

第三章 导数的应用

导数在自然科学和工程技术上都有着极其广泛的应用。本章在介绍微分中值定理的基础上,引出求极限的新方法——洛必达法则,并以导数为工具,进一步讨论函数的单调性、极值及图形的性态等。

第一节 微分中值定理

本节将介绍罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理,这三个定理统称为微分中值定理,它们揭示了函数在某区间上的整体性质及函数在该区间内与某一点的导数之间的关系。微分中值定理既是用微分学知识解决应用问题的理论基础,又是解决微分学自身发展问题的一种理论模型,它们在一元函数微分学的理论及应用中都有十分重要的作用。

一、罗尔定理

定理 1 (罗尔定理) 如果函数 $y = f(x)$ 满足如下三个条件:(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,(2) 在开区间 (a, b) 内可导,(3) 在区间端点处的函数值相等 $f(a) = f(b)$, 那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

对于定理 1, 这里不做证明。为了方便理解,可借助图形加以说明。一条在闭区间 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$, 如果其上每点(端点除外)都有不垂直于 x 轴的切线(曲线光滑), 并且在曲线两个端点处的纵坐标相同, 那么在该曲线上至少有一点的切线平行于 x 轴(见图 3-1)。这就是罗尔定理的几何意义。

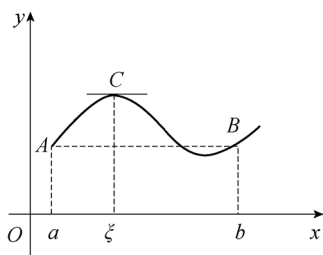


图 3-1

例 1 验证函数 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 在区间 $[-3, 0]$ 上满足罗尔定理的条件, 并求出罗尔定理结论中的 ξ 。

解 因为 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 是初等函数, 所以函数 $f(x)$ 在 $[-3, 0]$ 上连续; 又因为 $f'(x) = 3x^2 + 6x$, 所以 $f(x)$ 在 $(-3, 0)$ 内可导; 而 $f(-3) = f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-3, 0]$ 上满足罗尔定理的条件。

令 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 0$, 解得 $x = 0$, $x = -2$ 。因为 $x = 0$ 不在区间 $(-3, 0)$ 内, 舍去, 所以取 $\xi = -2$, 即在区间 $(-3, 0)$ 内存在一点 $\xi = -2$, 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

二、拉格朗日中值定理

在罗尔定理中, $f(a) = f(b)$ 这个条件相当特殊, 限制了该定理的应用。拉格朗日在罗尔定理的基础上做了进一步研究, 取消了罗尔定理中 $f(a) = f(b)$ 这个条件, 提出了微分学中具有重要地位的拉格朗日中值定理。

定理 2 (拉格朗日中值定理) 设函数 $y = f(x)$ 满足: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, (2) 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

上式也可表示成

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

显然, 罗尔定理是拉格朗日中值定理在 $f(a) = f(b)$ 时的特殊情形。

同样, 我们也可以借助图形加以理解。由于 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 表示曲线 $y = f(x)$ 上连接 $A[a, f(a)]$ 与 $B[b, f(b)]$ 两点的弦的斜率, 因此, 定理 2 的几何意义是: 对于在闭区间 $[a, b]$ 上的连续曲线 $y = f(x)$, 若除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线, 则在这条连续曲线上至少能找到一点, 使曲线在该点的切线平行于弦 AB , 如图 3-2 所示。

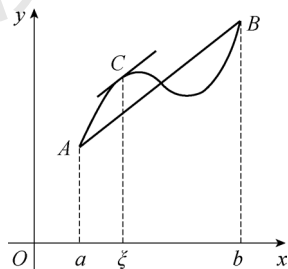


图 3-2

例 2 验证函数 $f(x) = \ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 并求出拉格朗日中值定理结论中的 ξ 。

解 因为 $f(x) = \ln x$ 是初等函数, 所以函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上连续; 又因为 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, e)$ 内存在, 即 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 内可导, 所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件。

又 $f(1) = 0$, $f(e) = 1$, 令 $f'(\xi) = \frac{f(e) - f(1)}{e - 1}$, 即 $\frac{1}{\xi} = \frac{1}{e - 1}$, 解得 $\xi = e - 1$ 。

我们还可以应用拉格朗日中值定理来证明某些函数不等式。

例 3 证明当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ 。

证明 为应用拉格朗日中值定理, 令 $f(t) = \ln t$, 则函数 $f(t)$ 在区间 $[1, 1+x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件: $f(t)$ 在 $[1, 1+x]$ 上连续且在 $(1, 1+x)$ 内可导。因此存在 $\xi \in (1, 1+x)$ 使得

$$\ln(1+x) - \ln 1 = f'(\xi)(1+x-1)$$

由于 $f'(t) = \frac{1}{t}$, 因此上式可写成

$$\ln(1+x) = \frac{1}{\xi}x$$

又由于 $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi} < 1$, 故当 $x > 0$ 时, 有

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

推论 1 如果函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内恒有 $f'(x) = 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是一个常数, 即

$$f(x) = C \quad (C \text{ 为常数})$$

证明 在区间 (a, b) 内任取两点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 故存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

