三　几何图形计数

JSH-38　数线段

神器内容	给定 n 个不同的点，最多可以连出 $(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1=\mathrm{C}_n^2$ 条线段。
要点说明	数线段，去打枪，千万不能回头望。 打枪法，数线段，一定不能回头看。 基本线段来相加，做题基本都秒杀。 线段到底咋形成？两个端点能确定。 两点组合是多少？组合计数有技巧。

神器溯源

在一条直线上，两点及其之间的部分叫作线段。线段有两个端点，没有方向。在连接两点的所有线段中，线段是最短的，简称“两点之间，线段最短”。在同一条直线上，相邻两点连成的线段叫作基本线段。数线段的方法有适合低年级的打枪法（从一点出发，向一个方向连线段）、基本线段相加法，也有根据两点确定一条线段的组合法等。

如图 1 所示，这是打枪法和基本线段相加法示意图。如图 2 所示，图中有 n 点（可以不在同一平面内），每个点最多连 $(n-1)$ 条线段，n 个点可以连 $n(n-1)$ 条线段。由于同一条线段被统计了 2 次，实际有 $n(n-1)\div 2$ 条线段。或者在 n 个点中直接选取两点，作为线段的两个端点，共有 C_n^2 条线段。

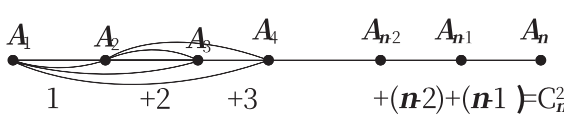

图1

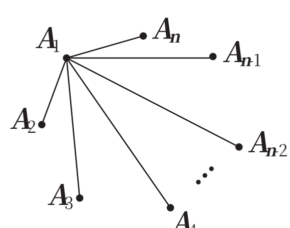

图2

例题精讲

例题 1-1 如图 3 所示，图中有 10 个点，最多可以连________条线段。

图3

答案：45

【解答】 如图 4 所示，图中共有基本线段 9 条，根据基本线段相加法，得到 $1+2+3+\cdots+9=45$ 条线段。或者从 10 点选取两点作为线段的端点，共有 $C_{10}^{2}=45$ 条线段。

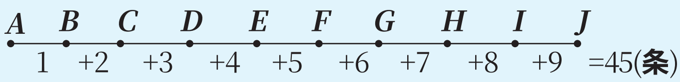

图4

例题 1-2 如图 5 所示，这个“钻石”形状的图形中共有________条线段。

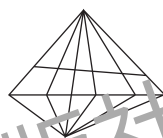

图5

答案：56

【解答】 上下分开数线段，然后再考虑上下在一起形成的线段条数。

共有 $(1+2)\times6+(1+2+3+4+5)\times2+6+1\times2=56$ 条线段。

也可以列式 $(1+2)\times5+(1+2+3+4+5)\times2+(1+2+3)+5=56$ 条线段。

例题 2 在一条水平直线上有 15 个点，从左向右相邻两点之间的距离依次为 1 厘米、2 厘米、3 厘米……14 厘米，那么图中所有线段的长度之和为________厘米。

答案：4200

【解答】 如图 6 所示，基本线段的长度分别为 1 厘米、2 厘米、3 厘米……14 厘米，各自在 $C_{15}^{2}=105$ 条线段长度求和的贡献不同，依次贡献了 1×14 次，2×13 次，3×12 次……14×1 次。

图6

所以 105 条线段长度之和为

$$1^2\times14+2^2\times13+3^2\times12+4^2\times11+\cdots+14^2\times1$$
$$=1^2\times(15-1)+2^2\times(15-2)+3^2\times(15-3)+4^2\times(15-4)+\cdots+14^2\times(15-14)$$
$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+14^2)\times15-(1^3+2^3+3^3+\cdots+14^3)$$

