

第3章

射频集成电路频域分析

我们看到的世界都以时间标定和贯穿，日出日落、花开花谢、春夏秋冬、生命代谢都很直观地和时间建立起了联系。我们称这种以时间作为参照来观察动态世界的方法为时域分析。我们也想当然地认为，世间万物都在随着时间不停地改变，并且永远不会静止下来。如果换一个角度观察，就会发现世界也可以是永恒不变的。任何时域的动态行为都会存在一定的规律性（即使是完全随机的行为也可以采用统计学的方法找出规律性）。这个规律性组成了一个完全不同于时域的静止世界。这个静止世界通常可以在频域获得。频域最重要的性质是，它不是真实的，是一个遵循特定规则的数学范畴。频域分析可以将动态的时域分析静态化，可以更加直观地捕捉一个复杂系统的本质。

在信号处理领域，频域是一个基本域，可以清晰反映信号与响应系统之间的作用结果。在进行射频集成电路设计、仿真及测试时，多数都是从频域角度出发，包括射频收发机的架构选取及频率规划、滤波器的带宽选取和结构设计、噪声系数的计算、线性性能的分析等。具备立足频域的射频集成电路分析及设计能力就显得尤为重要。

本章试图用较为通俗的语言和简单的数学模型建立时域和频域之间的桥梁，尽量避开晦涩的数学推导过程，呈现内含的基本物理意义，帮助读者建立基于频域的射频集成电路设计概念。

3.1 系 统

在信号处理理论中，系统是指能加工、变换信号的实体。一个典型的系统通常至少包含输入和输出两个端口。根据输入与输出之间的关系，系统可分为线性时不变系统、线性时变系统、非线性时不变系统和非线性时变系统。

线性系统是指同时满足叠加性和均匀性（又称齐次性）的系统。叠加性是指当多个输入信号共同作用于系统输入端时，总的输出等于每个输入单独作用时产生的输出之和。均匀性是指当输入信号增大若干倍时，输出也相应增大同样的倍数。

线性系统叠加性和均匀性的数学模型可描述如下：存在若干个输入信号 $x_1(t) \sim x_n(t)$ ， $n \in \mathbb{Z}$ ，经过线性系统后的输出为 $y_1(t) \sim y_n(t)$ ，即

$$y_m(t) = T[x_m(t)], m = 1, 2, \dots, n \quad (3-1)$$

将输入信号分别乘以系数 $a_1 \sim a_n$ ，累加后输入至线性系统，线性系统的输出为

$$y(t) = T\left[\sum_{m=1}^n a_m x_m(t)\right] = \sum_{m=1}^n a_m y_m(t) \quad (3-2)$$

时不变系统是指特性不因时间变化而变化的系统。时不变系统的输出响应仅与输入信号有关，与输入信号注入时刻无关，即输入的延时对应输出的等长延时。时变系统是指输入信号中一个或一个以上的参数随时间变化，导致输出响应也随时间而变化的系统。时变系统的输出响应不仅与输入信号有关，也与输入信号注入时刻有关。

时不变系统的等长延时性数学模型：存在输入信号 $x_1(t)$ ，经过时不变系统后的输出响应为 $y_1(t)$ ，即

$$y_1(t) = T[x_1(t)] \quad (3-3)$$

将输入信号进行适当延时 t_0 ，输入至时不变系统，时不变系统的输出为

$$y(t) = T[x_1(t - t_0)] = y_1(t - t_0) \quad (3-4)$$

线性系统强调叠加性和均匀性，时不变系统强调等长延时性。在进行射频集成电路设计时，绝大部分电路模块均可以看作线性时不变系统。线性时不变系统的最大特点是频率成分的完全复制性，就是既不存在频谱增生或减少，也不存在频率搬移的情况。这是进行射频集成电路架构设计和频率规划的基础。当然射频集成电路不是一个完全的线性时不变系统，其内部需要一个非线性或时变系统模块来完成上/下变频功能。由于非线性系统通常会导致频谱增生效应，因此一般情况下均采用线性时变模块来完成变频功能。

3.2 系统响应与传输函数

线性时不变系统的响应为单位冲激响应，即当单位冲激信号作用于输入端时，输出端在时域的表现形式。

对于模拟域连续时间系统，单位冲激信号具有如下特性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1; \delta(t) = 0, t \neq 0 \quad (3-5)$$

