第 3 章　反射和透射

从麦克斯韦方程组和本构关系出发，可以得到边界趋于无穷远的均匀介质中电磁波的传播形式。对于大多数实际问题，通常遇到的介质是不均匀的，即使是均匀介质，也无法延伸至无穷远。因此，在有限空间研究非均匀介质中电磁波的传播有着重要的意义。当电磁波入射到不同介质的分界面时，一部分电磁波将被反射，另一部分将透过分界面。时谐场的麦克斯韦方程组和边界条件的结合为求解电磁波的反射和透射提供了方法。本章将考虑其中最简单的一种情况，即平面波在不同均匀介质分界面的反射和透射情况。

3.1　平面波的反射和透射

3.1.1　不同极化的反射和透射

任意极化的入射平面波都可以分解为横磁（Transverse Magnetic，TM）波和横电（Transverse Electric，TE）波，其中 TM 波是电场矢量平行于入射平面的线极化波，称为平行极化波或简称为 p 波，TE 波是电场矢量垂直于入射平面的线极化波，称为垂直极化波或简称为 s 波。

1．TM 波

考虑单位幅度的 TM 波从介电常数为 ε 和磁导率为 μ 的各向同性介质入射到介电常数为 ε_t 和磁导率为 μ_t 的各向同性介质的情况（图 3.1.1）。假设入射平面平行于 xOz 平面，其中 xOz 平面包含入射波矢量和界面法向矢量。入射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.1.1}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = \frac{-1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} \tag{3.1.2}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}^* = \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\frac{1}{\omega\varepsilon}\left|\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}\right|^2 \tag{3.1.3}$$

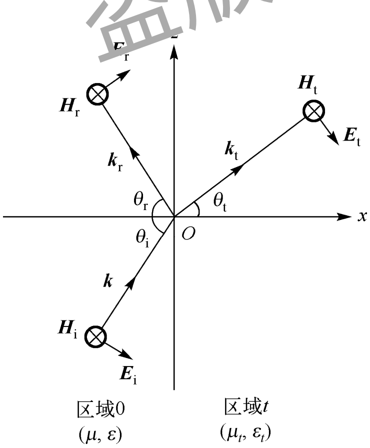


图 3.1.1　TM 波的反射和透射

反射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} = \hat{\boldsymbol{y}}R^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.1.4}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = \frac{-1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} \tag{3.1.5}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}^* = \boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}\frac{1}{\omega\varepsilon}\left|\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}\right|^2 \tag{3.1.6}$$

式中，R^{TM} 是磁场分量 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}y}$ 的反射系数。透射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} = \hat{\boldsymbol{y}}T^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.1.7}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=\frac{-1}{\omega\varepsilon_t}\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} \tag{3.1.8}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}^{*}=\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\frac{1}{\omega\varepsilon_t}\left|\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}\right|^2 \tag{3.1.9}$$

式中，T^{TM} 是磁场分量 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}y}$ 的透射系数。

波矢量和相应的色散关系为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{x}}k_x+\hat{\boldsymbol{z}}k_z \tag{3.1.10}$$

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}=-\hat{\boldsymbol{x}}k_{\mathrm{r}x}+\hat{\boldsymbol{z}}k_{\mathrm{r}z} \tag{3.1.11}$$

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}=\hat{\boldsymbol{x}}k_{\mathrm{t}x}+\hat{\boldsymbol{z}}k_{\mathrm{t}z} \tag{3.1.12}$$

$$k_x^2+k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon=k^2 \tag{3.1.13}$$

$$k_{\mathrm{r}x}^2+k_{\mathrm{r}z}^2=\omega^2\mu\varepsilon=k^2 \tag{3.1.14}$$

$$k_{\mathrm{t}x}^2+k_{\mathrm{t}z}^2=\omega^2\mu_t\varepsilon_t=k_{\mathrm{t}}^2 \tag{3.1.15}$$

令分界面在 $x=0$ 处，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量连续。根据 H_y 的连续性，可以得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}+R^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{r}z}z}=T^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{\mathrm{t}z}z} \tag{3.1.16}$$

