第 3 章　离散系统的时域分析

本章将研究 LTI 离散系统的时域分析方法。离散系统分析与连续系统分析在很多方面都是类似的。连续系统用微分方程描述，离散系统用差分方程描述。差分方程与微分方程的求解方法在很大程度上是相互对应的。在连续系统分析中，卷积积分具有重要意义；而在离散系统分析中，卷积和具有同等重要的地位。在连续系统分析中，阶跃响应和冲激响应可用于描述系统的特性，是反映或表征系统内部结构（或系统内部属性）的特征函数；在离散系统分析中，系统的阶跃响应和单位序列响应作用相当。以上离散系统分析与连续系统分析的相似性为学习本章提供了很大便利，但是也要注意二者之间存在很多重要差异，如数学模型的建立与求解、系统性能分析等。

在离散系统中，激励信号（输入）用 $f(k)$ 表示，响应（输出）用 $y(k)$ 表示，其中 k 为整数；初始状态用 $\{x(k_0)\}$ 表示，其中 k_0 为常整数，通常取 $k_0=0$。与 LTI 连续系统类似，LTI 离散系统的全响应 $y(k)$ 也可以分解为齐次解 $y_{\mathrm{h}}(k)$ 和特解 $y_{\mathrm{p}}(k)$ 两部分，或者分解为零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$ 和零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$ 两部分，即

$$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)=y_{\mathrm{zi}}(k)+y_{\mathrm{zs}}(k)$$

本章将重点讨论离散系统零状态响应的求解方法。

对于时不变系统而言，若激励 $f(k)$ 引起的零状态响应为 $y_{\mathrm{zs}}(k)$，则激励 $f(k-k_{\mathrm{d}})$ 引起的零状态响应为 $y_{\mathrm{zs}}(k-k_{\mathrm{d}})$，其中 k_{d} 为延时或移位。也就是说，若激励延迟 k_{d} 个单位，则响应也延迟 k_{d} 个单位。

在 2.3 节中求解 LTI 连续系统在任意激励下的零状态响应时，得到结论 $y_{\mathrm{zs}}(t)=f(t)*h(t)$。本章在分析和讨论 LTI 离散系统在任意激励下的零状态响应时，将以单位序列 $\delta(k)$ 为基本信号来分解和表示任意激励信号，并推导得出 LTI 离散系统的零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$ 等于激励信号 $f(k)$ 与系统的序列响应 $h(k)$ 的卷积和。

3.1　LTI 离散系统的响应

3.1.1　差分与差分方程

1．一阶差分运算与序列求和运算

在 1.3 节中，式（1.3.1）和式（1.3.2）分别给出了一阶前向差分和一阶后向差分的定义，

即 $\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$ 和 $\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$，其中 Δ 和 ∇ 称为差分算子。由式（1.3.1）和式（1.3.2）可知，$\Delta f(k)$ 和 $\nabla f(k)$ 之间的关系为

$$\nabla f(k)=\Delta f(k-1) \tag{3.1.1}$$

或

$$\Delta f(k)=\nabla f(k+1) \tag{3.1.2}$$

可见，$\Delta f(k)$ 和 $\nabla f(k)$ 仅位移不同，除此之外没有本质上的差别，因而它们的性质也相同，本书后续主要采用后向差分。

序列 $f(k)$ 的求和运算定义为

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f(i) \tag{3.1.3}$$

2．差分具有线性性质

差分的线性性质可证明如下：根据差分的定义，若有序列 $f_1(k)$、$f_2(k)$ 和常数 a_1、a_2，则

$$\begin{aligned}\nabla\left[a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k)\right]&=\left[a_1 f_1(k)+a_2 f_2(k)\right]-\left[a_1 f_1(k-1)+a_2 f_2(k-1)\right]\\&=a_1\left[f_1(k)-f_1(k-1)\right]+a_2\left[f_2(k)-f_2(k-1)\right]\\&=a_1\nabla f_1(k)+a_2\nabla f_2(k)\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

3．二阶及更高阶差分的定义

二阶后向差分可定义为

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(k)&\overset{\text{def}}{=}\nabla\left[\nabla f(k)\right]=\nabla\left[f(k)-f(k-1)\right]=\nabla f(k)-\nabla f(k-1)\\&=f(k)-2f(k-1)+f(k-2)\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