对于数字域离散时间系统，单位冲激信号可以用单位脉冲信号来表示，具有如下特性：

$$\delta(n) = 1, n = 0; \delta(n) = 0, n \neq 0; n \in \mathbb{Z} \quad (3-6)$$

离散时间系统的单位冲激信号是对采样周期进行归一化后的结果（见附录 1，各种连续域的时频变换在离散域均需要对采样周期进行归一化）。为了更加形象地解释系统的单位冲激响应，本章避免采用纯粹的数学推导过程，以图形为主进行说明。以一个经过采样保持的连续时间三角脉冲信号 $x(t)$ 为例，其采样保持过程等效示意图如图 3-1 所示。经过采样保持后的三角脉冲信号可以分为 9 部分，每部分均可以等价为一个时间宽度为 T_0 的脉冲信号，其中 T_0 为采样周期。以第一个采样保持脉冲作为 0 时刻时间参考，并令 $u(t)$ 为单位脉冲响应，有

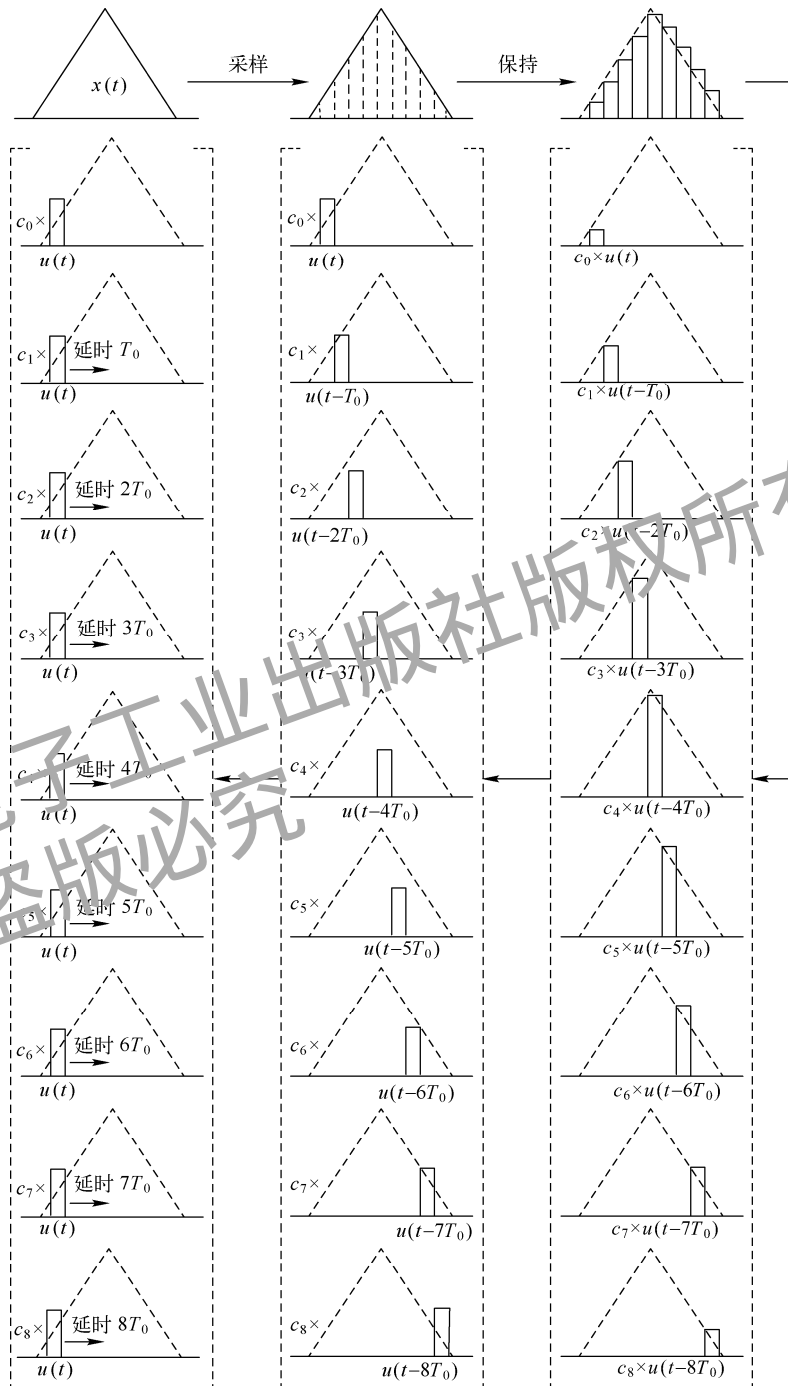


图 3-1 采样保持过程等效示意图

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = 1; u(t) = 0, |t| > T_0 / 2 \quad (3-7)$$

