数关系可以说是一种变量依存关系的数学模型.建立函数关系的步骤可总结如下.

- (1) 分析实际问题中哪些是变量,哪些是常量,并分别用字母表示.
- (2) 根据所给条件,运用数学、物理或其他知识,确定等量关系(函数关系).
- (3) 写出具体解析式,并指明其定义域.

[例 1-6] 将直径为 d 的圆木料切削成截面为矩形的木材,如图 1-5 所示,列出该矩形截面两边长之间的函数关系,并求出如何切削才能使矩形截面面积最大.

解:设矩形截面的一条边长为 x ($0 < x < d$), 另一条边长为 y ($y = \sqrt{d^2 - x^2}$), 截面面积为 $s(x)$, 则 $s(x) = xy = x\sqrt{d^2 - x^2}$ ($0 < x < d$). 根据不等式 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ ($a > 0, b > 0$) 可得

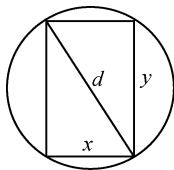


图 1-5

$$s(x) = xy = x\sqrt{d^2 - x^2} \leq \frac{x^2 + (d^2 - x^2)}{2} = \frac{d^2}{2}$$

当 $x^2 = d^2 - x^2$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}d$ 时, $s(x)$ 取得最大值, 即截面为正方形时其面积最大.

[例 1-7] 在金融业务中有一种利息叫作单利. 设 p 是本金, r 是计息期的利率, c 是计息期满应付的利息, n 是计息期数, I 是 n 个计息期(借期或存期)应付的单利, A 是本利和. 求本利和 A 与计息期数 n 的函数关系.

解: 计息期的利率 = $\frac{\text{计息期满应付的利息}}{\text{本金}}$, 即 $r = \frac{c}{p}$, 由此得 $c = pr$, 单利与计息期数成正比, 即 n 个计息期应付的单利为 $I = cn$, 因为 $c = pr$, 所以 $I = prn$, 本利和为 $A = p + I$, 可得本利和与计息期数的函数关系, 即单利模型为



$$A = p(1 + rn)$$

说明:

(1) 对于 [例 1-6] 中求最大截面面积的问题, 在学习了后面的导数知识后, 会有更简洁的方法.

(2) 建立函数关系的方法是比较灵活的, 无定法可循, 只有多做一些练习才能逐步掌握其诀窍.

思考题 1.1

1. 函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是同一个函数吗?
2. 两个奇函数之积是偶函数, 两个偶函数之积仍是偶函数. 那么一个奇函数和一个偶函数之积是奇函数, 对吗?
3. 是否任意两个函数都可以构成一个复合函数? 举例说明.
4. 建立函数关系的步骤是什么?

练习题 1.1

1. 若已知 $f(x+1) = x^3$, 求 $f(x)$.
2. 求函数 $y = \ln(1-x^2) + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域.
3. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(-1)$ 、 $f(0)$ 、 $f(1)$ 的值, 并画出函数的图像.
4. 判断下列函数的奇偶性.
 - (1) $y = x^2 \sin x$
 - (2) $y = x^2 + 2 \cos x$
 - (3) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
5. 分析下列复合函数的结构, 并指出其复合过程.
 - (1) $y = \cos^2(x-1)$
 - (2) $y = \lg \sin(x+1)$
6. 把一个直径为 50cm 的圆木切削成截面为矩形的方木, 若此矩形截面的一条边长为 x (cm), 截面面积为 A (cm²), 试将 A 表示成 x 的函数, 并指出其定义域.

1.2 极限的概念

【引例】对于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$, 当项数 n 无限增大时, 通项的变化趋势是什么?

上述问题研究的是当 n 无限增大时, 通项的变化趋势, 或者说通项有没有越来越接近 (趋于) 一个确定的数, 这就是极限问题.

极限是微积分中的一个基本概念, 微分与积分的许多概念都是由极限引入的, 并且其

相关问题最终是由极限知识解决的. 因此, 极限在微积分中占有非常重要的地位. 微分与积分中有许多有关极限思想的应用问题, 在后面的课程中还会进行这方面的阐述.

1.2.1 数列的极限

为理解极限概念, 先来研究几个数列.

数列 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ (n 为正整数) 在数轴上的表示如图 1-6 所示.

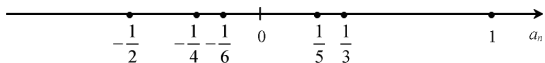


图 1-6

数列 $x_n = n$ (n 为正整数) 在直角坐标系中的表示如图 1-7 所示.

可以看出, 随着项数 n 的不断增大, 数列 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 趋于常数 0 (虽然在 0 的两边来回摆动), 而数列 $x_n = n$ 无限增大, 不趋于任何一个常数.

