

第3章 线性滤波方法

3.1 引言

第2章分析讨论的估计方法都是针对时常参数而言的，研究的是静态估计问题，本书从这一章开始将研究时变参数的估计问题，也就是状态估计问题，状态估计是对目标过去的运动状态（包括目标的位置、速度、加速度等）进行平滑、对目标现在的运动状态进行滤波以及对目标未来的运动状态进行预测^[1-5]。例如雷达网中各站的定位和卫星轨道定位属于静态估计，而运动目标的跟踪则属于动态估计问题。虽然参数估计和状态估计都是根据一组与未知参数有关的观测数据来推算出未知参数的值，但由于在状态估计中，未知参数是个时间函数，因此在对观测数据进行处理时，未知参数和观测数据的时间演变都必须加以考虑。本章首先讨论的是卡尔曼滤波（Kalman Filter, KF），包括系统模型的建立、相应的滤波模型、滤波器初始化方法、滤波器稳定的定义和判断方法、随机线性系统的可控制性和可观测性、稳态卡尔曼滤波、自适应滤波等^[6-9]。为了减少卡尔曼滤波的计算量，满足工程应用的需要，本章还对常增益滤波进行了介绍^[10-13]，包括 α - β 与 α - β - γ 滤波和自适应的 α - β 与 α - β - γ 滤波，同时本章还对 Sage-Husa 自适应卡尔曼滤波、 H_∞ 卡尔曼滤波、变分贝叶斯滤波和状态估计的一致性检验等内容进行了讨论。

3.2 卡尔曼滤波

卡尔曼滤波不仅是所有线性滤波器中最优的，而且是噪声模型为高斯过程时。所有滤波器中最优的。卡尔曼滤波除了系统噪声和量测噪声为高斯白噪声且已知其二阶矩之外，不需任何其他条件，因而完全适用于非平稳、多维随机序列的估计。

3.2.1 系统模型

状态变量法是描述动态系统的一种很有价值的方法，采用这种方法，系统的输入输出关系是用状态转移模型和输出观测模型在时域内加以描述的，输入可以由确定的时间函数和代表不可预测的变量或噪声的随机过程组成的状态方程进行描述，输出是状态向量的函数，通常受到随机观测误差的扰动，可由量测方程描述。

1. 状态方程

1) 匀速（Constant Velocity, CV）模型

状态方程是目标运动规律的假设，例如假设目标在二维平面内做匀速直线运动，则离散时间系统下 t_k 时刻目标的状态 (x_k, y_k) 可表示为

$$x_k = x_0 + v_x t_k = x_0 + v_x kT \quad (3.1)$$

$$y_k = y_0 + v_y t_k = y_0 + v_y kT \quad (3.2)$$

式中, (x_0, y_0) 为初始时刻目标的位置, v_x 和 v_y 分别为目标在 x 轴和 y 轴的速度, T 为采样间隔。

式 (3.1) 和式 (3.2) 用递推形式可表示为

$$x_{k+1} = x_k + v_x T = x_k + \dot{x}_k T \quad (3.3)$$

$$y_{k+1} = y_k + v_y T = y_k + \dot{y}_k T \quad (3.4)$$

考虑不可能获得目标精确模型以及许多不可预测的现象, 换句话说, 也就是目标不可能做绝对匀速运动, 其速度必然有一些小的随机波动, 例如目标在匀速运动过程中, 驾驶员或环境扰动等都可造成速度出现不可预测的变化, 像飞机飞行过程中云层和阵风对飞机飞行速度的影响等, 而这些速度的小的变化可看作过程噪声来建模, 所以在引入过程噪声后式 (3.3) 和式 (3.4) 应表示为

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k T + \frac{1}{2} v_x T^2 \quad (3.5)$$

$$y_{k+1} = y_k + \dot{y}_k T + \frac{1}{2} v_y T^2 \quad (3.6)$$

这里要特别强调的是 v_x 、 v_y 分别表示目标在 x 轴和 y 轴速度的随机变化。而目标速度可表示为

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + v_x T \quad (3.7)$$

$$\dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + v_y T \quad (3.8)$$

在匀速模型中, 描述系统动态特性的状态向量为 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ y_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k]'$, 则式 (3.5) ~ 式 (3.8) 用矩阵形式可表示为