由定理假设 $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, 因此 $f'(\xi) = 0$, 从而 $f(x_2) - f(x_1) = 0$, 即 $f(x_1) = f(x_2)$ 。由 x_1 和 x_2 的任意性可知, $f(x)$ 在区间 (a, b) 内恒为常数, 即

$$f(x) = C \quad (C \text{ 为常数})$$

***例 4** 证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$ 。

证明 当 $x = -1$ 时,

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$$

当 $x = 1$ 时,

$$\arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

因此, 当 $x = \pm 1$ 时, 欲证的等式成立。现设 $x \in (-1, 1)$, 令 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

根据推论 1 可知, $f(x) = C$, C 为常数, $x \in (-1, 1)$ 。取 $x = 0$, 则

$$C = f(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

即 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ 。综上, 有 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$ 。

推论 2 如果在区间 (a, b) 内恒有 $f'(x) = g'(x)$, 那么在区间 (a, b) 内有

$$f(x) = g(x) + C \quad (C \text{ 为常数})$$

证明 令 $F(x) = f(x) - g(x)$, 则由 $f'(x) = g'(x)$ 得 $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ 。由推论 1 可知, $F(x) = C$ (C 为常数), 即有 $f(x) = g(x) + C$ 。

三、柯西中值定理

将拉格朗日中值定理加以推广, 就得到了柯西中值定理。

定理 3 (柯西中值定理) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足以下条件: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, (2) 在开区间 (a, b) 内可导, (3) 在 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$, 则在 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

习题 3-1

- 下列函数在给定的区间上是否满足罗尔定理的条件？如果满足，求出定理中的 ξ 。
 (1) $f(x) = x^2 - x$, $[0, 1]$; (2) $f(x) = \sin x$, $[-\pi, \pi]$ 。
- 下列函数在给定的区间上是否满足拉格朗日中值定理的条件？如果满足，求出定理中的 ξ 。
 (1) $f(x) = x^3 - 3x$, $[0, 3]$; (2) $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, 4]$ 。

第二节 洛必达法则

在第一章中，我们计算过 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限，但往往需要经过适当的变形转化为可运用极限的运算法则或重要极限的形式才可以进行计算，且转化时没有统一的变形方法，增加了求极限的难度。本节将利用导数这一工具，给出计算未定式极限的一般方法——洛必达法则。

一、 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 4 (洛必达法则) 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足如下条件:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$),
- 在点 x_0 的某去心邻域内可导, 且 $g'(x) \neq 0$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A 为实数或 ∞), 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

这个法则告诉我们，如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限，那么在上述条件下

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 可转化为 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 。

注：对于 x 的其他变化趋势 ($x \rightarrow \infty$ 、 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow x_0^+$ 、 $x \rightarrow x_0^-$)，上述定理仍成立。

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x}$ 。

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 根据洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ (n 为正整数)。

解 这是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 根据洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} nx^n = +\infty$$

例 7 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \arctan x}{\frac{1}{x}}$ 。

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 根据洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{0 + \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ 。

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 根据洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$$

上式右边极限仍是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 再运用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$ 。

解 这是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 连续两次运用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{6} = \frac{1}{3}$$

注: (1) 在运用洛必达法则求极限的过程中, 若 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍是未定式, 且 $f'(x)$ 、 $g'(x)$

仍满足洛必达法则的条件, 则 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ 。也就是说, 洛必达法则可以

多次使用, 如例 8 和例 9。

(2) 每次在运用洛必达法则之前都必须判断极限是否是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 否则会出错。例如, 根据洛必达法则, 可以得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} \left(\frac{0}{0} \text{型} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x} = 0$, 但法则运用过程中的 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x}$ 已不是 $\frac{0}{0}$ 型未定式了, 所以如果继续运用洛必达法则, 就有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-\sin x} = \infty$$

就会得到错误的结果。

(3) 并不是所有的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限都可以运用洛必达法则求解。例如,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限, 但分子分母分别求导后得到 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$, 这个极限不存在, 故洛必达法则失效, 不能使用; 其实原极限是存在的, 正确解法是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$$

(4) 每次运用洛必达法则后, 都需要整理简化极限式, 并将存在极限且不影响未定式的因式分离出来, 以简化后面的计算。

*二、其他类型的未定式

未定式除 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型外, 还有 $0 \cdot \infty$ 型、 $\infty - \infty$ 型、 1^∞ 型、 0^0 型、 ∞^0 型等。对于这几种未定式, 可设法先将它们转化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型后再运用洛必达法则求解。

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ 。

解 这是 $0 \cdot \infty$ 型未定式, 先将其转化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 再运用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} \left(\frac{\infty}{\infty} \text{型} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-2} = 0$$

例 11 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ 。

解 这是 $\infty - \infty$ 型未定式, 先通分将其转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 再运用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x + (x-1)\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x + (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}$$

例 12 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ 。

解 这是 0^0 型未定式, 先将它变形为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x (0 \cdot \infty \text{型}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$ 。

习题 3-2

运用洛必达法则求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \ln x}{e^x - e};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x + \sin x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{\ln(1+x^3)};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\ln x}.$$

第三节 函数的单调性与极值

我们已经会用初等数学的方法研究一些函数的单调性, 但这些方法的适用范围小、技巧性强, 因此不具有一般性。本节将以导数为工具, 介绍判定函数单调性与极值的一般方法。