由此可见, 当项数无限增大时, 数列的变化趋势有两种情况, 要么趋于某个确定的常数, 要么无法趋于某个确定的常数. 将此现象进行抽象, 便可得到数列极限的描述性定义.

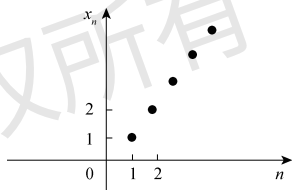


图 1-7

定义 1-6 设有数列 $\{x_n\}$, 若当 n 无限增大时, 数列相应的项 x_n 趋于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为当 n 趋于无穷大时数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 或 $x_n \rightarrow A$ ($n \rightarrow \infty$), 并称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的, 且收敛于 A ; 否则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

由定义 1-6 可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 0$, 而当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $\{n\}$ 是发散的.

[例 1-8] 观察下列数列的变化趋势, 确定它们的敛散性, 若数列是收敛的, 则写出其极限.

$$(1) x_n = \frac{n+1}{n} \quad (2) x_n = 4$$

$$(3) 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}$$

解: (1) $x_n = \frac{n+1}{n}$ 的项依次为 $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}$, 当 n 无限增大时, x_n 无限趋于 1, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

(2) $x_n = 4$ 为常数数列, 无论 n 取怎样的值, x_n 始终为 4, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 4$.

(3) 当 n 无限增大时, 数列 $x_n = (-1)^{n+1}$ 在 -1 和 1 这两个数之间来回摆动, 不会趋于一个确定的常数, 所以该数列没有极限, 是发散的.

说明:

(1) 极限是变量变化的最终趋势, 也可以说是变量变化的最终结果. 因此, 数列极限的值与数列前面有限项的值无关.



微课: 数列极限的概念的相关知识



例如, 某人的目的地是北京, 至于他是从武汉出发的, 还是从广州出发的, 与他的目的地无关, 最终到了北京, 就算到达目的地了. 这种比喻虽然不太严格, 但是编者认为它有助于读者对上面说法的理解.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 有界且其极限值唯一 (有界性、唯一性).

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则当 $A > 0$ (或 $A < 0$) 时, 存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$) (保号性).

(4) 若一个常数数列的极限等于这个常数本身, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ (c 为常数).

思考: 数列可以看作定义在正整数集上的函数, 那么一般函数的极限如何呢?

1.2.2 函数的极限

对于一般函数, 自变量 x 的变化趋势略显复杂, 主要分为以下 2 种情况.

(1) x 的绝对值无限增大, 即趋于无穷大, 它又分为 3 种情况.

① x 趋于正无穷大, 即 $x > 0$ 且无限增大, 记为 $x \rightarrow +\infty$.

② x 趋于负无穷大, 即 $x < 0$ 且 $|x|$ 无限增大, 记为 $x \rightarrow -\infty$.

③ x 趋于无穷大, 即既可取正值也可取负值且 $|x|$ 无限增大, 记为 $x \rightarrow \infty$.

(2) x 趋于有限值 x_0 , 也分为 3 种情况.

① x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 ($x < x_0$), 记为 $x \rightarrow x_0^-$.

② x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 ($x > x_0$), 记为 $x \rightarrow x_0^+$.

③ x 从 x_0 的左右两侧趋于 x_0 , 记为 $x \rightarrow x_0$.

下面分情况进行讨论.

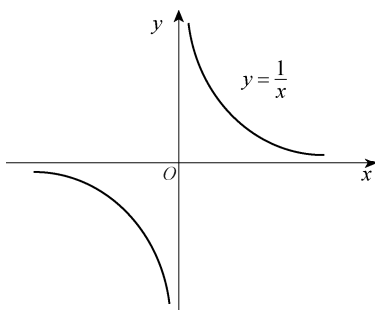


图 1-8

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限

当 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow \infty$ 时, 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像变化趋势, 如图 1-8 所示.

从图 1-8 中可以看出, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于常数 0, 此时称常数 0 为当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的极限; 同样, 当 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 趋于常数 0, 称常数 0 为当 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的极限.

定义 1-7 设函数 $y = f(x)$ 在 $|x| > a$ 时有定义 (a 为某个正实数), 若当自变量 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = f(x)$ 趋于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty)$$

定义 1-8 设函数 $y = f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内有定义 (a 为某个实数), 若当自变量 $x \rightarrow +\infty$

时, 函数 $y=f(x)$ 趋于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty)$$

定义 1-9 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 内有定义 (a 为某个实数), 若当自变量 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $y=f(x)$ 趋于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为当 $x \rightarrow -\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow -\infty)$$

由上述定义可知: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

[例 1-9] 观察下列函数的图像, 分析当 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限.