即 9 个脉冲信号均可以通过 $u(t)$ 来表示, 只是相乘系数 $c_0 \sim c_8$ 和延时 $(0 \sim 8)T_0$ 不同。

由于线性时不变系统具有累加性、均匀性和等长延时性, 因此可以通过 $u(t)$ 的输出响应来描述系统响应的全部特征, 并对响应依次进行均匀化、等长延时, 最终进行累加便可得到系统相对于输入的输出响应。一个线性时不变系统的单位脉冲响应如图 3-2 所示。假定输入 $u(t)$ 对应的输出响应为 sinc 函数的一部分, 则对输出响应分别与系数 $c_0 \sim c_8$ 相乘, 并延时 $(0 \sim 8)T_0$ 后进行累加。图 3-3 右侧为累加后的输出响应, 虚线部分为线性时不变系统对于三角脉冲输入信号的输出响应。令 $T_0 \rightarrow 0$, 有 $u(t) = \delta(t)$, 三角脉冲输入等效为三角信号。因此可以得出如下结论: 对于任意线性时不变系统, 输出响应均可以通过对单位冲激响应进行均匀化、等长延时并累加得到。由于线性时不变系统的单位冲激响应可以反映全部特性, 因此将单位冲激响应称为线性时不变系统的系统响应, 用 $h(t)$ 表示。

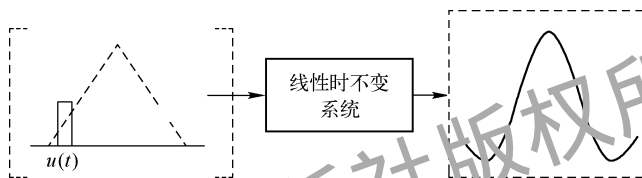


图 3-2 线性时不变系统的单位脉冲响应

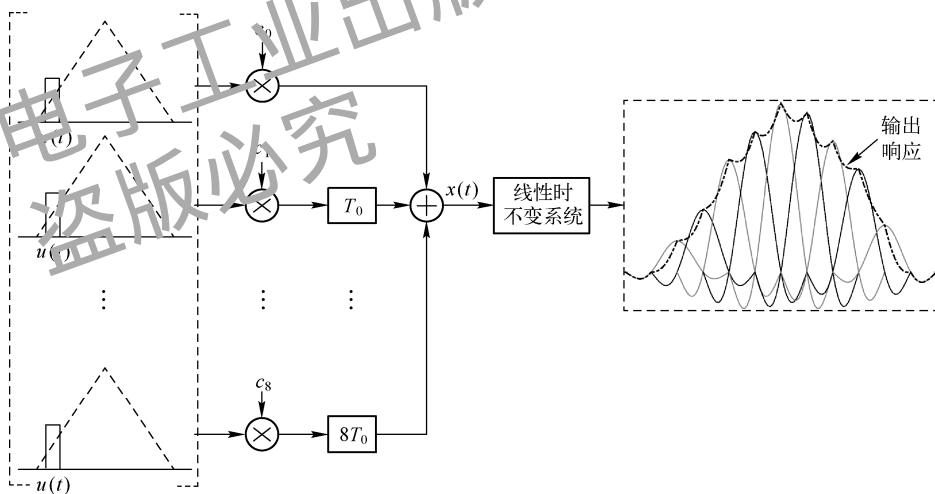


图 3-3 线性时不变系统的三角脉冲响应

对于数字域的离散时间系统, 单位冲激信号可用式 (3-6) 中的 $\delta(n)$ 表示, 系统响应通常用 $h(n), n \in \mathbb{Z}$ 表示。