式（3.1.16）对任意 z 均成立，由此得到相位匹配条件

$$k_z=k_{\mathrm{r}z}=k_{\mathrm{t}z} \tag{3.1.17}$$

根据 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 切向分量连续的边界条件，可以得到

$$1+R^{\mathrm{TM}}=T^{\mathrm{TM}} \tag{3.1.18}$$

$$\frac{k_x}{\varepsilon}(1-R^{\mathrm{TM}})=\frac{k_{\mathrm{t}x}}{\varepsilon_t}T^{\mathrm{TM}} \tag{3.1.19}$$

需要注意的是，此处并没有使用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 法向分量连续的边界条件，这是因为这两个条件不独立于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 切向分量连续的边界条件，就像高斯定律不独立于法拉第定律和安培定律一样。

根据方程（3.1.18）和方程（3.1.19），可以求出反射系数 R^{TM} 和透射系数 T^{TM}

$$R^{\mathrm{TM}}=R_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}=\frac{1-p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}}{1+p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}} \tag{3.1.20}$$

$$T^{\mathrm{TM}}=T_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}=\frac{2}{1+p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}} \tag{3.1.21}$$

式中，

$$p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}=\frac{\varepsilon k_{\mathrm{t}x}}{\varepsilon_t k_x} \tag{3.1.22}$$

R_{0t}^{TM} 表示 TM 波从区域 0 入射，在区域 0 和区域 t 分界面的菲涅耳反射系数；T_{0t}^{TM} 表示从区域 0 到区域 t 的透射系数。

通过计算，可以得到入射波、反射波和透射波的坡印廷矢量时均值分别为

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \boldsymbol{k}\frac{1}{\omega\varepsilon} \right\} \tag{3.1.23}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{r}} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon}\left|R^{\mathrm{TM}}\right|^2 \right\} \tag{3.1.24}$$

$$\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{t}} \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_t}\left|T^{\mathrm{TM}}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{\mathrm{t}x}-k_{\mathrm{t}x}^*)x} \right\} \tag{3.1.25}$$

式中，假定 $k_{\mathrm{t}x}$ 和 ε_t 可能是复数。

需要注意的是，反射系数（或透射系数）与反射率（或透射率）并不相同，TM 波的菲涅耳反射系数表示入射磁场和反射磁场幅度的比值，而反射率表示反射场和入射场功率的比值。根据坡印廷矢量时均值，反射率（或称功率反射系数）可以表示为

$$r^{\mathrm{TM}} = \frac{-\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{r}} \rangle}{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} \rangle} = \left|R^{\mathrm{TM}}\right|^2 \tag{3.1.26}$$

透射率可以表示为

$$t^{\mathrm{TM}} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{t}} \rangle}{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} \rangle} = p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TM}}\left|T^{\mathrm{TM}}\right|^2 \tag{3.1.27}$$

并且有 $r^{\mathrm{TM}} + t^{\mathrm{TM}} = 1$。

2. TE 波

考虑单位幅度的 TE 波入射到两个各向同性介质分界面的情况（图 3.1.2）。入射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{x}}k_x + \hat{\boldsymbol{z}}k_z \tag{3.1.28}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = \hat{\boldsymbol{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.1.29}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} \tag{3.1.30}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}^* = \boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}\frac{1}{\omega\mu}\left|\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}\right|^2 \tag{3.1.31}$$

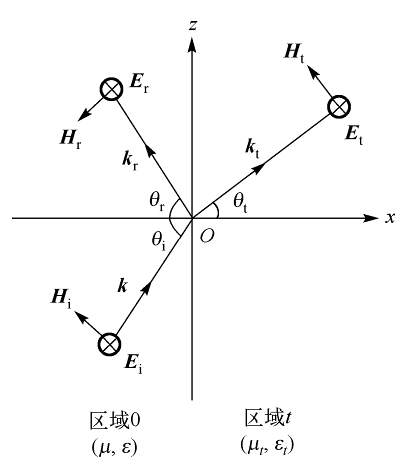


图 3.1.2 TE 波的反射和透射

反射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} = -\hat{\boldsymbol{x}}k_x + \hat{\boldsymbol{z}}k_z \tag{3.1.32}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = \hat{\boldsymbol{y}}R^{\mathrm{TE}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.1.33}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} \tag{3.1.34}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}^{*} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{r}} \frac{1}{\omega\mu} \left|\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}\right|^{2} \tag{3.1.35}$$