(1) $y = \arctan x$

(2) $y = e^x$

解: (1) 由图 1-9 可知, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $y = \arctan x$ 趋于常数 $-\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = \arctan x$ 趋于常数

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = \arctan x$ 没有趋于一个确定的常数, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.

(2) 由图 1-10 可知, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $y = e^x$ 趋于常数 0, 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $y = e^x$ 无限增大, 所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ 不存在 (为了方便, 这种情况也记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, 但并非表示该函数有极限, 仅仅是一个记法; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = e^x$ 没有趋于一个确定的常数, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ 不存在.

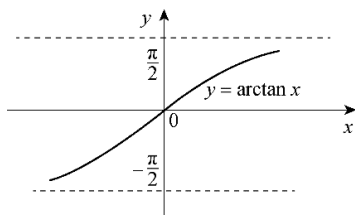


图 1-9

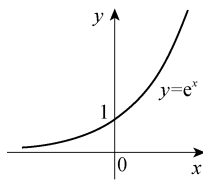


图 1-10

一般地, 有以下定理.

定理 1-1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限

当 $x \rightarrow 1$ 时, 用列表法和图像法观察函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势, 分别如表 1-1 和图 1-11 所示.

扫一扫



微课: 自变量趋于无穷大时函数的极限的相关知识



表 1-1

x	...	0.7	0.8	0.9	0.95	$\cdots \rightarrow 1 \leftarrow \cdots$	1.1	1.3	1.5
$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	...	1.7	1.8	1.9	1.95	$\cdots \rightarrow 2 \leftarrow \cdots$	2.1	2.3	2.5

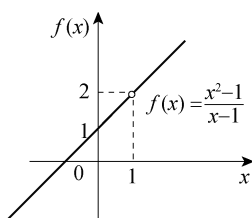


图 1-11

从表 1-1 和图 1-11 中可以看出, 函数在 $x=1$ 处没有定义, 但是当 x 趋于 1 时 (可以从 $x=1$ 处的左右两边分别趋于 1), 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的值趋于 2, 称当 x 趋于 1 (但不等于 1) 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的极限为 2. 同样可以分别讨论 $x=1$ 处的左边趋于 1 和从 $x=1$ 处的右边趋于 1 两种情况下函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的值的

变化趋势. 由此给出函数极限定义.

定义 1-10 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近 (x_0 的左、右两边) 有定义 (x_0 点可以除外), 若当自变量 x 趋于 x_0 ($x \neq x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 的值趋于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0)$$

例如, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的极限为 2, 记为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \text{ 或 } \frac{x^2-1}{x-1} \rightarrow 2 \quad (x \rightarrow 1)$$

由该定义容易得到以下两个结论:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c \text{ 为常数}) \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$$

说明:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 描述的是当自变量 x 趋于 x_0 时, 相应的函数值 $f(x)$ 趋于常数 A 的一种变化趋势, 与函数 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

(2) 在 x 趋于 x_0 的过程中, 既可以从大于 x_0 的方向趋于 x_0 , 也可以从小于 x_0 的方向趋于 x_0 , 整个过程没有任何方向限制.

(3) 在定义 1-10 中, x 是以任意方向趋于 x_0 的, 但在有些问题中, 往往只需要考虑 x 从 x_0 的某一边趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势, 这就是左、右极限的概念.

定义 1-11 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 左 (或右) 边有定义 (x_0 点可以除外), 若当自变量 x 从 x_0 的左 (或右) 边趋于 x_0 , 即 $x \rightarrow x_0^-$ (或 $x \rightarrow x_0^+$) 时, 函数 $y = f(x)$ 的值趋于一个确定的常数 A , 则称常数 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的左 (或右) 极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^-) \text{ (左极限)}$$

扫一扫



微课: 自变量趋向于 x_0 时函数的极限的相关知识

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \ (x \rightarrow x_0^+) \text{ (右极限)}$$

类似 $x \rightarrow \infty$, 有以下定理.

定理 1-2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

定理 1-2 常被用来判断函数在某一点处的极限是否存在.

[例 1-10] 讨论当 $x \rightarrow 0$ 时下列函数的极限.

$$(1) f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$

解: (1) 由图 1-12 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

(2) 由图 1-13 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

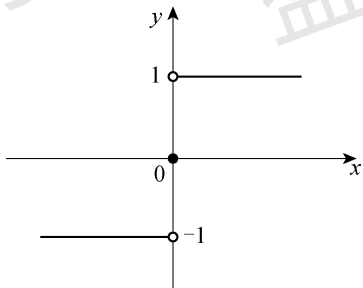


图 1-12

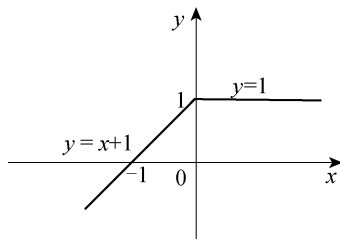


图 1-13

说明:

(1) 若函数的极限存在, 则其必唯一, 即若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$, 则 $A = B$.

