

莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler, 1707-4-15—1783-9-18), 瑞士数学家、自然科学家。欧拉在解决物理问题的过程中, 创立了微分方程这门学科。偏微分方程的纯数学研究的第一篇文章是欧拉写的《方程的积分法研究》。欧拉还研究了求解微分方程的级数法, 最早引入了“通解”和“特解”这两个名词。

# 第 1 章 概论

为了描述并解决自然科学和工程技术中的问题,往往需要对这些问题建立数学模型,即数学物理方程。有时建立的数学模型是含有多个自变量的偏微分方程。本章介绍偏微分方程和定解问题的概念,推导出描述物理现象的三类典型的数学物理方程。通过本章的学习,希望读者能够体会三类典型的数学物理方程的价值。

## 1.1 偏微分方程

一个多变量函数的偏导数是指在保持其他变量恒定时,该函数关于其中一个变量的导数。以二元函数为例,函数  $z=f(x,y)$  在点  $(x_0,y_0)$  处对  $x$  的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (1.1.1)$$

记作  $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 、 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 、 $z_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 、 $f_x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ 、 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$  或  $f_x(x_0, y_0)$ 。

偏导数的符号  $\partial$  是微分符号  $d$  的变形,可以读作偏、partial  $d$ 、curly  $d$ 、rounded  $d$  等。

设函数  $z=f(x,y)$  在区域  $D$  内具有偏导数,即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

因此,在区域  $D$  内,  $f_x(x,y)$  和  $f_y(x,y)$  都是  $x$ 、 $y$  的函数。如果这两个函数的偏导数也存在,就称它们为函数  $z=f(x,y)$  的二阶偏导数。按照对变量进行求导的次序的不同,函数  $z=f(x,y)$  有四个二阶偏导数,即

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) \quad (1.1.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) \quad (1.1.2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) \quad (1.1.2c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) \quad (1.1.2d)$$

其中, 式(1.1.2b)和式(1.1.2c)称为混合偏导数。同理可得三阶、四阶等偏导数。二阶及二阶以上的偏导数在连续条件下与求导的次序无关, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (1.1.3)$$

为了简化运算式, 哈密顿(William Rowan Hamilton)引入了一个矢量微分算子 $\nabla$ , 称为哈密顿算子, 读作“del”或“nabla”。 $\nabla$ 在三维直角坐标系中表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.1.4)$$

$\nabla$ 可以简化梯度、散度和旋度的表示形式, 即

$$\text{grad}u = \nabla u, \quad \text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \text{curl} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.1.5)$$

两个哈密顿算子的点乘是拉普拉斯算子, 记作 $\nabla^2$ 或 $\Delta$ , 即

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (1.1.6)$$

拉普拉斯算子表示对一个标量取梯度后求散度, 是标量算子。在一维直角坐标系、二维直角坐标系、三维直角坐标系、极坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中, 拉普拉斯算子分别表示为

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} \quad (1.1.7a)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.1.7b)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.1.7c)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.1.7d)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.1.7e)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (1.1.7f)$$

对一个直角坐标系中的二维函数 $u$ 做拉普拉斯运算, 可以表示为

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1.8)$$

含有未知函数偏导数的等式称为偏微分方程。在自然界中，很多问题的数学描述都是偏微分方程。例如，描述弦、杆、膜、液体、气体等振动和电磁场振荡的波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u \quad (1.1.9)$$

描述热传导、流体的扩散、黏性液体流动的热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \quad (1.1.10)$$

描述静电场分布、静磁场分布、稳定温度场分布的位势方程：

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.1.11)$$

描述电磁理论的麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (1.1.12)$$

量子力学中描述微观粒子状态的薛定谔方程：

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.1.13)$$

广义相对论中的爱因斯坦方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (1.1.14)$$

使用数学方法研究物理问题或其他自然现象而建立起来的方程称为数学物理方程。数学物理方程不仅有上述偏微分方程，还有常微分方程、积分方程等。

本章主要研究波动方程、热传导方程和位势方程这三类典型的偏微分方程，许多物理问题都可以用它们来描述。这三类典型的偏微分方程是很美的方程：它们的形式很简约，具有外在美；它们的用途很广泛，具有内在美。

## 1.2 方程的建立

采用数学方法研究物理问题的第一步是将物理问题转化为数学问题。本节通过几个

不同的物理模型推导出数学物理方程中三类典型的偏微分方程，从中了解建立数学模型的一般步骤，认识这三类典型的偏微分方程的广泛物理背景。通常需要以下三个步骤来推导数学物理方程。

