

第3章 天球坐标系

☞ 基本概念

天球、球面三角形、天球坐标系、天球上主要的圈和点、地平坐标系、时角坐标系、赤道坐标系、黄道坐标系、天文三角形

☞ 基本定理

简单球面三角形的基本性质、直角球面三角形与象限球面三角形的求解法则

☞ 重要公式

观测点的地心纬度和天顶与北天极之间的夹角关系：式 (3-55)

天球坐标系的相互转换关系：式 (3-56)、式 (3-57)、式 (3-58)

无论我们站在什么地方，总像站在天穹的中心，这种“天似穹庐，笼盖四野”的感觉，是因为众天体距离我们太远，以至于人眼不能区分它们与我们之间的距离差别，造成了一切天体都与我们等距离的错觉。另外，当我们在地球上的位置发生变化时，天体的位置好像并没有发生变化，这也是天体与我们之间的距离比我们在地球上移动的距离要大得多的原因。本章将以天球为基准介绍一些球面天文学的基础知识。

3.1 天球与球面三角形

3.1.1 天球的概念及特性

在天文学中引入了一个假想的圆球，该圆球以空间任意一点为中心，以任意长度为半径（或半径为无穷大），称为天球。一般将天球中心设置在观测点，称为观测者天球，但为了研究问题方便，常用的还有地心天球和日心天球。

天体在天球上的投影，即天球中心和天体的连线与天球相交的点，称为天体在天球上的位置，又称天体视位置。

因为球面天文学的基础是球面几何学，所以天球具有圆球的一切几何特性，即

(1) 通过球心的任意一个平面与球表面所截得的圆称为大圆，大圆的圆心是球心，半径等于球的半径。

(2) 通过球面上不在同一直径上的两点只能作一个大圆，且在该大圆上，两点之间较小的弧段是在球面上连接这两点的弧线中最短的。

(3) 两个大圆必定相交，相交而成的角称为球面角，而交点是同一直径的两个端点，称为球面角的顶点，大圆弧称为球面角的边。

(4) 球面上任意一个圆都有两个极，且极到该圆上任意一点的角距称为极距，圆上任意一点的极距都相等。

(5) 大圆的极距为 90° ，反之，如果球面上一点至其他两点（不是直径的两端点）的距离都是 90° ，则前一点必是过另两点的大圆的极，大圆的极至该大圆上任意一点的大圆弧必与该大圆正交。

此外，天球还具有另一个重要性质，即所有相互平行的直线向同一方向延伸时，都将与天球相交于一点。

3.1.2 球面三角形的定义及定理

将球面上的 3 个点用 3 个大圆弧连接起来所围成的图形称为球面三角形，这 3 个点称为该球面三角形的顶点。由于连接两个顶点的大圆弧有两个不同的弧段，所以球面上的 3 个点可以确定 8 个球面三角形，如图 3-1 所示。图 3-1 中有一个球面三角形的 3 条边都小于半圆周，称为简单球面三角形。本书以后提到的球面三角形都为简单球面三角形。

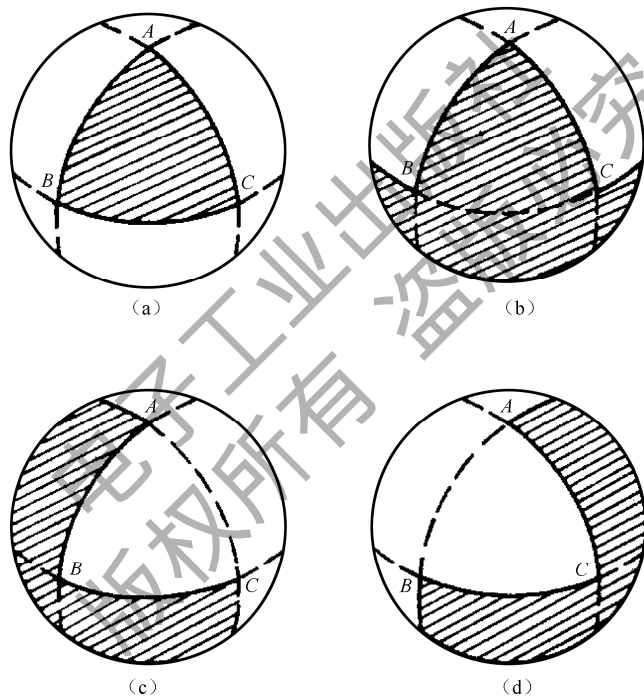


图 3-1 8 个球面三角形

如图 3-2 所示，球面上的 3 个顶点 (A, B, C) 组成了简单球面三角形，由该球面三角形的 3 个大圆弧所在平面构成一个三面角 $O-ABC$ ，其顶点为球心 O ，棱为由球心到球面三角形 3 个顶点 (A, B, C) 的球半径。