$$=\frac{14\times15\times29}{6}\times15-\frac{14^2\times15^2}{4}$$

$$=\frac{14\times15^2}{12}\times(29\times2-14\times3)$$

$$=4200$$

针对性练习

练习❶ 给定平面内 9 个不同的点，任意两点都连成一条线段，那么共可连________条线段。

练习❷ 如图 7 所示，以长方体的顶点为端点，除了棱以外，还能连出________条线段。

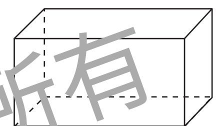

图7

练习❸ 如图 8-1 所示，有线段________条；如图 8-2 所示，有________条线段。

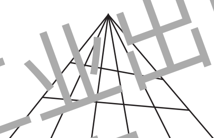

图8-1

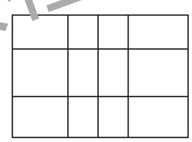

图8-2

练习❹ 如图 9 所示，在一条直线上有 12 个点，相邻两点之间的距离都是 5 厘米，那么图中所有线段长度之和为________厘米。

图9

练习❺ 平面内有 20 点，任意三点不共线。以这些点为端点连线段，没有任意三条线段首尾相接形成三角形，那么最多连________条线段。

练习参考答案

练习题号	练习 1	练习 2	练习 3	练习 4	练习 5
参考答案	36	16	81　70	1430	100
解答提示	基本线段相加法	$C_8^2-3\times4$	分类进行基本线段相加法	$5\times C_{13}^3$	把点分成两组连线段

JSH-39　数直线

神器内容	给定空间内 n 个不同的点，任意三点不共线，最多可以连出 C_n^2 条直线。
要点说明	任意三点不共线，连成直线算一算。 选取两点来组合，统计直线总条数。 三点共线少 2 条，这个一定要知晓。 四点共线少几条，最好提前给算好。

神器溯源

从一个点出发，向正、反两个方向无限延伸得到的图形叫作直线。直线没有端点，只有两个方向。如图 1 所示，直线可以用上面的两点（大写英文字母）确定，直线 AB 或直线 BA，也可以用一个小写的英文字母表示，直线 l。直线本身是无限长的，在作图中不需要说明延长直线，根据需要画多长都可以。

两点确定一条直线，这是直线公理。如图 2 所示，如果三点在一条直线上，或者两点确定的直线经过第三个点，则称三点共线；如图 3 所示，如果三条直线经过同一个点，或者第三条直线经过原来两条直线的交点，则称三线共点。

图1

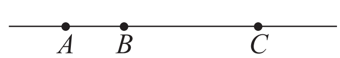

图 2

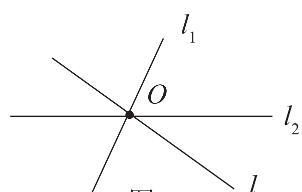

图3

在一个平面内，两条直线的位置关系有平行和相交。如图 4 所示，直线 l_1 与直线 l_2 平行，记作 $l_1 // l_2$。如图 5 所示，直线 l_3 与直线 l_4 交于 O 点，记作 $l_3 \cap l_4 = O$。

如果在空间内，直线的位置关系还有异面直线，如图 6 所示，长方体的棱 AB 所在直线与棱 CG，DH，EH，FG 都是异面直线。

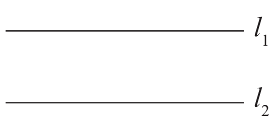

图4

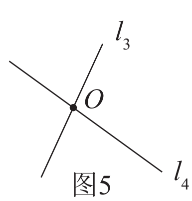

图5

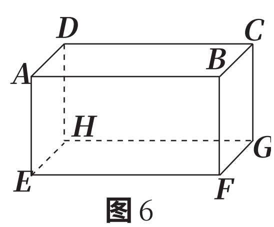

图 6

给定空间内 n 个点，如果任意三点不共线，那么最多可以连出 C_n^2 条直线。

每组三点共线，减少 $C_3^2-1=2$ 条直线；每组四点共线，减少 $C_4^2-1=5$ 条直线。

例题精讲

例题 1-1 在一个平面内有 10 个点，任意三点不共线，那么最多可以确定________条直线。

答案：45

【解答】 根据两点确定一条直线，共计可以作 $C_{10}^2=45$ 条直线。

例题 1-2 如图 7 所示，图中任意相邻两点的水平或竖直距离都相同，那么这些点最多能确定________条直线。

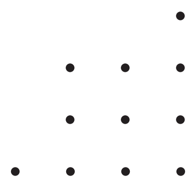

图7

答案：28

【解答】 (1)图 7 中共 11 个点，最多作 $C_{11}^2=55$ 条直线。

(2)排除四点共线的情况，如图 8 所示，共有 3 组，共计减少 $3\times(C_4^2-1)=15$ 条直线。

(3)排除三点共线的情况，如图 9 所示，共有 6 组，共计减少 $6\times(C_3^2-1)=12$ 条直线。

所以，图中点可以确定 $55-15-12=28$ 条直线。

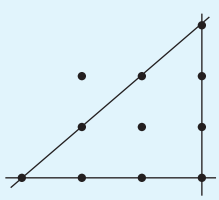

图8

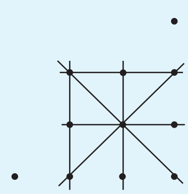

图9

例题 2 在一个平面内有 6 点，根据点的排列不同，确定的直线条数也不同。如图 10 所示，6 点此种排列方式，可以确定 10 条直线。适当调整点的位置，确定的直线有 n 条，那么 n 的取值共有________种。