- (1) 确定要研究的物理量，如位移、场强、温度等。
- (2) 根据物理规律建立方程。
- (3) 对方程进行化简，必要时进行工程近似。

## 1.2.1 弦的振动

### 1. 确定要研究的物理量

要研究弦的振动规律，可以将弦的位移作为要研究的物理量。在数学物理方程中，通常用  $u$  来表示未知函数 (Unknown Function)。对于弦的振动，以弦的平衡位置为  $x$  轴，以  $u(x,t)$  表示  $x$  点处的弦在  $t$  时刻的横向位移。

### 2. 根据物理规律建立方程

图 1.2.1 所示为弦的坐标系，选取弦上的一个微元  $(x, x+dx)$  进行研究。在  $t$  时刻，这一段弦的横向位移为  $u(x,t)$ ，横向速度为  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ ，横向加速度为  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ ；弦的线密度为  $\rho$ 。在不计重力的情况下，加速度是由两边的张力  $T$  和  $T'$  产生的。由于弦只做横向振动，因此根据牛顿第二定律，可以写出横向 ( $u$  向) 的方程和纵向 ( $x$  向) 的方程，即

$$T' \sin \alpha' - T \sin \alpha = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.1)$$

$$T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = 0 \quad (1.2.2)$$

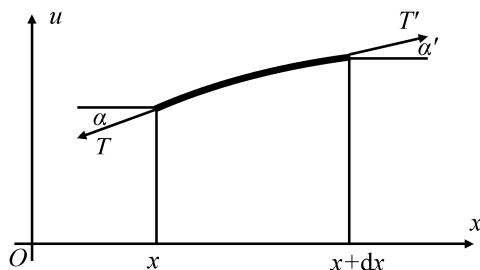


图 1.2.1 弦的坐标系

### 3. 对方程进行化简和工程近似

假设弦做微小振动，因此  $\alpha \approx 0$ ， $\alpha' \approx 0$ ，根据余弦函数的泰勒展开式，即

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots \quad (1.2.3)$$

对  $\cos \alpha$  和  $\cos \alpha'$  进行一阶近似, 即

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \cos \alpha' \approx 1 \quad (1.2.4)$$

结合式 (1.2.2) 和式 (1.2.4) 得

$$T' \approx T \quad (1.2.5)$$

由式 (1.2.5) 和  $x$  的任意性可知, 张力  $T$  的大小与位置  $x$  无关。

结合式 (1.2.1) 和式 (1.2.5) 得

$$\sin \alpha' - \sin \alpha = \frac{\rho}{T} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.6)$$

根据正切函数的泰勒展开式, 即

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \dots \quad (1.2.7)$$

可得  $\tan^2 \alpha$  的一阶近似为

$$\tan^2 \alpha \approx 0 \quad (1.2.8)$$

因此有

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha \quad (1.2.9)$$

其中,  $\tan \alpha$  为弦在  $x$  点的斜率, 斜率可以表示为  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , 即

$$\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.2.10)$$

根据式 (1.2.9) 和式 (1.2.10), 式 (1.2.6) 可以写为

$$\frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\rho}{T} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.11)$$

进而得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\left[ \frac{\partial u(x+dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]}{dx} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.12)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2.13)$$

其中,  $a^2 = T/\rho$ 。式 (1.2.13) 称为一维波动方程, 等式右边表示对  $u$  做一维拉普拉斯运算。可以想象, 二维波动方程和三维波动方程分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.2.15)$$

如果弦在振动过程中还受到  $u$  向的外力, 外力密度为  $F(x,t)$ , 则式 (1.2.1) 变为

$$T' \sin \alpha' - T \sin \alpha + F dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.16)$$

按照上面的推导方法, 可以得到弦的强迫振动方程, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (1.2.17)$$

其中,  $f = F/\rho$ 。对于受迫的阻尼弦振动, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + f \quad (1.2.18)$$

其中,  $\beta$  为阻尼因子。

## 1.2.2 鼓膜的振动

对于一个均匀、各向同性的弹性圆膜, 坐标原点位于圆膜的圆心, 面密度为  $\rho_s$ , 膜振动的方向垂直于膜平衡位置所在的平面, 振动的位移为  $u(\rho, \theta)$ 。它在进行小幅振动时, 类似弦的小幅振动, 可以得出, 在任何方向上, 单位长度上所受的张力  $T$  也是常数。在圆膜上取一面元进行分析, 该面元的坐标范围为  $(\rho, \rho + d\rho)$  和  $(\theta, \theta + d\theta)$ , 四个边长分别为  $\rho d\theta$ 、 $(\rho + d\rho)d\theta$ 、 $d\rho$  和  $d\rho$ 。

沿平行于  $\rho$  的方向, 设面元两端的张力与平衡位置的夹角分别为  $\alpha$  和  $\alpha'$ ; 沿平行于  $\theta$  的方向, 设面元两端的张力与平衡位置的夹角分别为  $\beta$  和  $\beta'$ 。由牛顿第二定律得

$$T(\rho + d\rho)d\theta \sin \alpha' - T\rho d\theta \sin \alpha + Td\rho \sin \beta' - Td\rho \sin \beta = \rho_s \rho d\theta d\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.19)$$