可见，三面角 $O-ABC$ 的 3 个平面角，可用它们所对应的球面三角形的边来度量，即

$$\angle AOB = c \quad \angle AOC = b \quad \angle BOC = a \quad (3-1)$$

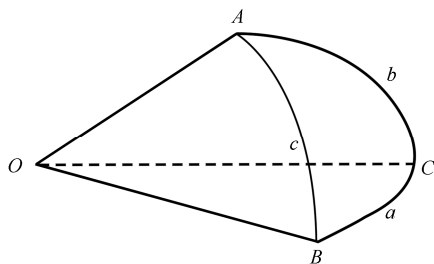


图 3-2 球面三角形及其三面角

而任意两个平面之间的交角即二面角都等于与其对应的球面三角形的球面角, 即

$$\begin{cases} \text{平面}AOB\text{与平面}COB\text{之间的夹角} = \angle ABC \\ \text{平面}AOC\text{与平面}BOC\text{之间的夹角} = \angle ACB \\ \text{平面}BOA\text{与平面}COA\text{之间的夹角} = \angle BAC \end{cases} \quad (3-2)$$

极三角形是相对于某个简单球面三角形而言的, 其定义为连接该简单球面三角形的每条边所在的大圆所对应的一个极, 所构成的简单球面三角形。如图 3-3 所示, (A, B, C) 为一个简单球面三角形, (P, Q, R) 分别为该简单球面三角形中 3 条边 BC, AC, AB 所在大圆的一个极。

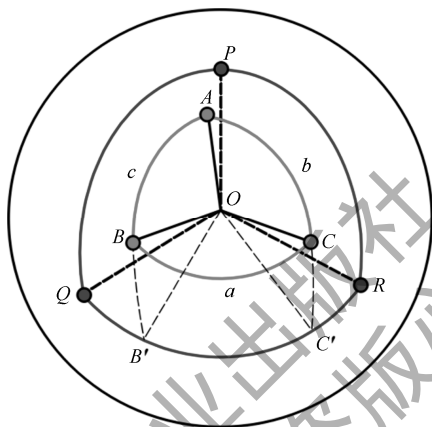


图 3-3 极三角形 (见彩插)

下面给出两个定理及其证明。

定理一：简单球面三角形与其极三角形互为极三角形。

证明：如图 3-3 所示, 可知 $OA \perp OQ$ 且 $OA \perp OR$, 所以 A 是 QR 大圆上的一个极点; 又因为 $\angle POA < 90^\circ$, 故 A 是球面三角形 PQR 的极三角形的一个顶点。同理, 可以证明 B 和 C 是球面三角形 PQR 的极三角形的另外两个顶点。因此, 也就证明了球面三角形 ABC 也是球面三角形 PQR 的极三角形。

定理二：极三角形的边是原三角形之对应角的补角, 而极三角形的角是原三角形之对应边的补角。

证明：如图 3-3 所示, 将 AB 和 AC 两边延长, 并分别与 QR 边相交于 B' 点和 C' 点, 连接 OB' 和 OC' 。已知 R 是 AB 边的一个极点, 则有

$$\angle B'OR = \angle B'OC' + \angle C'OR = 90^\circ \quad (3-3)$$

同样, 也有

$$\angle C'OQ = \angle B'OC' + \angle B'OQ = 90^\circ \quad (3-4)$$

所以有

$$\angle B'OC' + \angle C'OR + \angle B'OC' + \angle B'OQ = 180^\circ \quad (3-5)$$