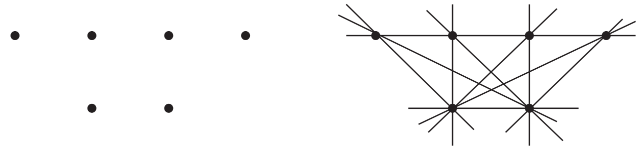

图10

答案：9

【解答】 适当调整 6 点的位置，确定的直线条数取值有 9 种，如图 11 至图 19 所示。

确定1条直线

图11

确定6条直线

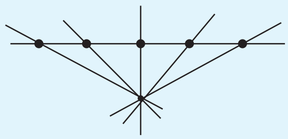

图12

确定10条直线

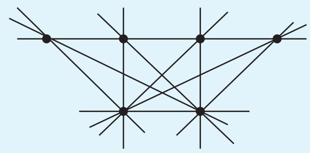

图13

（后面图形读者连一连）

确定7条直线

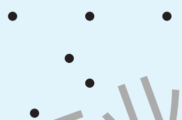

图14

确定8条直线

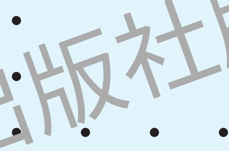

图15

确定9条直线

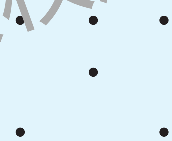

图16

确定11条直线

图17

确定13条直线

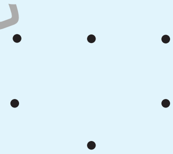

图18

确定15条直线

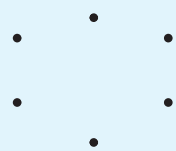

图19

针对性练习

练习❶ 给定平面内 9 个不同的点，任意三点都不共线，那么共能连________条直线。

练习❷ 如图20 所示，图中 8 个点最多可以作________条直线。

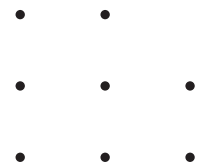

图20

练习❸ 如图 21 所示，图中 9 个点最多可以作________条直线。

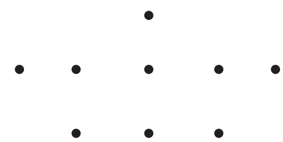

图21

练习❹ 在一个平面内有 8 个点，结果最多只能作出 20 条直线，那么一定有________条直线是三点共线的情况。

练习❺ 在一个平面内画出 5 条直线，它们的交点有 n 个，那么 n 的取值有________种。

练习参考答案

练习题号	练习 1	练习 2	练习 3	练习 4	练习 5
参考答案	36	18	23	4	9
解答提示	C_9^2	$C_8^2-5\times2$	$C_9^2-9-2\times2$	$(C_8^2-20)\div(C_3^2-1)$	n 取不到 2 和 3

JSH-40　数射线

神器内容	直线上一点可以确定 2 条射线。
要点说明	一条直线一个点，两条射线看得见。 一条直线两个点，四条射线很明显。 不加字母能表达，多少能够表出它？

神器溯源

直线上一点及其一旁的部分，叫作射线。该点是射线的端点，该点一旁的方向是射线的方向。所以，射线有一个端点、一个方向。射线也是无限长的，根据需要画出来，不需要延长，但可以反向延长射线。如图 1 所示，射线 OA，则第一个字母对应的点就是射线的端点，第二个字母 A 是射线方向的任意一个点，两点不能交换顺序。如图 2 所示，手电筒光线、激光都是射线。

直线上一点可以确定 2 条射线，这 2 条射线的端点相同，方向相反。直线上两点可以确定 4 条射线，但是，不添加字母能标记的只有 2 条。如图 3 所示，图中可以标记的射线为射线 AB 和射线 BA。

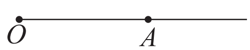

图1

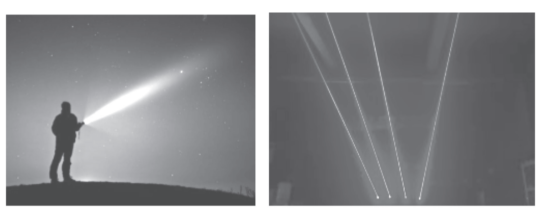

图2

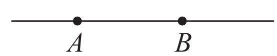

图3

如果没有指明的情况下，一般按总射线条数统计。直线上 n 个点，可以确定的射线有 $2n$ 条；在平面内 n 个点，最多可以作 A_n^2 条射线。