式中，R^{TE} 是电场分量 E_{iy} 的反射系数。透射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}} = \hat{\boldsymbol{x}} k_{\mathrm{t}x} + \hat{\boldsymbol{z}} k_{z} \tag{3.1.36}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \hat{\boldsymbol{y}} T^{\mathrm{TE}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{3.1.37}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\omega\mu_{t}} \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} \tag{3.1.38}$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}^{*} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}^{*} \frac{1}{\omega\mu_{t}} \left|\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}\right|^{2} \tag{3.1.39}$$

式中，T^{TE} 是电场分量 E_{iy} 的透射系数。

类似于 TM 波中的求解，可以得到反射系数 R^{TE} 和透射系数 T^{TE}

$$R^{\mathrm{TE}} = R_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}} = \frac{1 - p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}}{1 + p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}} \tag{3.1.40}$$

$$T^{\mathrm{TE}} = T_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}} = \frac{2}{1 + p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}} \tag{3.1.41}$$

式中，

$$p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}} = \frac{\mu k_{\mathrm{t}x}}{\mu_{t} k_{x}} \tag{3.1.42}$$

$R_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}$ 表示 TE 波从区域 0 入射，在区域 0 和区域 t 分界面的菲涅耳反射系数；$T_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}$ 表示从区域 0 到区域 t 的透射系数。

通过计算，可以得到入射波、反射波和透射波的坡印廷矢量时均值分别为

$$\left\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} \right\rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \boldsymbol{k} \frac{1}{\omega\mu} \right\} \tag{3.1.43}$$

$$\left\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{r}} \right\rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}}{\omega\mu} \left| R^{\mathrm{TE}} \right|^{2} \right\} \tag{3.1.44}$$

$$\left\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{t}} \right\rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{ \frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}^{*}}{\omega\mu_{t}^{*}} \left| T^{\mathrm{TE}} \right|^{2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{\mathrm{t}x} - k_{\mathrm{t}x}^{*})x} \right\} \tag{3.1.45}$$

式中，假定 $k_{\mathrm{t}x}$ 和 μ_{t} 可能为复数。上述针对 TE 波的反射和透射结果也可以通过麦克斯韦方程组的对偶关系 $\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{H}$ 、$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{E}$ 和 $\mu \rightleftarrows \varepsilon$ 得到。

与 TM 波的情况相同，TE 波的反射系数（或透射系数）与反射率（或透射率）也并不相同。根据坡印廷矢量时均值，反射率（或称功率反射系数）可以表示为

$$r^{\mathrm{TE}} = \frac{-\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \left\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{r}} \right\rangle}{\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \left\langle \boldsymbol{S}_{\mathrm{i}} \right\rangle} = \left| R^{\mathrm{TE}} \right|^{2} \tag{3.1.46}$$

透射率可以表示为

$$t^{\mathrm{TE}}=\frac{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{t}}\rangle}{\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\rangle}=p_{0\mathrm{t}}^{\mathrm{TE}}\left|T^{\mathrm{TE}}\right|^{2} \tag{3.1.47}$$

并且有 $r^{\mathrm{TE}}+t^{\mathrm{TE}}=1$。

3.1.2 相位匹配

根据相位匹配条件

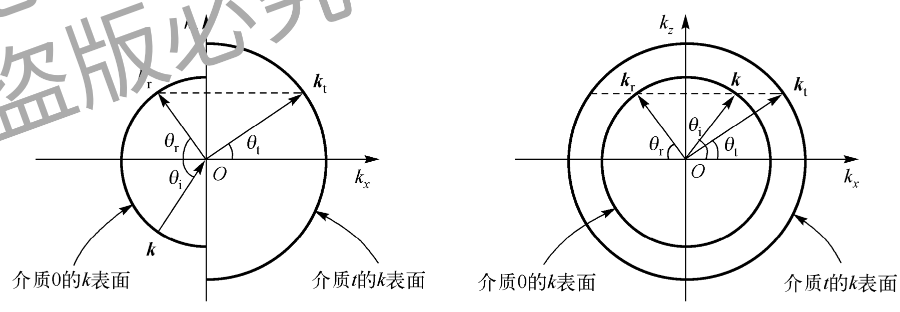
$$k_z=k_{\mathrm{r}z}=k_{\mathrm{t}z} \tag{3.1.48}$$