取一阶近似, 得

$$\begin{aligned} & (\rho + d\rho)d\theta \frac{\partial u(\rho + d\rho, \theta)}{\partial \rho} - \rho d\theta \frac{\partial u(\rho, \theta)}{\partial \rho} + d\rho \frac{\partial u(\rho, \theta + d\theta)}{\partial \theta} - \\ & d\rho \frac{\partial u(\rho, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\rho_s}{T} \rho d\theta d\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

采用类似式 (1.2.12) 的变换, 式 (1.2.20) 可变为

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{\rho_s}{T} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.2.21)$$

因此有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.2.22)$$

其中,  $a^2 = T/\rho_s$ 。式 (1.2.22) 称为圆域内的波动方程。

圆域内的拉普拉斯运算可以和二维直角坐标系中的拉普拉斯运算通过全微分来转换。二维直角坐标和极坐标的关系为

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (1.2.23)$$

由此可得  $\rho$  和  $\theta$  关于  $x$  与  $y$  的一阶偏导数为

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{\rho}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \theta \quad (1.2.24)$$

根据全微分的定义, 可得  $u$  关于  $x$  和  $y$  的一阶偏导数为

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \quad (1.2.25a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \quad (1.2.25b)$$

进一步可得  $u$  关于  $x$  和  $y$  的二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \rho} \frac{\sin 2\theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \theta}{\rho} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin 2\theta}{\rho^2} \quad (1.2.26a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \cos^2 \theta - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \rho} \frac{\sin 2\theta}{\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \theta}{\rho} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin 2\theta}{\rho^2} \quad (1.2.26b)$$

将式 (1.2.26a) 和式 (1.2.26b) 相加, 整理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \quad (1.2.27)$$

因此, 无论什么样的坐标系, 都可以将波动方程写成如式 (1.1.9) 所示的形式。

### 1.2.3 电报员方程

电报员方程是曾经作为电报员的奥利弗·亥维赛 (Oliver Heaviside) 推导出来的一对传输线上电流和电压所满足的方程, 也称传输线方程。对于一对传输线, 当传输高频信号时, 受分布参数的影响, 传输线上不同位置的电压和电流未必相同。传输线上的分布参数包括以下几个。

- (1)  $R$ : 单位长度上的串联分布电阻。
- (2)  $L$ : 单位长度上的串联分布电感。



(3)  $G$ : 单位长度上的并联分布电导。

(4)  $C$ : 单位长度上的并联分布电容。

如图 1.2.2 所示, 取传输线上一段线元( $z, z+dz$ )进行研究。

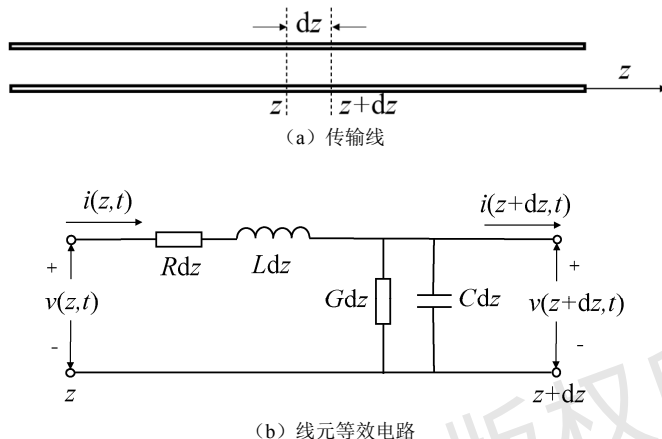


图 1.2.2 传输线模型

这段传输线左、右两侧的电电压和电流分别为  $v(z,t)$ 、 $v(z+dz,t)$  与  $i(z,t)$ 、 $i(z+dz,t)$ 。根据基尔霍夫第一定律, 有

$$i(z,t) = i(z+dz,t) + Cdz \frac{\partial v(z+dz,t)}{\partial t} + Gdzv(z+dz,t) \quad (1.2.28)$$

两边除以  $dz$  得

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial v(z+dz,t)}{\partial t} - Gv(z+dz,t) \approx -C \frac{\partial v(z,t)}{\partial t} - Gv(z,t) \quad (1.2.29)$$

根据基尔霍夫第二定律, 有

$$v(z+dz,t) - v(z,t) = -Ldz \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - Rdzi(z,t) \quad (1.2.30)$$

两边除以  $dz$  得

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} - Ri(z,t) \quad (1.2.31)$$

先将式 (1.2.29) 对  $z$  进行微分, 再将式 (1.2.31) 对  $t$  进行微分并乘以  $C$ , 两式相减得

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} - G \frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + RC \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (1.2.32)$$