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ \dot{x}_{k+1} \\ \dot{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 0.5T^2 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

即目标状态方程为

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{F}(k)\mathbf{v}(k) \quad (3.10)$$

式中, $\mathbf{v}(k) = [v_x, v_y]'$ 为过程噪声向量, 而

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

为系统的状态转移矩阵;

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 0.5T^2 \\ T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

为过程噪声分布矩阵。

若目标为三维空间中目标, 其状态向量为 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ y_k \ z_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k]'$, 则过程噪声向量 $\mathbf{v}(k) = [v_x, v_y, v_z]'$, 而系统的状态转移矩阵和过程噪声分布矩阵分别为

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{\Gamma}(k) = \begin{bmatrix} 0.5T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5T^2 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

2) 常加速度 (Constant Acceleration, CA) 模型

若假设目标在二维平面内做匀加速直线运动, 并考虑速度的随机变化, 则目标的位置和速度用递推形式可表示为

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k T + \frac{1}{2} \ddot{x}_k T^2 + \frac{1}{2} v_x T^2 \quad (3.15)$$

$$y_{k+1} = y_k + \dot{y}_k T + \frac{1}{2} \ddot{y}_k T^2 + \frac{1}{2} v_y T^2 \quad (3.16)$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \ddot{x}_k T + v_x T \quad (3.17)$$

$$\dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + \ddot{y}_k T + v_y T \quad (3.18)$$

$$\ddot{x}_{k+1} = \ddot{x}_k + v_x \quad (3.19)$$

$$\ddot{y}_{k+1} = \ddot{y}_k + v_y \quad (3.20)$$

则由式 (3.15) ~ 式 (3.20) 得到的目标状态方程的表示形式仍同式 (3.10), 但此时状态向量为 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ \dot{x}_k \ \ddot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \ddot{y}_k]'$, 过程噪声向量 $\mathbf{v}(k) = [v_x \ v_y]'$, 而相应的状态转移矩阵和过程噪声分布矩阵分别为

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Gamma}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

同理, 当目标在三维空间中做匀速和匀加速运动时, 其对应的状态向量为 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ \dot{x}_k \ \ddot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \ddot{y}_k \ z_k \ \dot{z}_k \ \ddot{z}_k]'$, 过程噪声向量 $\mathbf{v}(k) = [v_x \ v_y \ v_z]'$, 而系统的状态转移矩阵和过程噪声分布矩阵分别为

$$F(k) = \begin{bmatrix} 1 & T & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & T & \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Gamma(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T^2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}T^2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}T^2 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

3) 协同转弯或坐标转弯 (Coordinate Turn, CT) 模型^[14,15]

CT 模型的原理如图 3.1 所示

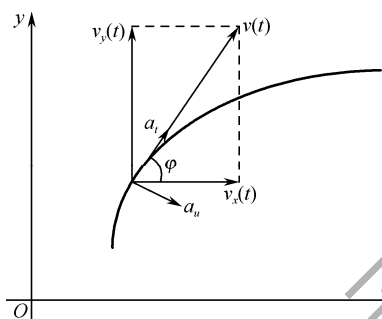


图 3.1 CT 模型原理图

由图 3.1 可看出

$$v_x = v \cos \varphi, \quad v_y = v \sin \varphi \quad (3.23)$$

由于

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.24)$$

所以

$$\frac{dv_x}{dt} = -v \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -v_y \omega \quad (3.25)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = v \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = v_x \omega \quad (3.26)$$

进而可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \omega(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + V(t) \quad (3.27)$$

其中, $V(t)$ 为过程噪声, 一般假定为高斯白噪声, 对上式进行离散化处理, 经拉普拉斯变换, 可得转弯率 (ω) 已知时转弯模型系统状态矩阵为

$$F(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 & \frac{\cos \omega T - 1}{\omega} \\ 0 & \cos \omega T & 0 & -\sin \omega T \\ 0 & \frac{1 - \cos \omega T}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} \\ 0 & \sin \omega T & 0 & \cos \omega T \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