入射波、反射波和透射波的波矢量都必须位于同一平面上，该平面称为入射平面，由入射波矢量 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{i}}$ 和分界面的法线确定。虽然相位匹配条件[式（3.1.48）]是针对各向同性介质推导得到的，但它同样适用于具有平面波解的一般均匀介质。

相位匹配条件[式（3.1.48）]表明，入射波、反射波和透射波波矢量的切向分量是连续的。图 3.1.3（a）绘制的 k 表面进一步说明了相位匹配条件，其中入射平面为 xOz 平面。令 θ_{i}、θ_{r} 和 θ_{t} 分别表示入射角、反射角和透射角，并且 θ_{i}、θ_{r} 和 θ_{t} 都小于 $\pi/2$，根据相位匹配条件，有 $\theta_{\mathrm{r}}=\theta_{\mathrm{i}}$ 及斯涅尔定律

$$\frac{\sin\theta_{\mathrm{i}}}{\sin\theta_{\mathrm{t}}}=\frac{k_{\mathrm{t}}}{k}=\frac{n_{\mathrm{t}}}{n} \tag{3.1.49}$$

式中，$n=c\sqrt{\mu\varepsilon}$ 和 $n_{\mathrm{t}}=c\sqrt{\mu_t\varepsilon_t}$ 分别表示区域 0 和区域 t 中介质的折射率。需要注意的是，波矢量的大小也可以用圆表示，在图 3.1.3（b）所示的 k_xOk_z 平面，区域 0 和区域 t 中的介质可以分别表示为半径 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 和 $k_{\mathrm{t}}=\omega\sqrt{\mu_t\varepsilon_t}$ 的圆。在三维 k 空间中，若 $k_y\neq0$，则区域 0 和区域 t 中介质对应的 k 表面为球体。



（a）　　　　（b）

图 3.1.3　相位匹配

3.1.3 全反射和临界角

假设区域 0 中介质的折射率大于区域 t 中介质的折射率，即 $n>n_{\mathrm{t}}$，那么区域 0 中介质的 k 表面半径大于区域 t 中介质的 k 表面半径（图 3.1.4）。从图中可以发现，当入射波沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向的分量 k_z 大于透射波的波矢量 k_{t} 时，较小半径的 k 表面上不存在满足相位匹配条件的 k_{t}。只有透射波的波矢量为复数，才能使其分量大于透射波本身。此时透射波将变为沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向的倏逝波，这种现象称为全反射。

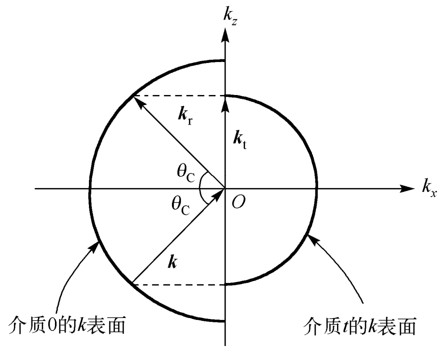


图 3.1.4　临界角反射

区域 t 中介质的 k 表面可以表示为

$$k_{tx}^2 + k_z^2 = k_t^2 \tag{3.1.50}$$

当发生全反射时，$k_z > k_t$，k_{tx} 必须为纯虚数，有

$$k_{tx} = \sqrt{k_t^2 - k_z^2} = \mathrm{i}k_{txI} \tag{3.1.51}$$

应该注意到，区域 t 中的波具有 $\exp(\mathrm{i}k_{tx}x + \mathrm{i}k_z z)$ 的特征形式。当 $k_z > k_t$ 时，该形式变为 $\exp(-k_{txI}x + \mathrm{i}k_z z)$，因此透射波在 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向上呈指数衰减，并以相速 ω/k_z 沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向传播。这可以看作波阵面垂直于分界面的平面波，在远离分界面的过程中呈指数衰减，这种类型的波称为表面波。由于当 $k_t = k_z = k\sin\theta_C$ 时，透射波开始转变为表面波，因此 θ_C 表示全反射的临界角，满足

$$\theta_C = \arcsin\frac{k_t}{k} = \arcsin\frac{n_t}{n} \tag{3.1.52}$$

当入射角大于临界角时，有

$$\boldsymbol{k}_t = \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{i}k_{txI} + \hat{\boldsymbol{z}}k_z \tag{3.1.53}$$