将式 (1.2.31) 代入式 (1.2.32) 得

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = LC \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} + (GL + RC) \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + RGi(z,t) \quad (1.2.33)$$

对于无耗传输线，即当  $R=0$  和  $G=0$  时，式 (1.2.33) 变为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} \quad (1.2.34)$$

其中， $a^2 = 1/LC$ 。类似地，对式 (1.2.29) 和式 (1.2.31) 消去  $i$  可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (1.2.35)$$

可以看出，传输线上的电流和电压满足的式 (1.2.34) 和式 (1.2.35) 与弦上振幅满足的式 (1.2.13) 具有相同的形式。由此可见，不同的物理量可以满足同一个方程。

## 1.2.4 热传导

根据热力学第二定律，当物体内部各点的温度不同时，热量会从温度较高的地方向温度较低的地方流动。热传导过程总是表现为温度随位置和时间而变化。热传导问题的几何模型如图 1.2.3 所示。

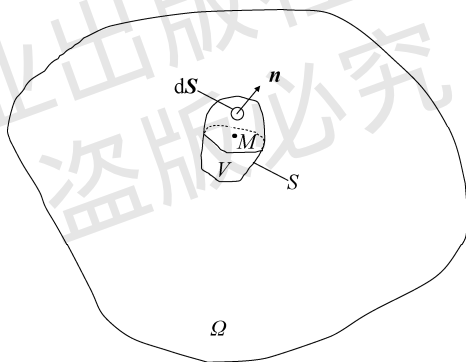


图 1.2.3 热传导问题的几何模型

为了研究各向同性区域  $\Omega$  内的温度特征，在  $\Omega$  内任选一点  $M$ ，在  $t$  时刻， $M$  点处的温度为  $u(M,t)$ 。取任意闭合曲面  $S$  包围  $M$ ， $S$  包围的区域为  $V$ ， $S$  上有一面元  $dS$ ， $dS$  的单位法向矢量为  $n$ ， $n$  指向  $V$  的外部，并与  $dS$  垂直， $dS$  的面积为  $dS$ 。根据傅里叶定律，在  $dt$  时间内从  $dS$  流入  $V$  的热量为

$$dQ = k \frac{\partial u}{\partial n} dS dt = k (\nabla u \cdot n) dS dt = k \nabla u \cdot dS dt \quad (1.2.36)$$

其中， $k$  为热导率。因此，从时刻  $t_1$  到  $t_2$  通过  $S$  流入  $V$  的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \oiint_S k \nabla u \cdot dS dt \quad (1.2.37)$$

高斯公式（矢量散度的体积分等于该矢量在限定该体积的闭合曲面上的面积分）为

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (1.2.38)$$

由高斯公式可得

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k \nabla^2 u dV dt \quad (1.2.39)$$

流入的热量导致  $V$  内的温度发生变化。从时刻  $t_1$  到  $t_2$ ,  $V$  内各点的温度从  $u(M, t_1)$  变化到  $u(M, t_2)$ , 根据比热容的定义, 其需要的热量为

$$Q_2 = \iiint_V c \rho [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV = \iiint_V c \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt dV \quad (1.2.40)$$

其中,  $c$  为比热容;  $\rho$  为密度。

根据热力学第一定律, 在不做功的情况下,  $Q_1 = Q_2$ , 得

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k \nabla^2 u dV dt = \iiint_V c \rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt dV = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV dt \quad (1.2.41)$$

因为  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $V$  都是任意选取的, 所以有

$$k \nabla^2 u = c \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.2.42)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u \quad (1.2.43)$$

其中,  $a^2 = k/c\rho$ 。式 (1.2.43) 为热传导方程。式 (1.2.43) 中采用拉普拉斯算子可以将不同坐标系、不同维度的热传导方程写成同一个形式。

随着时间的推移, 若物体中的温度趋于某种平衡状态, 则温度函数  $u$  与  $t$  无关, 热传导方程变为拉普拉斯方程, 即

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.2.44)$$

若图 1.2.3 中的  $\Omega$  内还有热源  $F$ , 则热传导方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u + f \quad (1.2.45)$$

其中,  $f = F/c\rho$ 。

### 1.2.5 静电位

在真空中有电荷分布, 电荷密度为  $\rho$ 。这些电荷引起的静电场的电场强度为  $\mathbf{E}$ , 电位为  $u$ 。根据静电场的高斯定理, 可知静电场的散度为电荷密度, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.2.46)$$

另外，电场强度  $\mathbf{E}$  为电位的负梯度，即

$$\mathbf{E} = -\nabla u \quad (1.2.47)$$

将式 (1.2.47) 代入式 (1.2.46) 得

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla u) = -\nabla \cdot \nabla u = -\nabla^2 u = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.2.48)$$