如果过程噪声 $V(k)$ 用 $\Gamma(k)v(k)$ 代替, 则过程噪声分布阵 $\Gamma(k)$ 的确定方法同匀速模型情况不变。

协同转弯模型能精确地表达具有已知转弯率 (ω) 的水平运动目标的转弯运动模式, 但对实际的目标运动进行估计时, 不可能精确知道目标的转弯率 (ω), 需要实时估计, 因此要在标准的 CT 模型上进行扩展, 在状态向量上增加一个 ω 元素, 即

$$\mathbf{F}(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 & \frac{\cos \omega T - 1}{\omega} & 0 \\ 0 & \cos \omega T & 0 & -\sin \omega T & 0 \\ 0 & \frac{1 - \cos \omega T}{\omega} & 1 & \frac{\sin \omega T}{\omega} & 0 \\ 0 & \sin \omega T & 0 & \cos \omega T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

此时对应的过程噪声分布矩阵为

$$\mathbf{\Gamma}(k) = \begin{bmatrix} T^2/2 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^2/2 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

另外, 这里要说明的是状态向量 $\mathbf{X}(k)$ 中元素的位置可以任意互换, 但相应的状态转移矩阵和过程噪声分布矩阵中的元素也要做出互换。虽然状态向量维数增加估计会更准确, 但估计的计算量也会相应地增加, 因此在满足模型的精度和跟踪性能的条件下, 尽可能地采用简单的数学模型。

考虑到目标运动过程中有可能有控制信号, 所以目标状态方程的一般形式可表示为

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{V}(k) \quad (3.31)$$

式中, $\mathbf{G}(k)$ 为输入控制项矩阵; $\mathbf{u}(k)$ 为已知输入或控制信号; $\mathbf{V}(k)$ 是零均值、白色高斯过程噪声序列, 其协方差为 $\mathbf{Q}(k)$, 即 $E[\mathbf{V}(k)\mathbf{V}'(j)] = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj}$, 式中 δ_{kj} 为 Kronecker Delta 函数, 该性质说明不同时刻的过程噪声是相互独立的。如果过程噪声 $\mathbf{V}(k)$ 用 $\mathbf{\Gamma}(k)\mathbf{v}(k)$ 代替, 则 $\mathbf{Q}(k)$ 变为 $\mathbf{\Gamma}(k)\mathbf{q}(k)\mathbf{\Gamma}'(k)$ 。

2. 量测方程

量测方程是雷达测量过程的假设, 对于线性系统而言量测方程可表示为

$$\mathbf{Z}(k+1) = \mathbf{H}(k+1)\mathbf{X}(k+1) + \mathbf{W}(k+1) \quad (3.32)$$

式中, $\mathbf{Z}(k+1)$ 为量测向量, $\mathbf{H}(k+1)$ 为量测矩阵, $\mathbf{W}(k+1)$ 为具有协方差 $\mathbf{R}(k+1)$ 的零均值、白色高斯量测噪声序列, 即 $E[\mathbf{W}(k)\mathbf{W}'(j)] = \mathbf{R}(k)\delta_{kj}$, 该性质说明不同时刻的量测噪声也是相互独立的, 且假定过程噪声序列与量测噪声序列及目标初始状态是相互独立的。

当在二维平面中以匀速或匀加速运动对目标进行建模时, 对应的状态向量分别为 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ y_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k]'$ 和 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ \dot{x}_k \ \ddot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \ddot{y}_k]'$, 此时这两种情况下的量测向量均为 $\mathbf{Z}(k) = [x_k \ y_k]'$, 而量测矩阵 $\mathbf{H}(k)$ 分别为

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

当在三维空间中以匀速或匀加速运动对目标进行建模时, 对应的状态向量分别为 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ y_k \ z_k \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k \ \dot{z}_k]'$ 和 $\mathbf{X}(k) = [x_k \ \dot{x}_k \ \ddot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \ddot{y}_k \ z_k \ \dot{z}_k \ \ddot{z}_k]'$, 此时这两种情况下量测