(2) 分段函数在分段点处的极限与函数值是两个不同的概念.

思考题 1.2

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则是否一定有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$?

扫一扫



微课: 左右极限的概念的相关知识



练习题 1.2

1. 观察下列数列的变化趋势, 并判断其极限是否存在, 若存在, 求出其极限.

$$(1) x_n = 1 + n$$

$$(2) x_n = 2 + \frac{1}{n}$$

$$(3) x_n = \frac{1}{n^2}$$

$$(4) x_n = 1 + (-1)^n$$

2. 观察当 $x \rightarrow \infty$ 时下列函数的变化趋势, 并判断其极限是否存在, 若存在, 求出其极限.

$$(1) y = e^x$$

$$(2) y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

3. 观察当 $x \rightarrow 2$ 时下列函数的变化趋势, 并求出当 $x \rightarrow 2$ 时的极限.

$$(1) y = 2x + 1$$

$$(2) y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

4. 讨论当 $x \rightarrow 0$ 时下列函数的极限.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \frac{|x|}{x}$$

1.3 无穷小与无穷大

【引例】若将一根 1m 长的铁丝每天截去其一半长度, 则当天数越来越多时, 留下的铁丝长度会越来越短, 其最终长度趋于 0, 即其极限为 0.

在现实生活中, 变量的极限为 0 的情况很多, 这就是所谓的无穷小.

1.3.1 无穷小

1. 无穷小的概念

定义 1-12 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小量, 简称为无穷小.

例如, 若 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 则函数 $f(x) = x$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小.

说明:

(1) 此定义对于自变量的其他任何一种变化趋势 ($x \rightarrow x_0^-$ 、 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$) 同样成立.

(2) 同一个函数在不同的变化趋势下, 可能是无穷小, 也可能不是无穷小. 例如, 对于函数 $f(x) = x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限为 0, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是无穷小; 当 $x \rightarrow 1$ 时 $f(x)$ 的极限为 1, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时 $f(x)$ 不是无穷小. 因此, 在称一个函数为无穷小时, 一

定要明确指出其自变量的变化趋势.

(3) 无穷小不是一个常量的概念, 不能把它看成一个很小的常量, 它是一个变化过程中的变量, 最终在自变量的某一变化趋势下, 函数以 0 为极限. 特别地, 0 是可作为无穷小的唯一常量, 即除 0 以外任何很小的常量都不是无穷小.

[例 1-11] 指出自变量 x 在怎样的变化趋势下, 下列函数是无穷小.

$$(1) y = \frac{1}{x+1} \quad (2) y = x^2 - 1 \quad (3) y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

解: (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$, 所以当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 是无

穷小.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 与 $x \rightarrow -1$ 时函数 $y = x^2 - 1$ 都是无穷小.

(3) 对于 $a > 1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, 所以当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y = a^x$ ($a > 1$) 是无穷小; 而对于 $0 < a < 1$, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, 所以当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 也是无穷小.

2. 无穷小的性质

在自变量的同一变化过程中, 无穷小有以下性质.

性质 1 有限个无穷小的代数和是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

说明:

(1) 无穷多个无穷小之和不一定是无穷小.

(2) 两个无穷小的商不一定是无穷小.

[例 1-12] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $|\sin x| \leq 1$, 即 $\frac{1}{x}$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, $\sin x$ 是有界函数, 所以根

据无穷小的性质可知, $\frac{1}{x} \sin x$ 仍为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

类似地, 因为函数 $\cos x$ 、 $\cos \frac{1}{x}$ 、 $\sin \frac{1}{x}$ 都是有界函数, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} = 0$$

3. 极限与无穷小的关系

极限与无穷小都用来描述变量的变化过程, 那么它们之间有什么关系呢? 可以先来看一个例子.



扫一扫
微课: 无穷小量的概念的相关知识



对于函数 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, 由于 $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, 因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1$, 其中 1 是 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限, 而 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小. 一般地, 有以下定理.

定理 1-3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是无穷小.

此定理对于 $x \rightarrow x_0^-$ 、 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 同样成立.

1.3.2 无穷大

1. 无穷大的概念

上面讨论了有极限的变量, 当然还存在没有极限的变量. 在没有极限的变量中, 有一类变量与我们关系比较密切, 这类变量在变化过程中虽然并不趋于某一常数, 但它们的绝对值都是无限增大的. 例如, 对于 $f(x) = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时 $\left| \frac{1}{x} \right|$ 无限增大. 对于这类变量, 可以给出无穷大的概念.