一、函数的单调性

从函数的几何图形来看, 如果函数 $y = f(x)$ 是单调增加的, 那么这条曲线沿 x 轴正向是上升的, 如图 3-3 所示, 曲线上每点的切线斜率都是正的, $f'(x) > 0$; 如果函数 $y = f(x)$ 是单调减少的, 那么曲线 $y = f(x)$ 沿 x 轴正向是下降的, 如图 3-4 所示, 曲线上每点的切线斜率都是负的, $f'(x) < 0$ 。

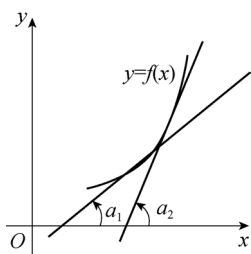


图 3-3

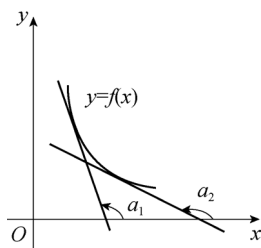


图 3-4

可见, 函数的单调性与其导数的符号有着密切的联系, 反之能否用导数的符号来判断函数的单调性呢, 下面的定理很好地回答了这个问题。

定理 5 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导,

(1) 如果在区间 (a, b) 内恒有 $f'(x) > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加;

(2) 如果在区间 (a, b) 内恒有 $f'(x) < 0$, 那么函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调减少。

证明 (1) 在区间 (a, b) 内任取两点 x_1, x_2 , 并设 $x_1 < x_2$, 显然函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件, 所以至少存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

由已知条件 $f'(x) > 0, x \in (a, b)$, 得 $f'(\xi) > 0$, 因此 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 这就证得 $f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的。

同理可证 (2)。

注: (1) 定理 5 中的开区间 (a, b) 若改为闭区间或无限区间, 结论同样成立。

(2) 若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则称该区间为函数的单调区间。

(3) 如果函数的导数仅在个别点处为零, 而在其余的点处均满足定理 5 的条件, 那么定理 5 的结论仍然成立。例如, 函数 $y = x^3$ 在点 $x = 0$ 处的导数为零, 但在 $(-\infty, +\infty)$ 内其他点处的导数均大于零, 因此它在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内仍是单调增加的 (见图 3-5)。

一般地, 确定函数 $y = f(x)$ 的单调性 (单调区间) 的步骤是:

(1) 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域;

(2) 求导数 $f'(x)$, 找出单调区间的可疑分界点, 即使 $f'(x) = 0$ 的点 (函数 $f(x)$ 的驻点) 和 $f'(x)$ 不存在的点 (包括导数为 ∞ 的点), 然后用可疑分界点将定义域分成若干个子区间;

(3) 判定 $f'(x)$ 在各子区间的符号, 从而确定 $f(x)$ 的单调区间。

例 13 讨论函数 $f(x) = e^x - ex$ 的单调性。

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) $f'(x) = e^x - e$ 。令 $f'(x) = 0$, 即 $e^x - e = 0$, 得驻点 $x = 1$, 于是函数 $f(x)$ 的定义域被分为 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 两个子区间。

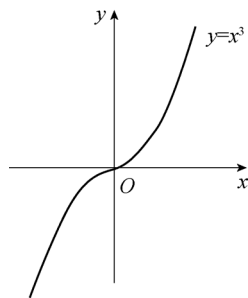


图 3-5

(3) 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调减少; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 因此函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内单调增加。

为简便直观起见, 通常将上述讨论归纳为如表 3-1 所示的表格。

表 3-1

x	$(-\infty, -1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

表 3-1 中的箭头 “ $\searrow$ ” “ $\nearrow$ ” 分别表示函数在指定区间单调减少和单调增加。

例 14 求函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 的单调区间。

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$; 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$ 、 $x = 1$ 。

(3) 讨论见表 3-2。

表 3-2

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

由表 3-2 可知, 函数的单调增加区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调减少区间为 $(-1, 1)$ 。

例 15 讨论函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调性。

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内没有驻点, 但当 $x = 0$ 时, $f'(x)$ 不存在, 即 $x = 0$ 为导数不存在的点。

(3) 讨论见表 3-3。

表 3-3

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	不存在	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

由表 3-3 可知, 函数的单调增加区间为 $(0, +\infty)$, 单调减少区间为 $(-\infty, 0)$ 。

例 16 求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间。

解 (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1) + x^{\frac{2}{3}} = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$; 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{2}{5}$, 又当 $x = 0$ 时, $f'(x)$ 不存在, 即 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的不可导点。

(3) 讨论见表 3-4。

表 3-4

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

由表 3-4 可知, 函数的单调增加区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\frac{2}{5}, +\infty)$, 单调减少区间为 $(0, \frac{2}{5})$ 。

另外, 利用函数的单调性, 还可以证明一些函数不等式。

例 17 证明 $x > 0$ 时, $xe^x > e^x - 1$ 。

解 令 $f(x) = xe^x - e^x + 1$, 则 $f(0) = 0$ 。

又 $f'(x) = xe^x > 0$, $x \in (0, +\infty)$, 所以函数 $f(x) = xe^x - e^x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 从而当 $x > 0$ 时, 有 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $xe^x - e^x + 1 > 0$, 亦即 $xe^x > e^x - 1$ 。