即

$$\angle B'OC' + \angle QOR = 180^\circ \quad (3-6)$$

可见, $\angle QOR$ 是 $\angle B'OC'$ 的补角, 而 $\angle B'OC'$ 是原三角形中的 A 角。同理, 可以证明定

理的后半部分。

推论：如果任意简单球面三角形的边和角满足某种函数关系，即

$$f(A, B, C, a, b, c) = 0 \quad (3-7)$$

则其极三角形也满足该描述关系，即

$$f(P, Q, R, p, q, r) = 0 \quad (3-8)$$

或

$$f(\pi - a, \pi - b, \pi - c, \pi - A, \pi - B, \pi - C) = 0 \quad (3-9)$$

3.1.3 简单球面三角形的基本性质

简单球面三角形具有以下基本性质。

(1) 球面三角形的两边之和大于第三边，即 $a + b > c$ 。

(2) 在同一球面三角形中，等边所对的角相等，等角所对的边相等，即

$$a = b \Leftrightarrow A = B$$

(3) 在同一球面三角形中，大边对大角，大角对大边，即

$$a > b \Leftrightarrow A > B$$

(4) 球面三角形 3 个角之和恒大于 180° 而小于 540° ，即

$$180^\circ < A + B + C < 540^\circ$$

(5) 球面三角形 3 条边之和大于 0° 而小于 360° ，即

$$0^\circ < a + b + c < 360^\circ$$

3.1.4 球面三角形的基本公式

下面通过将球面三角形转化为多个平面三角形的方式，利用平面三角公式和上述定理、推论，推导出球面三角形的基本公式。

1. 边的余弦公式

如图 3-4 所示， A, B, C 为球面上的 3 个点， O 为球心，则 ABC 构成球面三角形， a, b, c 分别为该球面三角形的 3 条边。过 A 点作 b, c 边的切线，分别交 OC, OB 的延长线于 M, N 点。由此得到两个平面直角三角形 OAM, OAN 和两个平面三角形 OMN, AMN ，且 $\angle NAM = A$ 。

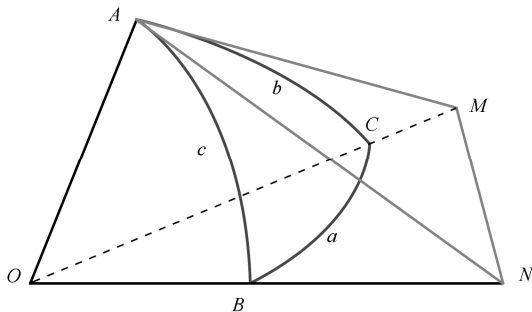


图 3-4 球面三角形的余弦公式（见彩插）

根据平面三角形的余弦定理, 即

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad (3-10)$$

则在 $\triangle AMN$ 内有

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A \quad (3-11)$$

同理, 对于 $\triangle OMN$ 有

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos a \quad (3-12)$$

则

$$AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos a \quad (3-13)$$

式中, AN, ON 分别为直角三角形 OAN 的直角边和斜边, 则

$$\begin{aligned} 2OM \cdot ON \cdot \cos a &= (OM^2 - AM^2) + (ON^2 - AN^2) + 2AM \cdot AN \cdot \cos A \\ &= 2OA^2 + 2AM \cdot AN \cdot \cos A \end{aligned} \quad (3-14)$$

整理后, 可得

$$\cos a = \frac{OA}{ON} \cdot \frac{OA}{OM} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot \cos A \quad (3-15)$$

已知在 $\triangle OAM, \triangle OAN$ 中, 有

$$\cos b = \frac{OA}{OM}, \quad \cos c = \frac{OA}{ON}, \quad \sin b = \frac{AM}{OM}, \quad \sin c = \frac{AN}{ON} \quad (3-16)$$

代入式 (3-15), 可得边 a 的余弦公式

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \quad (3-17)$$

同理, 可得其他两边 b, c 的余弦公式

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \quad (3-18)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \quad (3-19)$$

式 (3-17)、式 (3-18) 和式 (3-19) 就是球面三角形边的余弦公式。

2. 角的余弦公式

利用上面给出的推论即可求得角的余弦公式。例如, 将式 (3-9) 代入边的余弦公式 (3-17), 则有

$$\cos(\pi - A) = \cos(\pi - B) \cdot \cos(\pi - C) + \sin(\pi - B) \cdot \sin(\pi - C) \cdot \cos(\pi - a) \quad (3-20)$$