定义 1-13 若当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大, 则称函数 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 简称为无穷大, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

若在变化过程中函数 $f(x)$ 只取正值 (或只取负值), 则称 $f(x)$ 是正无穷大 (或负无穷大), 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

此定义对于自变量的其他任何一种变化趋势 ($x \rightarrow x_0^-$ 、 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$) 同样成立.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ 、 $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$.

说明:

(1) 无穷大是极限不存在的一种情况, 也就是函数不可能等于某个确定的值的情况. 但为了便于描述函数的这种变化趋势, 我们借用极限的记号 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 表示当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 是无穷大.

(2) 无穷大也不是一个常量的概念, 不能把绝对值很大的常量看成无穷大, 因为这个常量的极限是它本身, 而不是无穷大. 只有变量才可能在一定条件下成为无穷大.

(3) 无穷大描述的是一个函数在自变量的某一变化趋势下, 相应的函数值的变化趋势, 即 $|f(x)|$ 无限增大. 同一个函数在自变量的不同变化趋势下, 相应的函数值有着不同的变化趋势. 例如, 对于函数 $\frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 它为无穷大; 当 $x \rightarrow 1$ 时, 它以 1 为极限. 因此, 在称一个函数为无穷大时, 必须明确指出其自变量的变化趋势, 否则毫无意义.

2. 无穷小与无穷大的关系

无穷小与无穷大之间有何关系？先来看一个例子．因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ ， $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ，所以当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 x 是无穷小，而其倒数 $\frac{1}{x}$ 是无穷大．一般地，有以下定理．

定理 1-4 当自变量在同一变化过程中时，存在以下 2 种情况．

(1) 若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小．

(2) 若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大．

[例 1-13] 指出当自变量 x 为怎样的变化趋势时，下列函数为无穷大．

$$(1) y = \frac{1}{x-2}$$

$$(2) y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$$

解：(1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ ，根据无穷小与无穷大之间的关系，有 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \infty$ ，所以当 $x \rightarrow 2$ 时，函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 为无穷大．

(2) 若 $0 < a < 1$ ，因为当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $\log_a x \rightarrow +\infty$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\log_a x \rightarrow -\infty$ ，所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时函数 $\log_a x$ 为正无穷大，当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $\log_a x$ 为负无穷大．若 $a > 1$ ，因为当 $x \rightarrow 0^+$ 时 $\log_a x \rightarrow -\infty$ ，当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\log_a x \rightarrow +\infty$ ，所以当 $x \rightarrow 0^+$ 时函数 $\log_a x$ 为负无穷大，当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $\log_a x$ 为正无穷大．

思考题 1.3

1. 无穷个无穷小的积一定是无穷小吗？
2. 两个非无穷大的积可以是无穷大吗？

练习题 1.3

1. 求下列函数的极限．

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

2. 指出下列函数哪些是无穷小，哪些是无穷大．

$$(1) y = \frac{x-1}{x^2-4} \quad (x \rightarrow 2)$$

$$(2) y = \ln x \quad (x \rightarrow 0^+)$$

$$(3) y = \frac{2x-1}{x^2} \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$(4) y = 3^x \quad (x \rightarrow -\infty)$$



1.4 极限的运算

【引例】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.

若用极限的定义去求此极限, 则很麻烦也很困难, 为方便求它的极限, 可以根据极限的定义, 得到极限运算法则.

1.4.1 极限运算法则

定理 1-5 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则存在以下 3 种情况.

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

说明:

(1) 以上定理只以 $x \rightarrow x_0$ 方式给出, 对于任何其他方式, 如 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow x_0^-$ 、 $x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$, 该定理都成立.

(2) 定理 1-5 成立的前提是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极限都必须存在, 参与运算的项数必须有限, 分母极限必须不为 0 等, 否则该定理不成立. 例如, $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0$, 这种算法是错误的, 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\sin \frac{1}{x}$ 没有极限.

推论 1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, c 为常数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

推论 2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $n \in \mathbf{N}$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))^n = A^n$.

例如, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$.

定理 1-6 设函数 $y = f(\varphi(x))$ 是由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, 且在 x_0 的附近 (除 x_0 外) 有 $\varphi(x) \neq u_0$, 又有 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = A$.

例如, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x^n = \sin x_0^n$.

[例 1-14] 求 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3)$.

解: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 2x - \lim_{x \rightarrow 1} 3 = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 3$
 $= 1 + 2 \times 1 - 3 = 0$

[例 1-15] 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.