二、函数的极值

1. 函数极值的定义

极值是函数的一种局部性态, 它能帮助我们进一步把握函数的变化情况, 为准确描绘函数图形提供不可缺少的信息; 函数的极值也是研究函数最大值问题和最小值问题的关键所在。下面首先给出函数极值的定义。

定义 1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的某个邻域内有定义, 如果在该邻域内任取一点 $x (x \neq x_0)$, 恒有

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0)$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值或极小值, 称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的极大值点或极小值点。

函数的极大值和极小值统称为极值, 极大值点和极小值点统称为极值点。

函数的极值与函数的最值是两个不同的概念。极值是一个局部性的概念, 它仅限于与点 x_0 处的某个邻域内的函数值进行比较; 而最值是一个整体性的概念, 它对整个区间的函数值进行比较。函数的极大值不一定是函数的最大值, 函数的极小值也不一定是函数的最小值; 一个函数在某个区间上可能有若干个极值点, 在这些点中, 有些极小值可能大于极大值。如图 3-6 所示的函数图形, 它有 $f(x_2)$ 和 $f(x_5)$ 两个极大值, 以及 $f(x_1)$ 、 $f(x_4)$ 和 $f(x_6)$ 三个极小值, 其中极大值 $f(x_2)$ 比极小值 $f(x_6)$ 还小。对整个区间 $[a, b]$ 来说, 只有一个极小值 $f(x_1)$ 是最小值, 而最大值是 $f(b)$ 。

由定义 1 还可以看出, 函数的极值点一定出现在区间内部, 区间端点不可能成为极值点。

2. 函数极值的判定方法

从几何图形上看, 在函数 $f(x)$ 可导的前提下, 取得极值的点处的曲线切线是水平的。但曲线有水平切线的地方, 函数不一定取得极值, 图 3-6 中点 x_3 处的曲线切线是水平的, 但 $f(x_3)$ 不是极值。

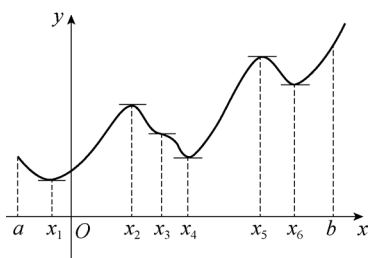


图 3-6

下面给出函数取得极值的必要条件和充分条件。

定理 6 (极值存在的必要条件) 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 那么 $f'(x_0) = 0$ 。

定理 6 又称费马定理, 该定理说明可导函数的极值点一定是驻点, 但驻点不一定是函数的极值点。例如, 函数 $y = x^2$ 、 $y = x^3$ 的驻点都是 $x = 0$, 但点 $x = 0$ 是函数 $y = x^2$ 的极小值点, 却不是函数 $y = x^3$ 的极值点。

此外, 连续且不可导的点也可能是极值点。例如, 函数 $f(x) = |x|$ 在点 $x = 0$ 处连续且不可导, 但点 $x = 0$ 是该函数的一个极小值点。

综上所述, 函数可能在其驻点或连续且不可导的点处取得极值。那么如何判定这些可能的极值点到底是不是极值点呢? 根据函数极值的定义和函数单调性的判别方法可知, 如果函数在其极值点邻近两侧的单调性改变, 那么函数一阶导数的符号会改变。据此, 不难得到判定函数极值是否存在的一个充分条件。

定理 7 (极值存在的第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的某个邻域内连续, 且在点 x_0 处的去心邻域内可导, 以及 $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在,

(1) 如果当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 且当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可以取得极大值 $f(x_0)$;

(2) 如果当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 且当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可以取得极小值 $f(x_0)$;

(3) 如果点 x_0 两侧 $f'(x)$ 的符号相同, 那么点 x_0 不是函数 $f(x)$ 的极值点, $f(x)$ 在点 x_0 处没有极值。

根据定理 7, 可以得到求函数 $y = f(x)$ 的极值点和极值的一般步骤:

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 求 $f'(x)$, 令 $f'(x) = 0$, 得到驻点, 并找出使 $f'(x)$ 不存在的点 (包括导数为 ∞ 的点);
- (3) 用上述点将函数定义域分成若干个子区间, 列表考察 $f'(x)$ 在各个子区间内的符号, 从而判定函数 $f(x)$ 在各个子区间上的单调性, 确定函数的极值点, 并得到极值。

例 18 求函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 的极值。

解 由例 14 中的表 3-2 可得函数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 的极值, 见表 3-5。

表 3-5

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值 $f(-1)=3$	$\searrow$	极小值 $f(1)=-1$	$\nearrow$

由表 3-5 可知, 函数在点 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=3$, 在点 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=-1$ 。

例 19 求函数 $f(x)=4x^3-x^4$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 又有 $f'(x)=12x^2-4x^3=4x^2(3-x)$, 令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=0$ 、 $x=3$; 讨论见表 3-6。

表 3-6

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	非极值	$\nearrow$	极大值 $f(3)=27$	$\searrow$

由表 3-6 可知, 函数在点 $x=3$ 处取得极大值, $f(3)=27$ 。

例 20 求函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间与极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$; 又有 $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, 令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x=1$, 且当 $x=0$ 时, $f'(x)$ 不存在; 讨论见表 3-7。