在进行电路分析和设计时, 经常用到的一个概念是系统的传输函数。传输函数为信号通过电路 (系统) 时的频域加工和处理过程, 是一个频域模型, 通常将其称为系统的频率响应, 定义为

$$F_h(\omega) = \mathcal{F}[h(t)], F_h(s) = \mathcal{L}[h(t)] \quad (3-8)$$

式中, $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{L}$ 分别代表傅里叶变换和拉普拉斯变换。对于数字域的离散时间系统, 系统的频率相应可表示为

$$F_h(z) = \mathcal{Z}[h(n)] \quad (3-9)$$

式中, $\mathcal{Z}$ 代表 Z 变换。

至此, 上面已经讨论了系统响应和传输函数(系统频率响应), 它们均可表征一个线性时不变系统的全部特性, 只是一个在时域进行描述, 一个在频域进行描述。定义系统响应和传输函数的目的是期望输出响应能够分别与输入信号的时域和频域表达式通过数学运算建立联系, 通过这种联系可以直接计算对应的输出响应在时域和频域的表达式。

3.3 卷积和乘积

图 3-3 通过图示方式说明了一个给定信号输入至线性时不变系统时的具体计算过程。该过程虽然便于理解, 但是并不容易提炼出一个具体的数学表达式来建立输入信号和系统响应之间的联系, 输出响应也就无从得知。不妨换一个角度, 从数字域的离散时间系统着手分析。

线性时不变离散时间系统的单位冲激响应如图 3-4 所示。假设输出端存在 7 个有限的响应值, 分别为 $h[0] \sim h[6]$ 。不失一般性, 仅讨论三角脉冲的前三个离散采样点 $x[0] \sim x[2]$, 其中

$$x[n] = \sum_{m=0}^2 x[m] \times \delta[n-m] \quad (3-10)$$

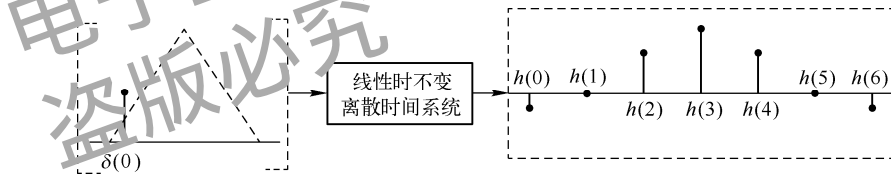


图 3-4 线性时不变离散时间系统的单位冲激响应

式中, $n, m \in [0, 1, 2]$ 。经过线性时不变离散时间系统后, 具体响应过程如图 3-5 所示。其中, Z^{-1} 和 Z^{-2} 分别表示延时 1 个和 2 个采样时钟周期。令 $y(n)$ 代表系统的输出响应, 则

$$\begin{aligned} y[0] &= x[0] \times h[0] \\ y[1] &= x[0] \times h[1] + x[1] \times h[0] \\ y[2] &= x[0] \times h[2] + x[1] \times h[1] + x[2] \times h[0] \\ &\dots \\ y[6] &= x[0] \times h[6] + x[1] \times h[5] + x[2] \times h[4] \\ y[7] &= x[1] \times h[6] + x[2] \times h[5] \\ y[8] &= x[2] \times h[6] \end{aligned} \quad (3-11)$$

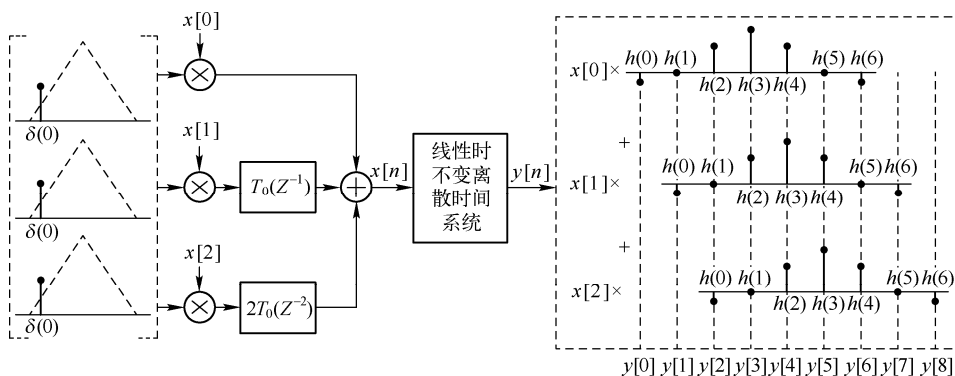


图 3-5 线性时不变离散时间系统的三角脉冲响应（部分）

根据式 (3-11)，可以得到如下表达式：

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] \times x[n-m] \quad (3-12)$$