或

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1.2.49)$$

在无源的情况下， $\rho = 0$ ，可得

$$\nabla^2 u = 0 \quad (1.2.50)$$

式 (1.2.49) 为有源区静电位满足的泊松方程，式 (1.2.50) 为无源区静电位满足的拉普拉斯方程。泊松方程和拉普拉斯方程统称位势方程，可以看出，静电位满足的式 (1.2.50) 与稳定温度场满足的式 (1.2.44) 的形式完全相同。

## 1.3 定解问题的概念

### 1.3.1 偏微分方程的解

偏微分方程建立后，需要对它进行研究，找出未知函数，这就是求解偏微分方程。如果找出这样的未知函数，并把该函数代入偏微分方程，使该方程成为恒等式，则该函数称为该偏微分方程的解，也称为古典解。

例如，对偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.3.1)$$

进行两次积分，可得

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta) \quad (1.3.2)$$

其中，函数  $f$  和  $g$  为任意函数。将式 (1.3.2) 代入式 (1.3.1) 可以使式 (1.3.1) 成为恒等式，因此，式 (1.3.2) 就是式 (1.3.1) 的解。

如果解中含有任意常数和函数，它们的个数与偏微分方程的阶数相同，并且相互独

立，则该解称为偏微分方程的通解。这里所说的相互独立是指它们不能通过合并而使任意常数或函数的个数减少。式(1.3.2)即式(1.3.1)的通解。

确定了通解中的任意常数和函数后的解称为特解。按照一定方法求出但未经过验证的解称为形式解。

在某些实际问题中，函数可能在个别坐标上不可导或导数不连续，不满足古典解的要求，但它在实际问题中也是有意义的，人们不得不放宽对解的概念的要求，承认它也是一种解，为区别于古典解，把这种解称为弱解。由于弱解具有实际价值，因此也常称之为物理解。

### 1.3.2 定解条件

仅靠一个偏微分方程只能解出偏微分方程的通解，这样的偏微分方程称为泛定方程。要得到特解，就需要约束条件，在数学上称之为定解条件。对于一个实际的物理问题，根据其物理意义，可以将定解条件分为边界条件和初始条件。

对于放置在  $0 \sim l$  之间的一根弦，以左端点  $x=0$  为例，弦的振动问题有以下三类边界条件。

(1) 固定端，即端点保持不动：

$$u(0, t) = 0 \quad (1.3.3)$$

(2) 自由端，即端点不受位移方向的外力，该端点处弦的切线和  $x$  轴平行：

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (1.3.4)$$

(3) 弹性支撑端，即端点固定在一弹性支撑上，弹性支撑的伸缩满足胡克定律：

$$T \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + ku(0, t) = 0 \quad (1.3.5)$$

或

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \sigma u(0, t) = 0 \quad (1.3.6)$$

其中， $T$  为弦的张力； $k$  为弹性支撑的刚度系数； $\sigma = k/T$ 。

对于边界为  $\Gamma$  的空间  $\Omega$  内的热传导问题，也有三类边界条件。

(1) 恒温端，即温度分布已知：

$$u|_{\Gamma} = f \quad (1.3.7)$$

(2) 绝热端，即物体与周围介质绝热：

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (1.3.8)$$

(3) 热交换端, 即物体与周围介质有热交换:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right) \Big|_{\Gamma} = hu_1 \Big|_{\Gamma} \quad (1.3.9)$$

其中,  $h = k/\sigma$ ,  $k$  为热导率,  $\sigma$  为两介质间的热交换系数;  $u_1$  为与物体接触处的介质温度。

对于边界为  $\Gamma$  的空间  $\Omega$  内的静电位问题, 同样有三类边界条件。

(1) 导体边界, 即边界上的电位为常数  $\phi$ :

$$u \Big|_{\Gamma} = \phi \quad (1.3.10)$$

(2) 面电荷边界, 即导体边界上面电荷密度  $\rho_s$  已知:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (1.3.11)$$

(3) 介质边界, 即已知边界内、外的介电常数  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  和边界上面电荷密度  $\rho_s$ :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + ku \right) \Big|_{\Gamma} = \frac{\rho_s}{\varepsilon_1} \quad (1.3.12)$$

其中,  $k$  为与  $\varepsilon_2$  和空间  $\Omega$  外部形状有关的常数。

以上三个问题的三类边界条件都是按其物理规律进行分类的。若按数学形式进行分类, 则可以归结为以下三类边界条件。

(1) 第一类边界条件, 也称狄利克雷边界条件, 即在边界上直接给出未知函数的值:

$$u \Big|_{\Gamma} = f \quad (1.3.13)$$

(2) 第二类边界条件, 也称诺依曼边界条件, 即在边界上给出未知函数沿边界的外法向导数的值:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f \quad (1.3.14)$$