表 3-7

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值 $f(0)=0$	$\searrow$	极小值 $f(1)=-\frac{1}{2}$	$\nearrow$

由表 3-7 可知, 函数 $f(x)=x-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ 的单调增加区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$, 单调减少区间为 $(0, 1)$; 极大值为 $f(0)=0$, 极小值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$ 。

当函数在其驻点处的二阶导数存在且不为零时, 还可以用下述定理判定函数在其驻点处是取得极大值还是极小值。

定理 8 (极值存在的第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数, 且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$,

- (1) 若 $f''(x_0)<0$, 则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的极大值点, $f(x_0)$ 为极大值;
- (2) 若 $f''(x_0)>0$, 则点 x_0 为函数 $f(x)$ 的极小值点, $f(x_0)$ 为极小值。

例 21 求函数 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。 $f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x-3)(x+1)$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x = 3$ 、 $x = -1$ ， $f(x)$ 没有导数不存在的点。又由 $f''(x) = 12x - 12$ ，得 $f''(-1) = -24 < 0$ ， $f''(3) = 24 > 0$ 。所以，由定理 8 可得，点 $x = -1$ 为极大值点， $f(-1) = 3$ 为极大值；点 $x = 3$ 为极小值点， $f(3) = -61$ 为极小值。

注：(1) 若 $f''(x_0) = 0$ ，则定理 8 失效。此时，点 x_0 可能是极值点，也可能不是极值点，这通常需要用极值存在的第一充分条件进行判定。例如，函数 $f(x) = 3x^5$ ，令 $f'(x) = 15x^4 = 0$ ，得驻点 $x = 0$ ，但 $f''(0) = 0$ ，此时定理 8 失效。实际上函数 $f(x) = 3x^5$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加，没有极值点。又例如，函数 $f(x) = x^4$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有驻点 $x = 0$ ，而 $f''(0) = 12x^2 \Big|_{x=0} = 0$ ，此时也不能用定理 8 判定极值。但由定理 7 很容易得到点 $x = 0$ 是函数 $f(x) = x^4$ 的极小值点。

(2) 对于不可导点是否为极值点，只能用极值存在的第一充分条件来判定。

***例 22** 求函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 的极值。

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。由

$$f'(x) = 6x(x^2 - 1)^2$$

令 $f'(x) = 0$ ，得到驻点 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ 。由于

$$f''(x) = 6(x^2 - 1)^2 + 12x(x^2 - 1) \cdot 2x = 6(x^2 - 1)(5x^2 - 1)$$

因此 $f''(0) = 6 > 0$ 。根据定理 8 可知，点 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(0) = 0$ 。但 $f''(-1) = 0$ 且 $f''(1) = 0$ ，不能用定理 8 来判定点 $x = -1$ 和点 $x = 1$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点。因此用定理 7 的讨论结果见表 3-8。

表 3-8

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	非极值	$\searrow$	极小值 $f(0) = 0$	$\nearrow$	非极值	$\nearrow$

由表 3-8 可以看出，点 $x = -1$ 和点 $x = 1$ 都不是函数 $f(x)$ 的极值点；点 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，极小值为 $f(0) = 0$ 。

习题 3-3

1. 求下列函数的单调区间与极值：

(1) $f(x) = x^5 + 5^x$ ；

(2) $f(x) = x - e^x$ ；

(3) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$ ；

(4) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ ；

(5) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$ ；

(6) $f(x) = \frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^2}$ 。

2. 证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x \geq 0$ 时, $\arctan x - x \leq 0$ 。

第四节 函数的最值

由闭区间上连续函数的性质可知, 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 上必取得最大值和最小值。下面讨论怎样求出这个最大值和最小值。

根据最值和极值的定义可知, 在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值只能在区间内的极值点和端点处取得。因此, 可以求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有可能的极值点 (驻点或导数不存在的点), 然后将 $f(x)$ 在这些点处的函数值与区间端点处的函数值 $f(a)$ 、 $f(b)$ 进行比较, 其中最大的就是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 最小的就是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值。

例 23 求函数 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最大值和最小值。

解 因为 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$, 无导数不存在的点。由于 $f(-2) = f(2) = 13$, $f(-1) = f(1) = 4$, $f(0) = 5$, 比较各值, 得所求最大值为 $f(-2) = f(2) = 13$, 最小值为 $f(-1) = f(1) = 4$ 。

如果函数 $f(x)$ 在一个开区间或无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且有唯一的极值点 x_0 , 而函数的确有最大值或最小值, 那么当 $f(x_0)$ 为极大值时, $f(x_0)$ 就是该区间上的最大值; 当 $f(x_0)$ 为极小值时, $f(x_0)$ 就是该区间上的最小值。

例 24 求函数 $f(x) = x^2 - \frac{54}{x}$ ($x < 0$) 的最值。

解 由 $f'(x) = \frac{2(x^3 + 27)}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -3$ 。因为 $x = 0$ 时 $f'(x)$ 不存在, 且 $x < 0$, 所以舍去 $x = 0$ 。又因为 $f''(x) = 2 - \frac{108}{x^3}$, $f''(-3) = 6 > 0$, 所以在点 $x = -3$ 处取得唯一的极值, 且为极小值, 也是函数的最小值, 最小值为 $f(-3) = 27$ 。

在实际应用中, 经常会遇到求最大值和最小值的问题, 如怎样使用料最省、容量最大、花钱最少、效率最高、利润最大等。这类问题往往首先要根据问题的具体意义建立函数关系式 (通常称为目标函数), 并确定函数的定义域; 然后求目标函数的最大值或最小值。一般地, 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内只有一个驻点 x_0 , 且从实际问题本身又可以知道 $f(x)$ 在 (a, b) 内必有最大值或最小值, 那么 $f(x_0)$ 就是所求的最大值或最小值。

例 25 假设要制作一个体积为 V 的圆柱形 (无盖) 水杯, 问怎样选它的底直径 r 与高 h , 才能使所用材料最省?