化简以后即可获得角 A 的余弦公式, 即

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a \quad (3-21)$$

同理, 可得角 B 和角 C 的余弦公式, 即

$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \sin A \cdot \sin C \cdot \cos b \quad (3-22)$$

$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c \quad (3-23)$$

式 (3-21)、式 (3-22) 和式 (3-23) 就是球面三角形角的余弦公式。

3. 正弦公式

如图 3-5 所示, A, B, C 为球面上的 3 个点, O 为球心, 则 ABC 构成球面三角形, a, b, c 分别为该球面三角形的 3 条边。过 C 点作 OAB 平面的垂线, 交此平面于 D 点, 再从 D 点分别向 OA, OB 引垂线 DE, DF , 连接 CE, CF , 则可得 4 个平面三角形, 即 $\triangle OEC, \triangle OFC, \triangle CED, \triangle CFD$ 。

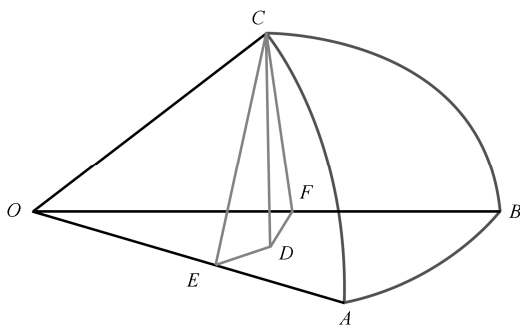


图 3-5 球面三角形的正弦公式 (见彩插)

因为 CD 垂直于平面 OAB , 所以 CD 垂直于 OAB 中任意一条直线, 则 $CD \perp OA$ 。又因为 $DE \perp OA$, 所以 OE 垂直于平面 CED , 则 $OE \perp CE$ 。同理可得 $CF \perp OB$ 。因此, 这 4 个平面三角形 OEC, OFC, CED, CFD 都是直角三角形, 并且有

$$\angle CED = A, \angle CFD = B \quad (3-24)$$

式中, A, B 分别为球面三角形 ABC 中的两个角, 则在上述 4 个平面直角三角形中分别有

$$\begin{cases} \sin a = \frac{CF}{OC} \\ \sin A = \frac{CD}{CE} \\ \sin b = \frac{CE}{OC} \\ \sin B = \frac{CD}{CF} \end{cases} \quad (3-25)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{CF \cdot CE}{OC \cdot CD} \\ \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{CE \cdot CF}{OC \cdot CD} \end{cases} \quad (3-26)$$

可见

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \quad (3-27)$$

同理可得其他两个类似公式

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (3-28)$$

则

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (3-29)$$

式 (3-29) 就是球面三角形的正弦公式, 它给出了球面三角形中任意两条边与它们所对应的两个角之间的关系。

4. 五元素公式

五元素公式实际上是由多个余弦公式组合而成的。例如, 将边 b 的余弦公式 (3-18) 改写为

$$\sin c \cdot \sin a \cdot \cos B = \cos b - \cos a \cdot \cos c \quad (3-30)$$

将式 (3-17) 代入式 (3-30), 得

$$\begin{aligned} \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B &= \cos b - \cos c \cdot (\cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A) \\ &= \cos b \cdot \sin^2 c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos A \end{aligned} \quad (3-31)$$

约去 $\sin c$ 后得

$$\sin a \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos A \quad (3-32)$$

可见, 式 (3-32) 中含有 5 个元素, 故称为五元素公式。这 5 个元素是球面三角形中的 3 条边、2 个角, 通常称为第一类五元素公式。同理可得其他第一类五元素公式

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \quad (3-33)$$

$$\sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c - \sin a \cdot \cos c \cdot \cos B \quad (3-34)$$

$$\sin b \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin a - \sin c \cdot \cos a \cdot \cos B \quad (3-35)$$

$$\sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin b - \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C \quad (3-36)$$

$$\sin c \cdot \cos B = \cos b \cdot \sin a - \sin b \cdot \cos a \cdot \cos C \quad (3-37)$$