菲涅耳反射系数变为

$$R_{0t} = \frac{1 - p_{0t}}{1 + p_{0t}} = \frac{1 - \mathrm{i}p_{0tI}}{1 + \mathrm{i}p_{0tI}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_t} \tag{3.1.54}$$

考虑 TM 波的情况，$p_{0t} = \mathrm{i}\varepsilon k_{txI}/\varepsilon_t k_x = \mathrm{i}p_{0tI}$，有

$$\phi_t = -\arctan p_{0tI} = -\arctan\frac{\varepsilon k_{txI}}{\varepsilon_t k_x} \tag{3.1.55}$$

透射系数变为

$$T_{0t} = 1 + R_{0t} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi_t} = 2\cos\phi_t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_t} \tag{3.1.56}$$

发生全反射时，菲涅耳反射系数的相移称为古斯−汉欣（Goos-Hänchen）位移。

在发生全反射时，透射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{k}_t = \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{i}k_{txI} + \hat{\boldsymbol{z}}k_z \tag{3.1.57}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}=\hat{\boldsymbol{y}}2\cos\phi_{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_{\mathrm{t}}}\mathrm{e}^{-k_{\mathrm{txI}}x+\mathrm{i}k_z z} \tag{3.1.58}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=\frac{-1}{\omega\varepsilon_{\mathrm{t}}}\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} \tag{3.1.59}$$

$$\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{t}}\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_t}|\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}|^2\right\} \tag{3.1.60}$$

计算透射波的坡印廷矢量时均值，有

$$\langle\boldsymbol{S}_{\mathrm{t}}\rangle=\hat{\boldsymbol{z}}k_z\frac{2\cos^2\phi}{\omega\varepsilon_t}\mathrm{e}^{-2k_{\mathrm{txI}}x} \tag{3.1.61}$$

从式（3.1.61）可以发现，透射波的功率只沿 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 方向传播，沿 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 方向没有任何功率进入区域 t，即入射波被全反射。

3.1.4 全透射和布儒斯特角

考虑反射系数为零的情况，此时全部入射波透过分界面从区域 0 进入区域 t，这种现象称为全透射，对应的入射角称为布儒斯特角，用 θ_{B} 表示。考虑 TM 波的情况，令 $R^{\mathrm{TM}}=0$，有

$$k_{\mathrm{t}x}=\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}k_x \tag{3.1.62}$$

根据区域 0 和区域 t 中介质的色散关系

$$k^2=k_x^2+k_z^2 \tag{3.1.63}$$

$$k_{\mathrm{t}}^2=k_{\mathrm{t}x}^2+k_z^2=\frac{\varepsilon_t^2}{\varepsilon^2}k_x^2+k_z^2 \tag{3.1.64}$$

可以得到

$$k_x^2=\frac{k_{\mathrm{t}}^2-k^2}{(\varepsilon_t/\varepsilon)^2-1} \tag{3.1.65}$$

$$k_z^2=\frac{(\varepsilon_t/\varepsilon)^2k^2-k_{\mathrm{t}}^2}{(\varepsilon_t/\varepsilon)^2-1} \tag{3.1.66}$$

对于 $\mu=\mu_t$ 的情况，布儒斯特角定义为

$$\tan\theta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{TM}}=\frac{k_z}{k_x}=\sqrt{\frac{(\varepsilon_t/\varepsilon)^2k^2-k_{\mathrm{t}}^2}{k_{\mathrm{t}}^2-k^2}}=\frac{k_{\mathrm{t}}}{k}=\sqrt{\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}} \tag{3.1.67}$$

根据相位匹配条件，有 $k_{\mathrm{t}}\sin\theta_{\mathrm{t}}=k\sin\theta_{\mathrm{B}}=k_{\mathrm{t}}\cos\theta_{\mathrm{B}}$，因此可以得到 $\theta_{\mathrm{B}}+\theta_{\mathrm{t}}=\pi/2$。