解 依题意得所用材料最省就是水杯的表面积最小。因为 $V = \pi r^2 h$, 所以 $h = \frac{V}{\pi r^2}$, 从而得到水杯的表面积 (目标函数) 为

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \frac{2V}{r}, \quad r \in (0, +\infty)$$

表面积 $S(r)$ 对 r 求导得

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

令 $S'(r) = 0$, 得唯一驻点 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 。又 $S''(r) = 2\pi + \frac{4V}{r^3}$, $S''(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}) > 0$, 所以 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 是唯一极小值点, 即最小值点。因此当直径 $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 时, 高 $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, 水杯表面积最小, 即所用材料最省。此时, h 与 r 之比为 1:1。

例 26 某商店买卖某种商品, 进货每件 3 元。售出每件 4 元时, 可销售 400 件; 若每件降价 0.05 元, 则可多售出 40 件。问进货多少件且每件售价多少元时可获得最大利润?

解 设进货 x 件, 售价 p 元, 依题意有

$$\frac{x - 400}{40} = \frac{4 - p}{0.05}$$

解得 $x = 800(4 - p) + 400 = 3600 - 800p$, 则所获利润为

$$L(p) = px - 3x = (p - 3)x = (p - 3)(3600 - 800p) = -800p^2 + 6000p - 10800,$$

利润 $L(p)$ 对 p 求导数, 得

$$L'(p) = -1600p + 6000$$

令 $L'(p) = 0$, 得唯一驻点 $p = 3.75$, 此时 $x|_{p=3.75} = 3600 - 800 \times 3.75 = 600$, $L(3.75) = (3.75 - 3) \times 600 = 450$ 。因为 $L''(p) = -1600 < 0$, 所以 $p = 3.75$ 是唯一极大值点, 即最大值点。因此进货 600 件且每件售价 3.75 元时可获最大利润 450 元。

习题 3-4

1. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值:

$$(1) f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}, \quad x \in [0, 9];$$

$$(2) f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x, \quad x \in [-3, 2].$$

2. 求下列函数在定义域内的最值:

$$(1) f(x) = e^{-x^2};$$

$$(2) f(x) = \ln x + \frac{2}{x}.$$

3. 想要制作一个底为正方形、表面积为 108 m^2 的长方体开口容器, 问长方体开口容器底边长 x 与高 h 各为多少时, 才能使得容器的容积最大?

4. 设某产品产量为 x (百台) 时的成本函数为 $C(x) = x^3 - 3x^2 + 15x$ (百元), 问当产量为多少时, 该产品的平均成本最小? 并求最小平均成本。

5. 设某产品产量为 x (百台) 时的成本函数为 $C(x) = 5x + 200$ (百元), 收益函数为 $R(x) = 10x - 0.01x^2$ (百元), 问当产量为多少时, 该产品的利润最大? 最大利润是多少?

第五节 曲线的凹凸性与拐点及函数图形的描绘

一、曲线的凹凸性与拐点

在第三章第三节中,我们研究了函数的单调性,函数的单调性反映了函数的上升或下降,但不能完全反映它的变化规律。如图 3-7 所示的函数 $y=f(x)$ 的图形在 (a,b) 内虽然一直上升,但 P 点前后图形有着明显的不同。图中曲线从左向右先是向上弯曲,通过 P 点后,改变了弯曲的方向变为向下弯曲。因此研究图形时,考察曲线的弯曲方向及改变弯曲方向的点是很有必要的。从图 3-7 中可以明显看出,曲线向上弯曲的弧段位于该弧段上每点切线的上方,曲线向下弯曲的弧段位于该弧段上每点切线的下方。据此,可以给出曲线凹凸性的定义。

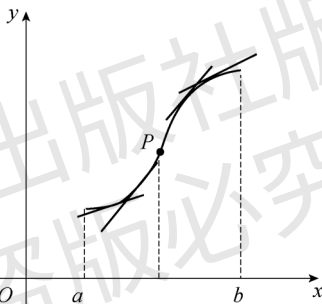


图 3-7

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导,若曲线 $y=f(x)$ 位于其上任意一点切线的上方,则称曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是凹的(见图 3-8),此时区间 (a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的凹区间;若曲线 $y=f(x)$ 位于其上任意一点切线的下方,则称曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内是凸的(见图 3-9),此时区间 (a,b) 称为函数 $y=f(x)$ 的凸区间。