向量均为 $\mathbf{Z}(k)=[x_k \ y_k \ z_k]'$ ，而量测矩阵 $\mathbf{H}(k)$ 分别为

$$\mathbf{H}(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{H}(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

当采用协同转弯模型时，状态向量分别为 $\mathbf{X}(k)=[x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k]'$ 和 $\mathbf{X}(k)=[x_k \ \dot{x}_k \ y_k \ \dot{y}_k \ \omega]'$ ，这两种情况下的量测向量均为 $\mathbf{Z}(k)=[x_k \ y_k]'$ ，此时对应的量测矩阵 $\mathbf{H}(k)$ 分别为

$$\mathbf{H}(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{H}(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

上述离散时间线性系统也可用图 3.2 的框图来表示，该系统包含如下先验信息^[11,16]：

- ① 初始状态 $\mathbf{X}(0)$ 是高斯分布的，具有均值 $\hat{\mathbf{X}}(0|0)$ 和协方差 $\mathbf{P}(0|0)$ ；
- ② 初始状态与过程噪声和量测噪声序列不相关；
- ③ 过程噪声和量测噪声序列互不相关。

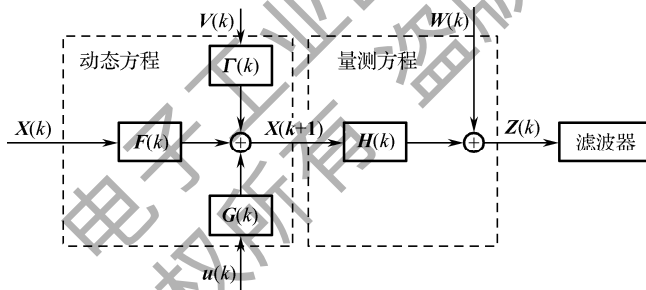


图 3.2 离散时间线性系统

在上述假定条件下，状态方程 [见式 (3.31)] 和量测方程 [见式 (3.32)] 的线性性质可保持状态和量测的高斯性质。根据已知的 j 时刻和 j 以前时刻的量测值对 k 时刻的状态 $\mathbf{X}(k)$ 作出的某种估计若记为 $\hat{\mathbf{X}}(k|j)$ ，则按照状态估计所指的时刻，估计问题可归纳为下列三种：

- 1) 当 $k=j$ 时，是滤波问题， $\hat{\mathbf{X}}(k|j)$ 为 k 时刻状态 $\mathbf{X}(k)$ 的滤波值；
- 2) 当 $k>j$ 时，是预测问题， $\hat{\mathbf{X}}(k|j)$ 为 k 时刻状态 $\mathbf{X}(k)$ 的预测值；
- 3) 当 $k<j$ 时，是平滑问题， $\hat{\mathbf{X}}(k|j)$ 为 k 时刻状态 $\mathbf{X}(k)$ 的平滑值。

今后只讨论预测和滤波问题，而不讨论平滑问题。

3.2.2 滤波模型

在所有的线性形式的滤波器中，线性均方估计滤波器是最优的^[17-20]。线性均方误差准则下的滤波器包括：维纳滤波器和卡尔曼滤波器，稳态条件下二者是一致的，但卡尔曼滤波器适用于有限观测间隔的非平稳问题，它是适合于计算机计算的递推算法。

2.5 节给出静态（非时变）情况下随机向量 $\mathbf{x}$ 的最小均方误差估计为

$$\hat{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x} | \mathbf{z}] = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{P}_{xz} \mathbf{P}_{zz}^{-1} (\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}) \quad (3.39)$$

其对应的条件误差协方差矩阵为

$$\mathbf{P}_{xx|z} = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' | \mathbf{z}] = \mathbf{P}_{xx} - \mathbf{P}_{xz} \mathbf{P}_{zz}^{-1} \mathbf{P}_{zx} \quad (3.40)$$

类似地，动态（时变）情况下的最小均方误差估计可定义为

$$\hat{\mathbf{x}} \rightarrow \hat{\mathbf{X}}(k | k) = E[\mathbf{X}(k) | \mathbf{Z}^k] \quad (3.41)$$