微课: 极限的四则运算的相关知识

解:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2}{\lim_{x \rightarrow 2} x - \lim_{x \rightarrow 2} 1}$$

$$= \frac{2 \times 4 - 3 \times 2 + 2}{2 - 1} = 4$$

[例 1-16] 求 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

解: 因为当 $x \rightarrow 2$ 时, 分母的极限为 0, 所以不能直接应用定理 1-5(3). 但因为在 $x \rightarrow 2$ 的过程中, $x - 2 \neq 0$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

[例 1-17] 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$.

解: 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, 分子、分母的极限均为 0, 所以不能直接应用定理 1-5(3), 应先将分子有理化再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{x(\sqrt{1-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\frac{1}{2}$$

[例 1-18] 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

解: 因为当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1}{1-x}$ 与 $\frac{3}{1-x^3}$ 的极限都不存在, 所以不能直接应用定理 1-5(1), 应先通分, 并进行适当的变形, 再用定理 1-5(3) 来计算.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -\frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x+2)}{\lim_{x \rightarrow 1} (1+x+x^2)} = -1 \end{aligned}$$

[例 1-19] 求下列函数的极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 5}{4x^2 + x + 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^3 - 2x^2 - 1}$

解: (1) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子、分母的极限都不存在, 不能直接应用定理 1-5(3), 应先用 x^2 同除分子、分母, 再求极限.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x - 5}{4x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2}}{4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{3 - 0 - 0}{4 + 0 + 0} = \frac{3}{4}$$

(2) 不能直接应用定理 1-5(3), 应先用 x^3 同除分子、分母, 再求极限.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^3 - 2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \frac{0+0-0}{3-0-0} = 0$$

说明：

通过以上例题，可大致归纳应用极限运算法则求函数极限的注意点与方法。

(1) 在求函数极限时，经常出现不能直接应用极限运算法则的情况，必须先对原式进行恒等变换、化简，再求极限。常用的方法有因式分解、通分、根式有理化等。

(2) 一般地，当 $a_0 \neq 0$ 、 $b_0 \neq 0$ 、 m 和 n 为正整数时，有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & n = m \\ \frac{a_0}{b_0} & n < m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

(3) 一定要多做求函数极限的练习，只有这样才能很好地掌握其方法和技巧。一些求函数极限的方法和技巧将在后面的课程中介绍。另外，还可以用数学软件 MATLAB 方便地求函数极限。

1.4.2 两个重要极限

在理论推导与极限计算中还经常用到两个重要极限，即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ ，可用列表的方法观察这两个重要极限的正确性。

1. 重要极限一： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

说明：

(1) 该极限在形式上为 $\frac{0}{0}$ 型极限，并且要注意 $x \rightarrow 0$ 。

(2) 该极限的一般形式为 $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ ，其中 $u(x)$ 代表 x 的任意函数，还要注意理

解它的各种变形形式。

[例 1-20] 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ 。

解： 令 $u = 3x$ ，则 $x = \frac{u}{3}$ ，当 $x \rightarrow 0$ 时， $u \rightarrow 0$ ，则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{\frac{u}{3}} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 3$$



微课：重要极限一的
相关知识

注意：当函数 $\frac{\sin 3x}{x}$ 通过变量替换为 $\frac{\sin u}{\frac{u}{3}}$ 时，极限中的 $x \rightarrow 0$ 要同时变为 $u \rightarrow 0$ 。

有时可以直接计算函数极限，如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$ 。

[例 1-21] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$ 。

解：令 $\frac{1}{x} = t$ ，则当 $x \rightarrow \infty$ 时， $t \rightarrow 0$ ，所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \sin t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

[例 1-22] 求 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$ 。

解：虽然这是 $\frac{0}{0}$ 型极限，但 $x \rightarrow 0$ 不成立，故不能直接运用重要极限一。

令 $t = \pi - x$ ，则 $x = \pi - t$ ，当 $x \rightarrow \pi$ 时， $t \rightarrow 0$ ，所以有

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

[例 1-23] 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 。

解：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

[例 1-24] 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{x}$ (k 为非零常数)。

解：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x \cdot \cos kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin kx}{kx} \cdot \frac{k}{\cos kx} \right) = k$$

2. 重要极限二： $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$e = 2.718\,281\,828\cdots$ ，是一个无理数。1748 年，欧拉 (Euler) 首先用字母 e 表示了该无理数。

说明：

(1) 该极限在形式上的特点是底数为 1 加无穷小 $\frac{1}{x}$ ，底数中的 $\frac{1}{x}$ 与指数 x 呈倒数关系，并且要注意 $x \rightarrow \infty$ 。

(2) 在 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 中，令 $t = \frac{1}{x}$ ，则当 $x \rightarrow \infty$ 时， $t \rightarrow 0$ ，可得到重要极限二的另一



种形式: $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$. 其一般形式为 $\lim_{u(x) \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)} = e$ 或 $\lim_{u(x) \rightarrow 0} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e$, 其中 $u(x)$ 代表 x 的任意函数, 要注意理解它的各种变形形式.