利用前面给出的推论, 可以得出关于 2 条边、3 个角的另一组五元素公式, 通常称为第二类五元素公式, 即

$$\sin A \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos a \quad (3-38)$$

$$\sin A \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin B + \sin C \cdot \cos B \cdot \cos a \quad (3-39)$$

$$\sin B \cdot \cos a = \cos A \cdot \sin C + \sin A \cdot \cos C \cdot \cos b \quad (3-40)$$

$$\sin B \cdot \cos c = \cos C \cdot \sin A + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos b \quad (3-41)$$

$$\sin C \cdot \cos a = \cos A \cdot \sin B + \sin A \cdot \cos B \cdot \cos c \quad (3-42)$$

$$\sin C \cdot \cos b = \cos B \cdot \sin A + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos c \quad (3-43)$$

【例 3-1】 试推导第二类五元素公式。

解: 以式 (3-39) 为例, 设某简单球面三角形 ABC , 其对应的极三角形为 PQR , 且由推论可知:

$$\begin{cases} A = 180^\circ - p \\ B = 180^\circ - q \\ C = 180^\circ - r \\ a = 180^\circ - P \\ b = 180^\circ - Q \\ c = 180^\circ - R \end{cases} \quad (3-44)$$

将式 (3-44) 代入第一类五元素公式

$$\sin a \cdot \cos C = \cos c \cdot \sin b - \sin c \cdot \cos b \cdot \cos A \quad (3-45)$$

可得

$$\sin P \cdot \cos r = \cos R \cdot \sin Q + \sin R \cdot \cos Q \cdot \cos p \quad (3-46)$$

可见式 (3-46) 与式 (3-39) 形式相同。

5. 相邻四元素公式

相邻四元素公式又称为余切公式，它们表示的是球面三角形中相邻的4个元素（边和角）之间的关系式。它们是由正弦公式、余弦公式组合而成的。例如，将边 b 的余弦公式（3-18）代入 c 边的余弦公式（3-19），得

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \\ &= \cos a \cdot (\cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B) + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{aligned}\quad (3-47)$$

整理以后，得

$$\cos c \cdot \sin^2 a = \cos a \cdot \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C \quad (3-48)$$

两边同除以 $\sin a \sin c$ ，即可得一个相邻四元素公式

$$\cot c \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot C \quad (3-49)$$

同理，可得其他5个相邻四元素公式

$$\cot b \cdot \sin a = \cos a \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot B \quad (3-50)$$

$$\cot c \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot C \quad (3-51)$$

$$\cot a \cdot \sin b = \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot \cot A \quad (3-52)$$

$$\cot b \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos A + \sin A \cdot \cot B \quad (3-53)$$

$$\cot a \cdot \sin c = \cos c \cdot \cos B + \sin B \cdot \cot A \quad (3-54)$$

3.1.5 两种特殊的球面三角形

1. 直角球面三角形

当球面三角形中有一个角为 90° 时，称这种球面三角形为直角球面三角形。假设球面三角形 ABC 中 $C=90^\circ$ ，利用前面所建立的球面三角形基本公式，很容易导出直角球面三角形的基本公式。这组公式的规律性很强，可以利用辅助圆方法导出，即把直角球面三角形中的直角 C 除去，其余5个元素沿圆周排列，它们的顺序与球面三角形一样，其中用 a, b 两个直角边的余角代替两个直角边，如图3-6所示，则直角球面三角形的基本公式就可归纳为以下两条。

- (1) 每个元素的余弦等于与它相邻的两元素的余切的乘积。
- (2) 每个元素的余弦等于与它不相邻的两元素的正弦的乘积。

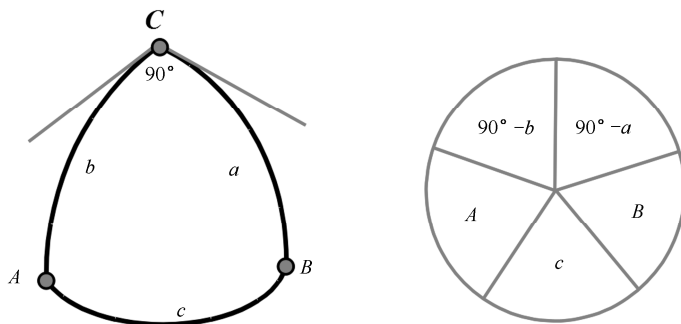


图 3-6 直角球面三角形