(3) 第三类边界条件, 也称罗宾边界条件, 即在边界上给出未知函数及其沿边界的外法向导数的线性组合的值:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + ku \right) \Big|_{\Gamma} = f \quad (1.3.15)$$

在式 (1.3.13) ~ 式 (1.3.15) 中,  $f$  是定义在边界  $\Gamma$  上的已知函数。当  $f = 0$  时, 这些边界条件是齐次的, 否则是非齐次的。这里所说的次是指关于未知函数  $u$  的次, 而不是关于自变量的次。当  $f = 0$  时, 式 (1.3.13) ~ 式 (1.3.15) 等号的左边是  $u$  的一次项, 右边没有表达式, 因此这些边界条件是齐次的。当  $f \neq 0$  时, 式 (1.3.13) ~ 式 (1.3.15)

等号的右边是  $u$  的零次项，边界条件左、右的次不同，因此这些边界条件是非齐次的。

除了以上三类边界条件，还需要根据合理性对未知函数进行其他附加条件的约束。例如，对于一个鼓面的振动问题，从物理上讲，它只有一个边界，即鼓面的圆周。通常在鼓面的圆周上采用第一类边界条件；从数学上讲，这是二维极坐标问题。关于极径  $\rho$  有两个边界，一个是  $\rho=0$ ，另一个是  $\rho=R$ ，其中  $R$  为鼓面的半径。关于极角  $\theta$ ，若它定义在区间  $[0, 2\pi]$  上，则此时也有两个边界，一个是  $\theta=0$ ，另一个是  $\theta=2\pi$ ；若它定义在区间  $(-\infty, +\infty)$  上，则需要满足周期性。要从数学上求解这个问题，就需要在这四个边界上都对未知函数进行约束。根据合理性，圆心处的振幅是有限的，因此，有一个自然边界条件：

$$|u(0, \theta, t)| < +\infty \quad (1.3.16)$$

根据周期性，有一个周期边界条件：

$$u(\rho, \theta, t) = u(\rho, \theta + 2\pi, t) \quad (1.3.17)$$

对于一个无限长的圆筒内的热传导问题，采用圆柱坐标系，无穷远  $z = \pm\infty$  处的温度应该是有限的，因此，有一个自然边界条件：

$$|u(\rho, \theta, \pm\infty, t)| < +\infty \quad (1.3.18)$$

根据周期性，有一个周期边界条件：

$$u(\rho, \theta, z, t) = u(\rho, \theta + 2\pi, z, t) \quad (1.3.19)$$

对于一个球域内的静电位问题，采用球坐标系，若球心处无源，则球心处的电位应该是有限的，因此，有一个自然边界条件：

$$|u(0, \theta, \varphi)| < +\infty \quad (1.3.20)$$

在仰角  $\theta$  的两个边界 ( $\theta=0$ ,  $\theta=\pi$ ) 上，即  $\pm z$  轴，若无源，则其电位也应该是有限的，因此，有一个自然边界条件：

$$|u(r, 0, \varphi)| < +\infty \quad (1.3.21)$$

$$|u(r, \pi, \varphi)| < +\infty \quad (1.3.22)$$

根据周期性，有一个周期边界条件：

$$u(r, \theta, \varphi) = u(r, \theta, \varphi + 2\pi) \quad (1.3.23)$$

值得注意的是，数学中常用  $\theta$  表示方位角，用  $\varphi$  表示仰角；而物理中常用  $\theta$  表示仰角，用  $\varphi$  表示方位角。本书采用物理中的习惯用法。

对于随时间变化的物理过程，某一时刻的状态会影响此时刻之后的过程。在初始时刻，即  $t=0$  时的状态是初始条件。在弦的振动问题中，有两个初始条件，分别是初始位

移和初始速度，即

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.3.24)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \quad (1.3.25)$$

其中， $\varphi$ 和 $\psi$ 为已知函数。在热传导问题中，某时刻的温度会影响该时刻之后的温度分布。在初始时刻，即 $t=0$ 时的温度分布是初始温度，即

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \quad (1.3.26)$$

从数学上讲，我们需要定解条件来确定通解中的任意常数或函数以得到特解。对于波动方程、热传导方程和位势方程，它们都含有关于空间的二阶偏导数，因此，对于每个空间坐标，都需要两个边界条件。波动方程含有关于时间的二阶偏导数，因此需要两个初始条件。热传导方程含有关于时间的一阶偏导数，因此需要一个初始条件。位势方程和时间无关，因此不需要初始条件。

### 1.3.3 定解问题的描述

一个偏微分方程与定解条件一起构成对一个具体问题的完整描述，称为定解问题。按照定解条件的类型，定解问题分为初值问题、边值问题和混合问题。

初值问题也称柯西问题，只有初始条件而无边界条件。例如，描述无限长弦的振动过程的初值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (1.3.27)$$