类似地，可定义三阶、四阶、…、n 阶后向差分：

$$\nabla^n f(k)\overset{\text{def}}{=}\nabla\left[\nabla^{n-1} f(k)\right]=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i f(k-i)\text{，其中 } C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{3.1.6}$$

4．差分方程

n 阶差分方程的一般形式可写为

$$F\left[f(k),\nabla f(k),\nabla^2 f(k),\cdots,\nabla^m f(k),y(k),\nabla y(k),\nabla^2 y(k),\cdots,\nabla^n y(k)\right]=0 \tag{3.1.7}$$

由于各阶差分均可写成 $f(k)$ 或 $y(k)$ 及其移位序列的线性组合形式，所以通常所说的差分方程是指

$$G\left[f(k),f(k-1),\cdots,f(k-m),y(k),y(k-1),\cdots,y(k-n)\right]=0 \tag{3.1.8}$$

式中，n 的取值即差分方程的阶次。

5．线性常系数差分方程

在式（3.1.8）中，如果 $f(k)$、$y(k)$ 及它们的各次移位序列均为一次式，就称该差分方程是线性的，否则就称该差分方程是非线性的。在式（3.1.8）中，如果 $f(k)$、$y(k)$ 及它们的各次移位序列的系数均为常数，就称该差分方程是常系数差分方程；如果某些系数是变量 k 的函数，就称该差分方程是变系数差分方程。例如，$y(k)+4y(k-1)+3y(k-2)=f(k)-f(k-1)$

就是一个二阶的线性常系数差分方程。第 1 章已经说明，描述 LTI 离散系统的都是线性常系数差分方程。差分方程是具有递推关系的代数方程，若已知初始条件和激励，则利用迭代法可求得差分方程的数值解。

例 3.1.1 描述某离散系统的差分方程为

$$y(k)-4y(k-1)+3y(k-2)=f(k)$$

已知初始条件 $y(0)=0$，$y(1)=1$，激励 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求 $y(k)$。

解：将差分方程中除 $y(k)$ 外的各项都移动到等号右端，得

$$y(k)=4y(k-1)-3y(k-2)+f(k)$$

当 $k=2$ 时，将初始条件 $y(0)=0$，$y(1)=1$ 代入上式，得

$$y(2)=4y(1)-3y(0)+2^2=8$$

类似地，依次迭代可得

$$y(3)=4y(2)-3y(1)+2^3=37\text{，}\quad y(4)=4y(3)-3y(2)+2^4=140\text{，}\cdots$$

由上可见，用迭代法求解差分方程思路清晰、便于计算机求解，但通常无法得到解析解。

3.1.2 差分方程的经典解

一般情况下，若单输入/单输出 LTI 离散系统的激励为 $f(k)$、全响应为 $y(k)$，则描述该系统激励与响应之间关系的数学模型是 n 阶线性常系数差分方程，即

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_0f(k-m) \tag{3.1.9a}$$

或简记为

$$\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}y(k-j)=\sum_{i=0}^{m}b_{m-i}f(k-i) \tag{3.1.9b}$$

式中，$a_j\,(j=0,1,\cdots,n)$ 和 $b_i\,(i=0,1,\cdots,m)$ 均为常数，且 $a_n=1$。根据差分方程的求解理论可知，该差分方程的全解（全响应）由齐次解 $y_{\mathrm{h}}(k)$ 和特解 $y_{\mathrm{p}}(k)$ 两部分组成，即

$$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k) \tag{3.1.10}$$

1．齐次解

齐次解 $y_{\mathrm{h}}(k)$ 是齐次差分方程 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=0$ 的解。

$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ 称为差分方程的特征方程。

特征方程的 n 个根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 称为差分方程的特征根。表 3.1.1 所示为不同特征根所对应的齐次解，其中 C_i、D_i、A_i 和 θ_i 等均为待定系数。