或

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \times h[n-m] \quad (3-13)$$

式中， $m, n \in \mathbb{Z}$ ，且上述两式等价。通常将式 (3-12) 和式 (3-13) 的数学运算称为卷积，用符号“*”表示。应该明确的是，在求解系统的输出响应时，卷积只适用于线性时不变系统，因为式 (3-11) 是基于图 3-5 推导出来的，而图 3-5 是基于线性时不变系统的均匀性、等长延时性和累加性得出的。如果逐步减小采样时间间隔，则数字域离散时间系统会逐步过渡到模拟域连续时间系统，累加符号可以用积分符号替代，式 (3-12) 和式 (3-13) 在模拟域的表达式为

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \times x(t-\tau) d\tau \quad (3-14)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \times h(t-\tau) d\tau \quad (3-15)$$

至此，通过卷积的数学运算形式建立起了线性时不变系统中输入和输出响应之间的联系，在求解系统的输出响应时便有了严格的数学模型。

在进行射频集成电路设计时，采用时域卷积的方式获得系统的输出响应是非常烦琐的，对式 (3-14) 和式 (3-15) 分别进行时域到频域的转化，可得

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[h(t) * x(t)] = \mathcal{F}[h(t)] \times \mathcal{F}[x(t)] = F_h(\omega) \times F_x(\omega) \quad (3-16)$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) * h(t)] = \mathcal{F}[x(t)] \times \mathcal{F}[h(t)] = F_x(\omega) \times F_h(\omega) \quad (3-17)$$

拉普拉斯变换和 Z 变换具有同样的结论。可以看出，时域复杂的卷积运算转换到频域后只需要进行简单的乘积即可，大大降低了电路的分析难度。例如，在进行滤波器设计时，只要确定了系统架构和频率规划，根据具体的输入信号功率谱便可以预估滤波器应具备的频率响应，据此得出滤波器的时域模型和相关参数。

时域的乘积对应频域的卷积，表达式为

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[h(t) \times x(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[h(t)] * \mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{2\pi} F_h(\omega) * F_x(\omega) \quad (3-18)$$

$$Y(\omega) = \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) \times h(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[h(t)] = \frac{1}{2\pi} F_x(\omega) * F_h(\omega) \quad (3-19)$$

应该强调的是, 式 (3-18) 和式 (3-19) 中的 $h(t)$ 仅表示一个函数项, 与式 (3-16) 和式 (3-17) 中的 $h(t)$ 不同, 不特指线性时不变系统的系统响应。时域卷积在射频集成电路设计时针对线性时不变系统 (模块), 时域乘积对应线性时变系统 (模块)。例如, 在进行滤波器设计时, 通常是基于时域卷积频域乘积原理确定滤波器带宽; 在进行混频器设计时, 时域卷积不再成立, 混频器一般都会被设计为一个线性时变系统用以提供输入信号频谱搬移的功能, 不具备卷积运算时的等长延时性。

混频器时域模型如图 3-6 所示。两个 NMOS 管模拟理想开关 SW1 和 SW2; 当栅极电压为高电平时, 开关闭合; 当栅极电压为低电平时, 开关断开。根据该模型可以写出时域表达式:

$$y(t) = x(t) \times \text{sgn}[\sin(\omega_0 t)] * Z_F(t) = x(t) \times \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t) * Z_F(t) \quad (3-20)$$

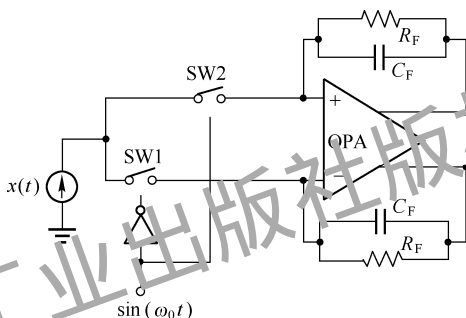


图 3-6 混频器时域模型

式中, sgn 函数表示取符号运算, Z_F 为并联电阻 R_F 和电容 C_F 的时域单位电流冲激响应。式 (3-20) 最右边表达式的中间项是方波信号进行傅里叶级数展开后的表达式, n 为奇数。由线性时变系统的开关效应产生, 不属于输入信号。如果对输入信号进行一定的延时, 延时为 t_0 , 则有

$$\begin{aligned} y'(t) &= x(t-t_0) \times \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(n\omega_0 t) * Z_F(t) \\ &\neq y(t-t_0) = x(t-t_0) \times \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin[n\omega_0(t-t_0)] * Z_F(t) \end{aligned} \quad (3-21)$$