[例 1-25] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

解:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2 = e^2$$

[例 1-26] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

解 1: 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$; 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{-1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-1} = e^{-1}$$

解 2:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{-1}{x}\right)\right]^{-x \cdot (-1)} = e^{-1}$$

这个结论也可以作为公式来使用.

[例 1-27] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2}$.

解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = e^3$$

[例 1-28] 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

[例 1-29] 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}+2}$.

解:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2} = e^{-2}$$



微课: 重要极限二的相关知识

1.4.3 两个重要准则

1. 夹逼准则

定理 1-7 若函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $h(x)$ 在点 a 的某去心邻域内满足下列条件:

(1) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty(x_0)} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty(x_0)} h(x)$.

则 $\lim_{x \rightarrow \infty(x_0)} g(x) = A$.

此结论对数列同样成立.

[例 1-30] 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解: 利用缩放法, 得

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

所以由夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$$

2. 单调有界准则

定义 1-14 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调增大的; 如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调减小的. 单调增大数列和单调减小数列统称为单调数列.

定理 1-8 单调有界数列必有极限.

思考题 1.4

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \text{ 对吗?}$$

练习题 1.4

1. 求下列函数的极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-3}{x+1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$



$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} \right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x}-1}{\sqrt{x+2}}$$

2. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{3x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+\frac{3}{2}}$$

$$3. \text{ 计算 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \right).$$

1.5 函数的连续性

【引例】在自然界中,有许多量都是在连续不断地发生变化的,如气温随着时间的变化而连续变化;金属轴的长度随气温的变化有极微小的连续变化等.但也有一些量,如个人所得税税率,是发生跳跃变化的.这种生活中的连续变化与跳跃变化反映到函数上是一种什么样的情况呢?简单地说,函数的连续性反映在几何上就是一条不间断的曲线.下面我们来深入研究.

1.5.1 函数连续的概念

在介绍函数连续的概念前,先介绍一下函数的增量.

1. 函数的增量

定义 1-15 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义,若自变量由 x_0 变到 x ,则称 $x-x_0$ 为自变量在 x_0 处的增量或改变量,记为 Δx ,即 $\Delta x=x-x_0$.相应地,若函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$,则称 $f(x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的增量或改变量,记为 Δy ,即 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 或 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

说明:

Δx 和 Δy 名为增量,其实是可正、可负的,也可以为 0. 增量的几何意义如图 1-14 和图 1-15 所示.

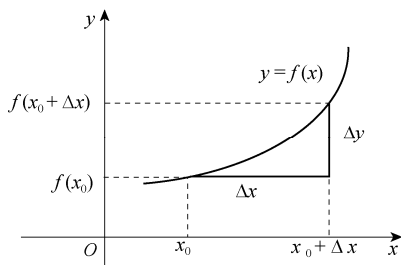


图 1-14

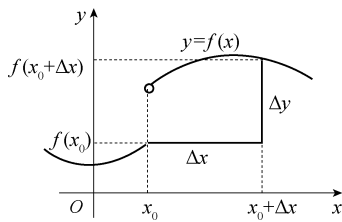


图 1-15

[例 1-31] 已知函数 $y = f(x) = x^2 + 3$, 当自变量 x 有下列变化时, 求相应的 Δy .

- (1) x 从 -1 变到 1 .
- (2) x 从 1 变到 0 .
- (3) x 从 1 变到 $1 + \Delta x$.

解: (1) $\Delta y = f(1) - f(-1) = (1^2 + 3) - [(-1)^2 + 3] = 0$.

(2) $\Delta y = f(0) - f(1) = (0^2 + 3) - (1^2 + 3) = -1$.

(3) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [(1 + \Delta x)^2 + 3] - (1^2 + 3) = 2\Delta x + (\Delta x)^2$.

2. 函数连续的定义

由图 1-14 可以看出, 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处是连续的, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\Delta y \rightarrow 0$. 由图 1-15 可以看出, 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处是不连续的, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, Δy 不趋于 0 .

根据以上分析, 给出函数连续的定义.

定义 1-16 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 若当自变量 x 在 x_0 处的增量 Δx 趋近于 0 时, 相应的函数增量 Δy 也趋于 0 , 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, x_0 为函数 $y = f(x)$ 的连续点; 否则, 称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处间断, x_0 为函数 $y = f(x)$ 的间断点.

[例 1-32] 试用定义 1-16 证明函数 $y = x^2 + 3$ 在 $x_0 = 1$ 处连续.