表 3.1.1 不同特征根所对应的齐次解

特征根 λ	齐次解 $y_{\mathrm{h}}(k)$
单实根	$C\lambda^k$
r 重实根	$(C_{r-1}k^{r-1}+C_{r-2}k^{r-2}+\cdots+C_1k+C_0)\lambda^k$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=a\pm\mathrm{j}b=\rho\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\beta}$	$\rho^k[C\cos(\beta k)+D\sin(\beta k)]$ 或 $A\rho^k\cos(\beta k-\theta)$，其中 $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=C+\mathrm{j}D$
r 重共轭复根	$\rho^k[A_{r-1}k^{r-1}\cos(\beta k-\theta_{r-1})+A_{r-2}k^{r-2}\cos(\beta k-\theta_{r-2})+\cdots+A_0\cos(\beta k-\theta_0)]$

齐次差分方程 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0 y(k-n)=0$ 的解是其所有特征根对应齐次解的线性组合，如当特征根全部为单实根时

$$y_{\mathrm{h}}(k)=\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k$$

当特征根为 2 重实根时，$y_{\mathrm{h}}(k)=(C_1k+C_0)\lambda^k$；当 λ_1 为 r 重实根、其余 $n-r$ 个特征根为单实根时

$$y_{\mathrm{h}}(k)=\sum_{i=1}^{r}C_i k^{r-i}\lambda_1^k+\sum_{i=r+1}^{n}C_i\lambda_i^k$$

2．特解

特解 $y_{\mathrm{p}}(k)$ 的函数形式与激励函数的形式有关。表 3.1.2 所示为不同激励序列及其所对应的特解，其中 P_i、Q_i、A_i 和 θ_i 等均为待定系数。

表 3.1.2　不同激励序列及其所对应的特解

激励 $f(k)$	特解 $y_{\mathrm{p}}(k)$	
$\varepsilon(k)$	P	
k^m	$P_m k^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0$	所有特征根均不等于 1
	$k^r[P_m k^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0]$	有 r 重等于 1 的特征根
a^k	Pa^k	a 不等于特征根；
	$(P_1k+P_0)a^k$	a 等于特征单根；
	$(P_r k^r+P_{r-1}k^{r-1}+\cdots+P_1k+P_0)a^k$	a 等于 r 重特征根
$\cos(\beta k)$ 或 $\sin(\beta k)$	$P\cos(\beta k)+Q\sin(\beta k)$ 或 $A\cos(\beta k-\theta)$，其中 $A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=P+\mathrm{j}Q$	所有的特征根均不等于 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\beta}$

确定特解的形式之后，将它代回原始差分方程，可求出各待定系数，从而可求出特解 $y_{\mathrm{p}}(k)$。由 $y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)$ 可知，当特征根全部为单实根时

$$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)=\sum_{i=1}^{n}C_i\lambda_i^k+y_{\mathrm{p}}(k)$$

当特征根为 2 重实根时，$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)=(C_1k+C_0)\lambda^k+y_{\mathrm{p}}(k)$；当 λ_1 为 r 重实根、其余 $n-r$ 个特征根为单实根时

$$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)=\sum_{i=1}^{r}C_i k^{r-i}\lambda_1^k+\sum_{i=r+1}^{n}C_i\lambda_i^k+y_{\mathrm{p}}(k)$$

如果激励信号是在 $k=0$ 时刻接入系统的，那么差分方程的解适用于 $k\geqslant 0$ 的所有时刻。对于 n 阶差分方程，一般需要利用 n 个初始条件 $y(0),y(1),y(2),\cdots,y(n-1)$ 来求解这 n 个待定系数。例如，如果差分方程的特征根全部为单实根，则

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2+\cdots+C_n+y_{\mathrm{p}}(0)\\ y(1)=C_1\lambda_1+C_2\lambda_2+\cdots+C_n\lambda_n+y_{\mathrm{p}}(1)\\ \quad\vdots\\ y(n-1)=C_1\lambda_1^{n-1}+C_2\lambda_2^{n-1}+\cdots+C_n\lambda_n^{n-1}+y_{\mathrm{p}}(n-1)\end{cases} \tag{3.1.11}$$

求解以上方程组即可求得待定系数 $C_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$。

例 3.1.2 描述某离散系统的差分方程为

$$y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=f(k) \tag{3.1.12}$$

已知初始条件 $y(0)=2$，$y(1)=1$，激励 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求 $y(k)$。