式中, $n\omega_0 t_0 \neq 2\pi$ 。因此混频器是一个时变系统。对式 (3-20) 进行傅里叶变换 (见 3.5 节) 可得

$$F_y(\omega) = F_x(\omega) * \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \delta(\omega - n\omega_0) \times Z_F(\omega) \quad (3-22)$$

式中, $\delta(\omega)$ 为频域的单位冲激函数; n 为奇数。式 (3-22) 可以另外表达为

$$F_y(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} F_x(\omega - n\omega_0) \times Z_F(\omega) \quad (3-23)$$

由式 (3-23) 可知, 混频器只是对输入信号的频谱进行了奇数倍开关频率的频谱

搬移, 并对相应的奇数倍谐波搬移提供了 $\frac{2}{n\pi}$ 的增益, 混频过程中不需要的高次谐波频谱搬移量, 可通过后续的滤波器滤除。

3.4 傅里叶级数

连续时域向连续频域的转换离不开傅里叶变换和拉普拉斯变换, 离散时域向离散频域的转换离不开离散傅里叶变换和 Z 变换。很多读者之所以对傅里叶变换、拉普拉斯变换、离散傅里叶变换和 Z 变换感到困惑, 除较烦琐的计算过程外, 最主要的原因是没有深刻理解它们具体的物理意义和之间的联系。要想彻底掌握傅里叶变换、拉普拉斯变换和 Z 变换的具体物理意义、区别及联系, 必须从傅里叶级数开始, 从具体到抽象, 从离散到连续, 逐步脱离数学抽象, 建立一个清晰的物理概念和模型。

在具体讲解四种变换的物理意义之前, 首先讨论傅里叶级数, 并逐步向四种变换过渡。

式 (3-20) 最右边中间项是方波的傅里叶级数展开结果, 方波由函数 $\text{sgn}[\sin(\omega_0 t)]$ 产生。由式 (3-20) 可知, 方波信号可以分解为一系列正弦信号的叠加。这些正弦信号具有不同的频率和幅度 (频率是基波频率的奇数倍, 幅度与基波频率倍数成反比), 如图 3-7 所示。图中频率轴代表基波频率的倍数, 并给出了 1~9 次谐波的累加效果。如果想得到更加逼真的方波效果, 由式 (3-20) 可知, 需要更多个幅度不一的谐波进行累加求和。

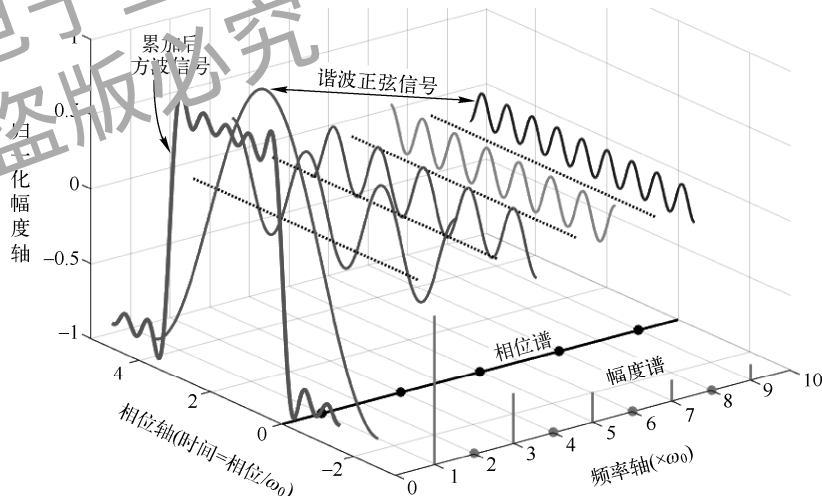


图 3-7 方波信号的傅里叶级数展开 (正弦信号)

傅里叶级数的展开是有前提条件的: 信号必须是周期性的。这一前提条件虽然大大限制了傅里叶级数的应用, 但并不影响傅里叶级数的重要意义, 因为任意信号时域至频域的转换都是基于傅里叶级数衍生出来的。

将式 (3-20) 的具体推导过程放在后面讲解, 先强调一个客观存在: 方波信号