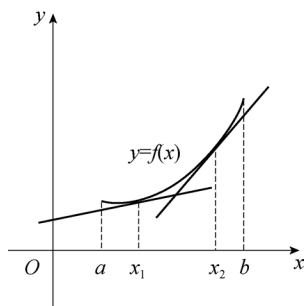


图 3-8

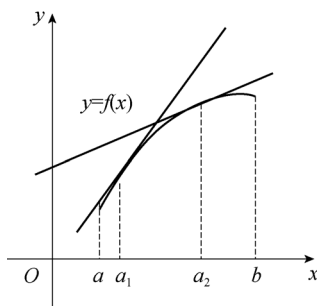


图 3-9

从几何图形上看,凹曲线上切线的斜率随着 x 的增大而变大(一阶导数递增),凸曲线上切线的斜率随着 x 的增大而变小(一阶导数递减)。于是,容易得到下面判定曲线凹凸性的定理。

定理 9 设函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶导数,

(1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的;

(2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的。

某些函数曲线可能在某些区间内是凹的而在另一些区间内是凸的。所以,我们要考虑曲线由凹变凸或由凸变凹的分界点。下面给出拐点的定义。

定义 3 连续曲线上凹与凸的分界点称为该曲线的拐点。

如何寻找曲线 $y = f(x)$ 的拐点呢?

拐点既然是曲线凹凸的分界点,结合定理 2,若函数在拐点附近的 $f''(x)$ 存在,则拐点左右两边的 $f''(x)$ 必然异号。所以,要寻找拐点,只要找出使 $f''(x)$ 符号发生变化的分界点即可。如果函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有二阶连续导数,那么在使 $f''(x)$ 符号发生变化的分界点处必有 $f''(x) = 0$; 此外, $f''(x)$ 不存在的点也可能是使 $f''(x)$ 符号发生变化的分界点。

综上所述,求函数曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点的一般步骤为:

(1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求 $f''(x)$, 令 $f''(x) = 0$, 解出全部实根,并求出所有使 $f''(x)$ 不存在的点。同时以这些点作为分界点,将定义域划分为若干个子区间;

(3) 列表判定各子区间内 $f''(x)$ 的符号,从而确定曲线的凹凸区间和拐点。

例 27 求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点。

解 曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。由 $y' = 4x^3 - 6x^2$, $y'' = 12x^2 - 12x$, 令 $y'' = 0$, 解得 $x = 0$, $x = 1$ 。讨论见表 3-9。

表 3-9

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	∪	拐点 (0,1)	∩	拐点 (1,0)	∪

表 3-9 中的“∪”“∩”分别表示曲线在指定的区间内是凹的和凸的。

由表 3-9 可知,曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$, 凸区间是 $(0, 1)$, 拐点为 $(0, 1)$ 和 $(1, 0)$ 。

***例 28** 求曲线 $y = (x-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}x^2$ 的凹凸区间和拐点。

解 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 。由 $y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}x$, $y'' = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{9}$, 令 $y'' = 0$, 解得 $x = 2$, 而 $x = 1$ 时 y'' 不存在。讨论见表 3-10。

表 3-10

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	∪	拐点 $(1, \frac{1}{9})$	∩	拐点 $(2, \frac{13}{9})$	∪

由表 3-10 可知, 曲线 $y = (x-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}x^2$ 的凹区间是 $(-\infty, 1)$ 和 $(2, +\infty)$, 凸区间是 $(1, 2)$, 拐点为 $(1, \frac{1}{9})$ 和 $(2, \frac{13}{9})$ 。

*二、函数图形的描绘

函数的图形具有直观明了的特点, 因此, 研究函数图形的意义重大, 其应用也非常广泛。这里先介绍函数曲线的渐近线, 再介绍函数图形的描绘。

1. 函数曲线的水平渐近线和垂直渐近线

为了完整地描绘函数的图形, 除应当知道其凹凸性、极值和拐点等性态外, 还应当了解曲线无限远离坐标原点时的变化情况, 这就是我们要讨论的曲线的渐近线问题。

定义 4 若曲线 $y = f(x)$ 上的动点 $M(x, y)$ 沿着曲线无限远离坐标原点时, 它与某直线 l 的距离趋于零, 则称直线 l 为该曲线的渐近线。

定义中的渐近线 l 可以是在各种位置的直线, 我们只讨论下面两种特殊情况:

(1) 水平渐近线。若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则称直线 $y = A$ 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线。

(2) 垂直渐近线。若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线。

例 29 求下列曲线的水平渐近线和垂直渐近线:

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + x - 2}; \quad (2) y = \arctan x.$$

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} = 0$, 所以直线 $y = 0$ 是该曲线的水平渐近线。

又因为 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 + x - 2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2 + x - 2} = \infty$, 所以直线 $x = -2$ 和 $x = -1$ 是该曲线的垂直渐近线。

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 所以直线 $y = -\frac{\pi}{2}$ 和 $y = \frac{\pi}{2}$ 都是该曲线的水平渐近线, 该曲线无垂直渐近线。

2. 函数图形的描绘

对于一个函数来说, 若能作出其图形, 就能从图形上直观地了解该函数的变化趋势。在中学阶段, 我们曾利用描点法来作函数的图形, 但这种方法常常会遗漏曲线的一些关键点,

如极值点、拐点等,因此难以准确把握函数的变化趋势。本节我们将先利用导数来判定函数的一些重要性质,再描绘函数的图形。其一般步骤是:

- (1) 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域,并考察其奇偶性和周期性;
- (2) 求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$, 求出使 $f'(x) = 0$ 和 $f''(x) = 0$ 的点,以及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点,并用这些点将函数的定义域划分成若干个子区间;
- (3) 列表讨论函数 $f(x)$ 的单调区间、极值、凹凸区间及拐点;
- (4) 求函数图形的水平渐近线和垂直渐近线;
- (5) 根据需要补充函数图形上的点(如与坐标轴的交点等);
- (6) 描图。

例 30 描绘函数 $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的图形。

解 (1) 函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 函数是非奇非偶函数。

(2) $f'(x) = -\frac{4(x+2)}{x^3}$, $f''(x) = \frac{8(x+3)}{x^4}$; 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -2$; 令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = -3$, 它们将定义域 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 分为四个子区间 $(-\infty, -3)$ 、 $(-3, -2)$ 、 $(-2, 0)$ 、 $(0, +\infty)$ 。

(3) 讨论见表 3-11。

表 3-11

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	+
$f(x)$	$\searrow \cap$	拐点 $(-3, -\frac{26}{9})$	$\searrow \cup$	极小值 $f(-2) = -3$	$\nearrow \cup$	$\searrow \cup$

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = -2$, 所以直线 $y = -2$ 为一条水平渐近线;

又 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{4(x+1)}{x^2} - 2 \right] = +\infty$, 所以直线 $x = 0$ 为一条垂直渐近线。

(5) 补充作图点 $(1-\sqrt{3}, 0)$ 、 $(1+\sqrt{3}, 0)$ 、 $(-1, -2)$ 、 $(1, 6)$ 、 $(2, 1)$ 。

(6) 描绘函数 $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2} - 2$ 的图象, 如图 3-10 所示。

习题 3-5

1. 求下列函数的凹凸区间与拐点:

- (1) $y = x^3 - 6x^2 + x - 1$; (2) $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$;

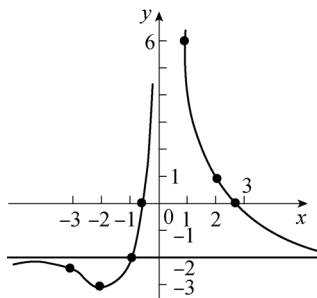


图 3-10

(3) $y = \ln(1+x^2)$;

(4) $y = x - \arctan x$ 。

2. 求下列函数曲线的水平渐近线和垂直渐近线:

(1) $y = \frac{3x+1}{x-2}$;

(2) $y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$;

(3) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

(4) $y = \frac{e^x}{1+x}$ 。

3. 研究下列函数的性态并描绘其图形:

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

(2) $y = \frac{x}{1+x^2}$ 。

总复习题三

1. 单项选择题

(1) 已知 $f(x) = (x-3)(x-4)(x-5)$, 则 $f'(x) = 0$ 有 ();

A. 一个实根

B. 两个实根

C. 三个实根

D. 无实根

(2) 下列函数在所给区间满足罗尔定理条件的是 ();

A. $f(x) = x^2, x \in [0, 3]$

B. $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \in [-1, 1]$

C. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$

D. $f(x) = x\sqrt{3-x}, x \in [0, 3]$

(3) 设曲线 $y = 3x - x^3$, 则其拐点坐标为 ();

A. 0

B. (0,1)

C. (0,0)

D. 1

(4) 若 $f(x) = a \ln x + bx^2 - 3x$, 在 $x=1$ 、 $x=2$ 取得极值, 则 a 、 b 为 ();

A. $a = \frac{1}{2}$ 、 $b = 2$

B. $a = 2$ 、 $b = \frac{1}{2}$

C. $a = -\frac{1}{2}$ 、 $b = 2$

D. $a = -2$ 、 $b = -\frac{1}{2}$

(5) 下列命题中, 正确的是 ();

A. 若 x_0 为极值点, 则必有 $f'(x)$ B. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$ C. 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有极大值也有极小值, 则极大值必大于极小值D. 若 $f'(x_0) = 0$, 则点 x_0 必是 $f(x)$ 的极值点(6) 曲线 $y = 6x - 24x^2 + x^4$ 的凸区间是 ();A. $(-2, 2)$ B. $(-\infty, 0)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$ 

第三章习题答案

(7) 函数 $y=x^3+1$ 在点 $x=0$ 处 ();

A. 有极小值1

B. 有极大值1

C. 有极小值 0

D. 无极值

(8) 函数 $y = x^3 - 3x$ 的单调区间是 (

A. $(-\infty, 1]$

B. $[-1,1]$

C. $[1, +\infty)$

D. $(-\infty, +\infty)$

2. 填空题

(1) 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的单调增加区间为_____;

(2) 函数 $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的极小值为_____;

(3) 函数 $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值为_____;

(4) 曲线 $y = \frac{x^2 - 1}{x(2x + 1)}$ 的水平渐近线为_____;

(5) 函数 $f(x) = x \ln x$ 在区间 $[1, 2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件的 $\xi =$ _____。

3. 求下列极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{\sin^3 x};$$
$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$$
$$(3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}};$$
$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x};$$
$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2};$$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ 。

4. 求下列函数的单调区间与极值

(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$;

$$(2) \quad f(x) = x + \frac{4}{x};$$
$$(3) \quad f(x) = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}};$$
$$(4) \quad f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 5;$$
$$(5) \quad f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$