反射波和透射波矢量分别为 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}=-\hat{\boldsymbol{x}}k_x+\hat{\boldsymbol{z}}k_z$ 和 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}=\hat{\boldsymbol{x}}k_{\mathrm{t}x}+\hat{\boldsymbol{z}}k_z=\hat{\boldsymbol{x}}\,\varepsilon_t k_x/\varepsilon+\hat{\boldsymbol{z}}k_z$，有

$$\boldsymbol{k}_{\mathrm{t}}\cdot\boldsymbol{k}_{\mathrm{r}}=-\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}k_x^2+k_z^2=0 \tag{3.1.68}$$

因此，反射波和透射波的波矢量互相垂直（图 3.1.5）。

考虑 TE 波的情况，当 $\mu=\mu_t$、$R^{\mathrm{TE}}=0$ 时，可以得到 $k_{\mathrm{t}x}=\mu_t k_x/\mu=k_x$，因此有 $k_{\mathrm{t}}=k$。

这表明除非区域 0 和区域 t 的介质完全相同，否则不会出现零反射。当具有随机极化的波以布儒斯特角入射到各向同性介质时，反射波将变成垂直于入射平面的线极化波，因此布儒斯特角也称为极化角。

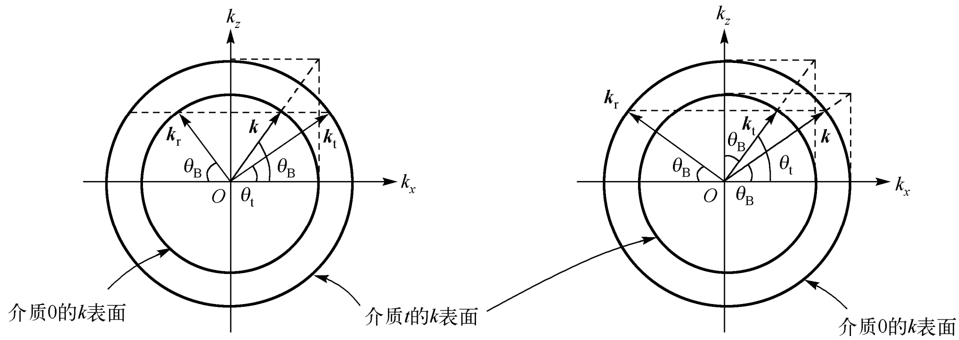


图 3.1.5　布儒斯特角反射

3.2　异向介质的反射和透射

3.2.1　负各向同性介质

考虑满足相位匹配条件的另一种情况（图 3.2.1），区域 t 中为负各向同性介质，$\varepsilon_t = -\varepsilon_n$，$\mu_t = -\mu_n$，其中 ε_n 和 μ_n 为正实数。

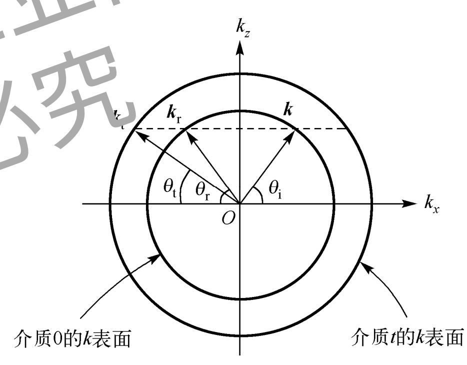


图 3.2.1　负各向同性介质的相位匹配

根据 3.1.1 节关于反射和透射的分析，可以用相同的方法得到负各向同性介质的反射和透射。对于单位幅度的 TM 波，区域 t 中透射波场量的表达式为

$$\boldsymbol{H}_t = \hat{\boldsymbol{y}} T^{\mathrm{TM}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_t \cdot \boldsymbol{r}} \tag{3.2.1}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{-1}{\omega \varepsilon_t} \boldsymbol{k}_t \times \boldsymbol{H}_t \tag{3.2.2}$$

$$\boldsymbol{S}_t = \boldsymbol{E}_t \times \boldsymbol{H}_t^* = \boldsymbol{k}_t \frac{1}{\omega \varepsilon_t} \left| \boldsymbol{H}_t \right|^2 \tag{3.2.3}$$

需要注意的是，区域 t 中的波矢量变为 $\boldsymbol{k}_t = -\hat{\boldsymbol{x}} k_{tx} + \hat{\boldsymbol{z}} k_z$。根据式（3.2.3）及 $\varepsilon_t = -\varepsilon_n < 0$ 可以发