式中

$$\mathbf{Z}^k = \{\mathbf{Z}(j), j=1, 2, \dots, k\} \quad (3.42)$$

与式（3.41）相伴的状态误差协方差矩阵定义为

$$\mathbf{P}(k | k) = E\{[\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k | k)][\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k | k)]' | \mathbf{Z}^k\} = E\{\tilde{\mathbf{X}}(k | k) \tilde{\mathbf{X}}'(k | k) | \mathbf{Z}^k\} \quad (3.43)$$

把以 $\mathbf{Z}^k$ 为条件的期望算子应用到式（3.31）中，得到状态的一步预测为

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} \rightarrow \hat{\mathbf{X}}(k+1 | k) &= E[\mathbf{X}(k+1) | \mathbf{Z}^k] = E[\mathbf{F}(k)\mathbf{X}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{V}(k) | \mathbf{Z}^k] \\ &= \mathbf{F}(k)\hat{\mathbf{X}}(k | k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (3.44)$$

预测值的误差为

$$\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k) = \mathbf{X}(k+1) - \hat{\mathbf{X}}(k+1 | k) = \mathbf{F}(k)\tilde{\mathbf{X}}(k | k) + \mathbf{V}(k) \quad (3.45)$$

一步预测协方差为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xx} \rightarrow \mathbf{P}(k+1 | k) &= E[\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k) \tilde{\mathbf{X}}'(k+1 | k) | \mathbf{Z}^k] \\ &= E\{[\mathbf{F}(k)\tilde{\mathbf{X}}(k | k) + \mathbf{V}(k)][\tilde{\mathbf{X}}'(k | k)\mathbf{F}'(k) + \mathbf{V}'(k)] | \mathbf{Z}^k\} \\ &= \mathbf{F}(k)\mathbf{P}(k | k)\mathbf{F}'(k) + \mathbf{Q}(k) \end{aligned} \quad (3.46)$$

注意：一步预测协方差 $\mathbf{P}(k+1 | k)$ 为对称阵，它可用来衡量预测的不确定性， $\mathbf{P}(k+1 | k)$ 越小则预测越精确。

通过对式（3.32）取在 $k+1$ 时刻、以 $\mathbf{Z}^k$ 为条件的期望值，可以类似地得到量测的预测是

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}} \rightarrow \hat{\mathbf{Z}}(k+1 | k) &= E[\mathbf{Z}(k+1) | \mathbf{Z}^k] = E[(\mathbf{H}(k+1)\mathbf{X}(k+1) + \mathbf{W}(k+1)) | \mathbf{Z}^k] \\ &= \mathbf{H}(k+1)\hat{\mathbf{X}}(k+1 | k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

进而可求得量测的预测值和量测值之间的差值为

$$\tilde{\mathbf{Z}}(k+1 | k) = \mathbf{Z}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1 | k) = \mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k) + \mathbf{W}(k+1) \quad (3.48)$$

量测的预测协方差（或新息协方差）为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{zz} \rightarrow \mathbf{S}(k+1) &= E[\tilde{\mathbf{Z}}(k+1 | k) \tilde{\mathbf{Z}}'(k+1 | k) | \mathbf{Z}^k] \\ &= E\{[\mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k) + \mathbf{W}(k+1)][\tilde{\mathbf{X}}'(k+1 | k)\mathbf{H}'(k+1) + \mathbf{W}'(k+1)] | \mathbf{Z}^k\} \\ &= \mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1 | k)\mathbf{H}'(k+1) + \mathbf{R}(k+1) \end{aligned} \quad (3.49)$$

注意：新息协方差 $\mathbf{S}(k+1)$ 也为对称阵，它用来衡量新息的不确定性，新息协方差越小，则说明量测值越精确。

状态和量测之间的协方差为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{xz} \rightarrow E[\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k) \tilde{\mathbf{Z}}'(k+1 | k) | \mathbf{Z}^k] &= E\{\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k)[\mathbf{H}(k+1)\tilde{\mathbf{X}}(k+1 | k) + \mathbf{W}(k+1)]' | \mathbf{Z}^k\} \\ &= \mathbf{P}(k+1 | k)\mathbf{H}'(k+1) \end{aligned} \quad (3.50)$$