证明: 显然函数 $y = x^2 + 3$ 在 $x_0 = 1$ 的邻域内有定义. 现设自变量 x 在 $x_0 = 1$ 处有增量 Δx , 则由例 1-31 (3) 可知, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 相应的函数增量 Δy 的极限为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [2\Delta x + (\Delta x)^2] = 0$$

因此, 根据定义 1-16, 函数 $y = x^2 + 3$ 在 $x_0 = 1$ 处连续.

在定义 1-16 中, 若令 $x = x_0 + \Delta x$, 则 $\Delta x \rightarrow 0$ 就是 $x \rightarrow x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta y \rightarrow 0$ 就是 $f(x) \rightarrow f(x_0)$, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 就是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

因此, 函数连续的定义也可叙述如下.

定义 1-17 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义, 若当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限存在, 而且极限值等于 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, x_0 为函数 $y = f(x)$ 的连续点; 否则, 称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处间断, x_0 为函数 $y = f(x)$ 的间断点.

[例 1-33] 试用定义 1-17 证明函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

证明: 显然 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义, 由无穷小的性质可知



扫一扫
微课: 函数连续的概念的相关知识



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

且 $f(0)=0$ ，故有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

根据定义 1-17 可知，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

在定义 1-17 中，若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处左连续；若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处右连续.

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ，因此函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续且右连续.

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点处都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续. 若函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 内连续.

若函数 $f(x)$ 在它的定义域内每一点处都连续，则称 $f(x)$ 为连续函数.

综上所述，函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，必须同时满足以下 3 个条件.

- (1) 函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义.
- (2) 当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)$ 的极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在.
- (3) 极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 等于 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值，即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

若不满足上述条件中的任何一个，则函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处间断.

[例 1-34] 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ e^x - b & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 b 值.

解：

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - b) = 1 - b$$

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ， $b = -1$.

[例 1-35] 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ \frac{\sin x}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解：

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin x}{x} = \sin 1$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

1.5.2 初等函数的连续性

在此不加证明地给出以下重要事实：初等函数在其定义区间内都是连续的. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

说明：

(1) 所谓定义区间，是指包含在定义域内的区间.

(2) 求初等函数的连续区间就是求初等函数的定义区间. 关于分段函数的连续性，除了按上述结论考虑每一分段区间内的连续性，还必须讨论分界点的连续性.

(3) 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ，即求连续函数的极限可归结为计算函数值.

(4) 设有复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ ，若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ ，而函数 $f(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)]$. 这是一种求函数极限的方法.

[例 1-36] 求函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的连续区间.

解：由于 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 为初等函数，其定义域满足 $x+1 > 0$ ，即 $x > -1$ ，因此函数的定义区间为 $(-1, +\infty)$ ，所以 $(-1, +\infty)$ 为函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的连续区间.

[例 1-37] 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

解：(1) 因为函数 $y = \sqrt{x^2 + x - 1}$ 在 $x=1$ 处连续，所以有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{1^2 + 1 - 1} = 1$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e$$

思考题 1.5

1. 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，则一定要求其在 x_0 处有定义吗？
2. 若函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，则函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的极限一定存在，反之则不一定成立. 这句话对吗？

练习题 1.5

1. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + 1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



2. 求函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的连续区间.

3. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\ln(\sin x)]$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{\sin x}$$



知识拓展

1.6 无穷小的比较、函数的间断点类型、闭区间上连续函数的性质、函数曲线的渐近线

【引例】 如何判断方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内是否有解(根)?

前面讲述了无穷小、函数的连续性等知识, 本节对这些知识进行一些拓展.

1.6.1 无穷小的比较

两个无穷小的和、差、积都是无穷小, 但两个无穷小的商不一定是无穷小, 会出现不同情况. 例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 、 x^2 、 $\sin x$ 、 $2x$ 、 x^3 都是无穷小, 而有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \infty$$

可以看出, 同为无穷小, 但它们趋于 0 的速度有快有慢. 为了比较两个不同的无穷小趋于 0 的速度, 根据两个无穷小的比值的极限来判定这两个无穷小趋于 0 的速度快慢, 为此引入无穷小阶的概念.

定义 1-18 设 α 与 β 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小, 且 $\alpha \neq 0$, $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 是自变量在同一变化过程中的极限.

(1) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记为 $\beta = o(\alpha)$.

(2) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$, 则称 β 是与 α 同阶的无穷小.

特别地, 若 $C = 1$, 则称 β 与 α 是等价的无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

【例 1-38】 下列函数是当 $x \rightarrow 1$ 时的无穷小, 试与 $x - 1$ 相比较, 哪个是高阶的无穷小? 哪个是同阶的无穷小? 哪个是等价的无穷小?

$$(1) 2(\sqrt{x} - 1)$$

$$(2) x^3 - 1$$

$$(3) x^3 - 3x + 2$$