严格地讲，初值问题也是有边界条件的。它的边界条件是在无穷远处有界的自然边界条件。

边值问题只有边界条件而无初始条件。按照边界条件的类型，边值问题可分为第一类边值问题（狄利克雷问题），如

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \theta, \varphi) = -F(r, \theta, \varphi), & 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi), & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.3.28)$$

第二类边值问题（诺依曼问题），如



$$\begin{cases} \nabla^2 u(r, \varphi, z) = -F(r, \varphi, z), & 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < z < l \\ \frac{\partial u(R, \varphi, z)}{\partial r} = f(\varphi, z), & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < z < l \\ \frac{\partial u(r, \varphi, 0)}{\partial z} = g(r, \varphi), \quad \frac{\partial u(r, \varphi, l)}{\partial z} = h(r, \varphi), & 0 < r < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.3.29)$$

第三类边值问题（罗宾问题），如

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\rho, \theta) = -F(\rho, \theta), & 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \frac{\partial u(R, \theta)}{\partial \rho} + ku(R, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.3.30)$$

混合边值问题，如

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = -F(x, y), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b \\ u(0, y) = f(y), \quad u(a, y) = g(y), & 0 < y < b \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = \psi(x), & 0 < x < a \end{cases} \quad (1.3.31)$$

混合问题也称初边值问题，既有初始条件又有边界条件，如

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.3.32)$$

### 1.3.4 定解问题的适定性

如果一个定解问题的解存在，唯一且稳定，则该问题是适定的；否则，该问题是不适定的。如果一个定解问题是适定的，则说明该定解问题的提法是合理的，其泛定方程和定解条件正确反映了客观实际。

式（1.3.32）是一个一维有界域波动方程的初边值问题。若将该定解问题修改为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.3.33)$$

则其关于  $t$  的定解条件定义在  $t=0$  和  $t=T$  两点，即定义域的两个边界，关于  $t$  的定解条件也是边界条件。从数学上讲，该定解问题的定解条件的个数是合理的。但根据本书第 2

章的分离变量法可以得出, 该定解问题的解可能不存在。因此, 波动方程的边值问题是不适定的。

若将式 (1.3.32) 中的初始条件去掉一个, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.3.34)$$

则约束降低, 该定解问题会有无穷多个解, 其解不具有唯一性。因此, 缺少定解条件的定解问题是不适定的。

对于一个半平面的位势问题, 若将该定解问题写为

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = -F(x, y), & x > 0, \quad -\infty < y < +\infty \\ u(0, y) = \varphi(y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \psi(y), & -\infty < y < +\infty \end{cases} \quad (1.3.35)$$

则其关于  $x$  的两个定解条件定义在  $x=0$  处, 关于  $x$  的定解条件变成了初始条件。对该定解问题的定解条件增加一个扰动, 定解条件变为

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \psi(y) + \frac{1}{n} \sin(ny) \quad (1.3.36)$$

若  $n \rightarrow +\infty$ , 则该扰动为一个微小扰动。根据本书第 4 章的积分变化法可以得出, 定解条件在增加一个微小扰动后, 其解的变化量可以达到无穷大, 因此, 该定解问题的解不稳定, 即位势方程的初值问题是不适定的。位势方程只有边值问题。一个适定的半平面的位势问题可以写为

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) = -F(x, y), & x > 0, \quad -\infty < y < +\infty \\ u(0, y) = \varphi(y), & -\infty < y < +\infty \end{cases} \quad (1.3.37)$$

式 (1.3.37) 中隐含了在无穷远处的自然边界条件。

## 1.4 线性叠加原理

根据物理中所学的知识可知, 作用在同一物体上的几个外力所产生的加速度等于这些单个外力单独作用所产生的加速度之和, 空间中几个电荷在某点产生的电位等于这些电荷单独存在时在该点产生的电位之和。这些叠加效应称为线性叠加原理。

从数学上讲, 对于定义域内的任意两个函数  $u_1$  和  $u_2$ , 若算子  $L$  满足

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2, \quad \forall c_1, c_2 \quad (1.4.1)$$

则算子  $L$  是线性的。很容易证明，一次函数是线性的，二次函数是非线性的，三角函数是非线性的，一阶导数、二阶导数、一重积分、二重积分等都是线性的，导数的平方是非线性的。

对于含有  $n$  个自变量的二阶偏微分方程：

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (1.4.2)$$

引入偏微分算子：

$$L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \quad (1.4.3)$$

可以将式 (1.4.2) 简单表示为

$$Lu(\mathbf{x}) = f, \quad \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (1.4.4)$$