增益为

$$\mathbf{P}_{xz} \mathbf{P}_{zz}^{-1} \rightarrow \mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1 | k)\mathbf{H}'(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1) \quad (3.51)$$

增益的大小反映了最新观测信息对状态估计量的贡献大小。

进而，可求得 $k+1$ 时刻的状态更新方程为

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{v}(k+1) \quad (3.52)$$

式中， $\mathbf{v}(k+1)$ 为新息或量测残差，即

$$\mathbf{v}(k+1) = \tilde{\mathbf{Z}}(k+1|k) = \mathbf{Z}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) \quad (3.53)$$

式 (3.52) 说明 $k+1$ 时刻的估计 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1)$ 等于该时刻的状态预测值 $\hat{\mathbf{X}}(k+1|k)$ 再加上一个修正项，而这个修正项与增益 $\mathbf{K}(k+1)$ 和新息有关。

协方差更新方程为

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k) \quad (3.54)$$

$$= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)]\mathbf{P}(k+1|k) \quad (3.55)$$

$$= \mathbf{P}(k+1|k) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{S}(k+1)\mathbf{K}'(k+1) \quad (3.56)$$

$$= [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)]\mathbf{P}(k+1|k)[\mathbf{I} + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{H}(k+1)]' - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{R}(k+1)\mathbf{K}'(k+1) \quad (3.57)$$

式中， $\mathbf{I}$ 为与协方差同维的单位阵。式 (3.57) 可保证协方差矩阵 $\mathbf{P}$ 的对称性和正定性。

滤波器增益的另一种表示形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k+1|k+1)\mathbf{H}'(k+1)\mathbf{R}^{-1}(k+1) &= [\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1) - \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)\mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1)]\mathbf{R}^{-1}(k+1) \\ &= \mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1)\mathbf{S}^{-1}(k+1)[\mathbf{S}(k+1) - \mathbf{H}(k+1)\mathbf{P}(k+1|k)\mathbf{H}'(k+1)]\mathbf{R}^{-1}(k+1) \\ &= \mathbf{K}(k+1) \end{aligned} \quad (3.58)$$

卡尔曼滤波除了系统噪声和量测噪声为高斯白噪声且已知其二阶矩之外，不需任何其他条件，因而完全适用于非平稳、多维的随机序列的估计问题。图 3.3 给出了卡尔曼滤波所包含的方程及滤波流程，而卡尔曼滤波算法单次循环流程图如图 3.4 所示，其余的依次类推。

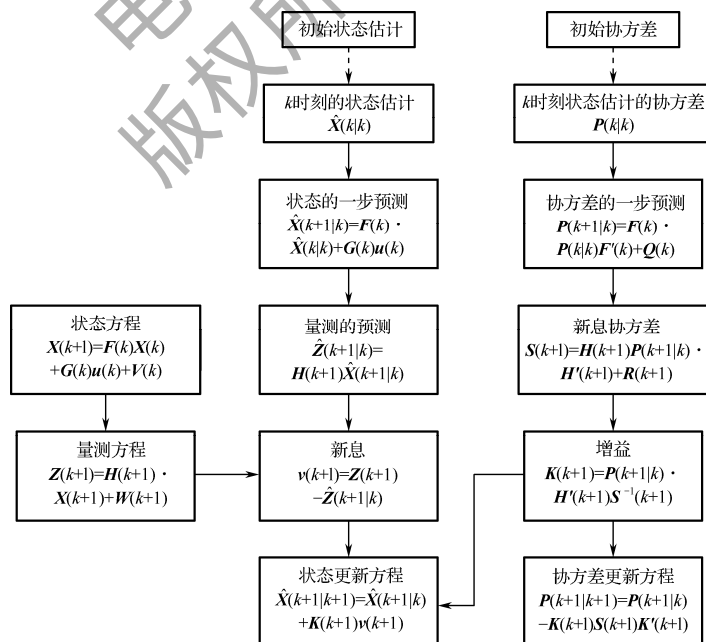


图 3.3 卡尔曼滤波算法框图