解：（1）求齐次解：上述差分方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，为二重根，根据表 3.1.1 可知，齐次解 $y_{\mathrm{h}}(k)=\left(C_1k+C_0\right)(-1)^k$。

（2）求特解：根据表 3.1.2 可知，其特解 $y_{\mathrm{p}}(k)=P\times 2^k$，$k\geqslant 0$，将 $y_{\mathrm{p}}(k)$、$y_{\mathrm{p}}(k-1)$、$y_{\mathrm{p}}(k-2)$ 代入原方程式（3.1.12），可得 $P=\dfrac{4}{9}$，因此 $y_{\mathrm{p}}(k)=\dfrac{4}{9}\times 2^k$，$k\geqslant 0$。

（3）求差分方程的全解：$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)=\left(C_1k+C_0\right)(-1)^k+\dfrac{4}{9}\times 2^k$，$k\geqslant 0$，将已知的初始条件 $y(0)=2$、$y(1)=1$ 代入上式得

$$\begin{cases} y(0)=C_0+\dfrac{4}{9}=2 \\ y(1)=\left(C_1+C_0\right)(-1)+\dfrac{4}{9}\times 2=1 \end{cases}，求得\begin{cases} C_1=-\dfrac{5}{3} \\ C_0=\dfrac{14}{9} \end{cases}，因此全解$$

$$y(k)=\underbrace{\overbrace{\left(-\frac{5}{3}k+\frac{14}{9}\right)(-1)^k}^{\text{齐次解}}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\overbrace{\frac{4}{9}\times 2^k}^{\text{特解}}}_{\text{强迫响应}}，\ k\geqslant 0$$

差分方程的齐次解也被称为系统的自由响应，特解也被称为强迫响应。

例 3.1.3 描述某离散系统的差分方程为

$$6y(k)-5y(k-1)+y(k-2)=f(k) \tag{3.1.13}$$

已知初始条件 $y(0)=0$、$y(1)=1$，激励 $f(k)=10\cos(0.5\pi k)\varepsilon(k)$，求 $y(k)$。

解：（1）求齐次解：特征方程为 $6\lambda^2-5\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$，$\lambda_2=\dfrac{1}{3}$，都是单根，齐次解 $y_{\mathrm{h}}(k)=C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^k+C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^k$。

（2）求特解：根据表 3.1.2 可知，特解 $y_{\mathrm{p}}(k)=P\cos(0.5\pi k)+Q\sin(0.5\pi k)$，$k\geqslant 0$，得

$$y_{\mathrm{p}}(k-1)=P\cos\left[0.5\pi(k-1)\right]+Q\sin\left[0.5\pi(k-1)\right]=P\sin(0.5\pi k)-Q\cos(0.5\pi k)$$

$$y_{\mathrm{p}}(k-2)=P\cos\left[0.5\pi(k-2)\right]+Q\sin\left[0.5\pi(k-2)\right]=-P\cos(0.5\pi k)-Q\sin(0.5\pi k)$$

将 $y_{\mathrm{p}}(k)$、$y_{\mathrm{p}}(k-1)$、$y_{\mathrm{p}}(k-2)$ 代入原方程式（3.1.13）并整理，得

$$(5P+5Q)\cos(0.5\pi k)+(5Q-5P)\sin(0.5\pi k)=f(k)=10\cos(0.5\pi k)$$

由于该式对任何 $k\geqslant 0$ 均成立，因此等号两端的正、余弦序列的系数应相等，所以有

$$\begin{cases} 5P+5Q=10 \\ 5Q-5P=0 \end{cases}，求得 P=Q=1$$

特解为

$$y_{\mathrm{p}}(k)=\cos(0.5\pi k)+\sin(0.5\pi k)=\sqrt{2}\cos(0.5\pi k-0.25\pi)，\ k\geqslant 0$$

（3）求差分方程的全解：

$$y(k)=y_{\mathrm{h}}(k)+y_{\mathrm{p}}(k)=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^k+\sqrt{2}\cos(0.5\pi k-0.25\pi),\quad k\geqslant 0$$