若  $a_{ij}$ 、 $b_i$ 、 $c$  都和  $u$  无关，则  $L$  是线性算子。若  $f$  也和  $u$  无关，则式 (1.4.2) 和式 (1.4.3) 是线性偏微分方程。进一步，若  $f=0$ ，则它们是齐次偏微分方程；若  $f \neq 0$ ，则它们是非齐次偏微分方程。齐次偏微分方程和非齐次偏微分方程都是线性方程。齐次方程特指方程的每项都是未知函数的一次项。若方程的每项的次数都相同，但不是一次，则该方程仍然不是齐次方程。

线性叠加原理的数学描述：若  $L$  为一线性算子，则有以下原理成立。

(1) 有限叠加原理。

若  $u_i(\mathbf{x})$  满足  $Lu_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ ， $i=1, 2, \dots, m$ ，则  $Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ ，其中， $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m c_i u_i(\mathbf{x})$ ， $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m c_i f_i(\mathbf{x})$ ， $c_i$  为任意数。

(2) 无限叠加原理。

若  $u_i(\mathbf{x})$  满足  $Lu_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ ， $i=1, 2, \dots$ ，则  $Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ ，其中， $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(\mathbf{x})$ ， $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(\mathbf{x})$ ， $c_i$  为任意数。

(3) 积分叠加原理。

若  $u(\mathbf{x}; \xi)$  满足  $Lu(\mathbf{x}; \xi) = f(\mathbf{x}; \xi)$ ， $\xi$  为一参数或一参向量，则  $LU(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ ，其中， $U(\mathbf{x}) = \int c(\xi) u(\mathbf{x}; \xi) d\xi$ ， $F(\mathbf{x}) = \int c(\xi) f(\mathbf{x}; \xi) d\xi$ ， $c(\xi)$  为任意函数。

线性叠加原理具有相当的普适性，在复杂问题的简化和求解过程中扮演着重要角色，在本书后续章节将会多次用到。

## 小结

### 1. 三类典型的数学物理方程

$$\text{波动方程: } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u .$$

$$\text{热传导方程: } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \nabla^2 u .$$

$$\text{位势方程: } \nabla^2 u = 0 .$$

### 2. 定解条件

确定微分方程通解中的任意常数或函数的条件称为定解条件。根据物理意义，可以将定解条件分为边界条件和初始条件。定解条件的个数应该与微分方程中微分的阶数相同。

### 3. 定解问题

一个偏微分方程与定解条件一起构成对一个具体问题的完整描述，称为定解问题。按照定解条件的类型，定解问题分为初值问题、边值问题和混合问题。

### 4. 线性叠加原理

方程可分为线性方程和非线性方程，线性方程可分为齐次方程和非齐次方程。线性方程满足线性叠加原理。线性叠加原理在复杂问题的简化和求解过程中扮演着重要角色。

## 习题 1

1. 以下方程哪些是线性的？哪些是非线性的？哪些是齐次的？哪些是非齐次的？

$$(1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u .$$

$$(2) \nabla^2 u = 0 .$$

$$(3) \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu .$$

$$(4) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 .$$

$$(5) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + f .$$

$$(6) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = -\delta(r).$$

$$(7) y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$(8) \nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

$$(9) \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[ 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$(10) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \sin u.$$

$$(11) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$(12) \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

2. 证明三维拉普拉斯方程在球坐标系下的形式为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

3. 证明弹性支撑端的边界条件为式 (1.3.5)。

4. 有一均匀细杆，只要杆中任一小段有纵向位移和速度，必导致相邻段的压缩和伸长，这种压缩和伸长传开，就有纵波沿着杆传播。杆的杨氏模量  $E$  是杆的应力  $P$  与应变  $\frac{\partial u}{\partial x}$  之间的比例因子，即  $P = E \frac{\partial u}{\partial x}$ ，杆的线密度为  $\rho$ 。试推导杆的纵向振动方程。

5. 长为  $l$  的均匀细弦，在  $x=0$  和  $x=l$  两端固定，在  $x=x_0$  处施加横向力使弦偏离平衡位置，位移为  $u_0$ ，达到稳定后放手任其自由振动。试写出该弦振动问题的定解条件。

6. 长为  $l$  的弹簧放置在光滑水平面上， $x=0$  端固定，将  $x=l$  端拉长  $u_0$ ，达到稳定后放手任其自由振动。弹簧的刚度系数为  $k$ 。试写出该弹簧振动问题的定解条件。

7. 长为  $l$  的均匀细杆，侧面绝缘。杆的热导率为  $k$ ，比热容为  $c$ ，线密度为  $\rho$ 。试推导该杆的热传导方程。

8. 设函数  $u_1(x, t)$ 、 $u_2(x, t)$  和  $u_3(x, t)$  分别是以下定解问题的解：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \xi(t), \quad u(l, t) = \eta(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

试证明  $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t)$  是以下定解问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \xi(t), \quad u(l, t) = \eta(t), & t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$