将已知的初始条件 $y(0)=0$、$y(1)=1$ 代入上式得

$$\begin{cases}y(0)=C_1+C_2+1=0\\ y(1)=\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{1}{3}C_2+1=1\end{cases}，\text{求得}\begin{cases}C_1=2\\ C_2=-3\end{cases}$$

因此全解为

$$y(k)=\underbrace{\overbrace{2\left(\frac{1}{2}\right)^k-3\left(\frac{1}{3}\right)^k}^{\text{齐次解/自由响应}}}_{\text{暂态响应}}+\underbrace{\overbrace{\sqrt{2}\cos(0.5\pi k-0.25\pi)}^{\text{特解/强迫响应}}}_{\text{稳态响应}},\quad k\geqslant 0$$

由上式可知，由于本例中的特征根$|\lambda_{1,2}|<1$，因此其自由响应是衰减的。一般情况下，如果差分方程所有的特征根都满足$|\lambda_i|<1(i=1,2,\cdots,n)$，那么其自由响应随着 k 的增大会逐渐趋近于零，这样的系统称为稳定系统（见第 7 章），此时的自由响应也称为暂态响应。稳定系统在阶跃序列或有始周期序列的作用下，其强迫响应一般也称为稳态响应。

3.1.3 差分方程的双零解

与 LTI 连续系统类似，LTI 离散系统的全响应 $y(k)$ 也可分解为零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$ 和零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$ 之和（双零分解法）。

1．零输入响应

零输入响应是当激励为零时，仅由系统的初始状态所引起的响应。在零输入条件下，式（3.1.9）等号右端为零，差分方程转化为齐次方程，即

$$y_{\mathrm{zi}}(k)+a_{n-1}y_{\mathrm{zi}}(k-1)+\cdots+a_0y_{\mathrm{zi}}(k-n)=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}y_{\mathrm{zi}}(k-j)=0 \tag{3.1.14}$$

此时通过表 3.1.1 可确定 $y_{\mathrm{zi}}(k)$ 的形式。例如，若其 n 个特征根全部为单根，则其零输入响应

$$y_{\mathrm{zi}}(k)=\sum_{j=1}^{n}C_{\mathrm{zi}j}\lambda_j^{\,k} \tag{3.1.15}$$

式中，$C_{\mathrm{zi}j}$ 为待定系数，它们由初始条件 $y_{\mathrm{zi}}(0),y_{\mathrm{zi}}(1),\cdots,y_{\mathrm{zi}}(n-1)$ 确定。

一般而言，激励都是在 $k=0$ 时刻接入的，因此通常用 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-n)$ 描述系统的初始状态。而在 $k<0$ 时，由于激励还没有接入系统，因此

$$y_{\mathrm{zs}}(-1)=y_{\mathrm{zs}}(-2)=\cdots=y_{\mathrm{zs}}(-n)=0 \tag{3.1.16}$$

所以

$$\begin{cases}y_{\mathrm{zi}}(-1)=y(-1)-y_{\mathrm{zs}}(-1)=y(-1)\\ y_{\mathrm{zi}}(-2)=y(-2)-y_{\mathrm{zs}}(-2)=y(-2)\\ \qquad\vdots\\ y_{\mathrm{zi}}(-n)=y(-n)-y_{\mathrm{zs}}(-n)=y(-n)\end{cases} \tag{3.1.17}$$

已知初始状态 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-n)$ 的值，通过式（3.1.17）可求得 $y_{\mathrm{zi}}(-1),y_{\mathrm{zi}}(-2),\cdots,y_{\mathrm{zi}}(-n)$ 的值。由式（3.1.14）可得

$$y_{\mathrm{zi}}(k)=-a_{n-1}y_{\mathrm{zi}}(k-1)-\cdots-a_0y_{\mathrm{zi}}(k-n) \tag{3.1.18}$$

式中，令 $k=0$，并将 $y_{\mathrm{zi}}(-1),y_{\mathrm{zi}}(-2),\cdots,y_{\mathrm{zi}}(-n)$ 的值代入，可得 $y_{\mathrm{zi}}(0)$；依次递推可得 $y_{\mathrm{zi}}(1),\cdots,y_{\mathrm{zi}}(n-1)$ 的值。有了这些初始值，就可求得式（3.1.15）中的待定系数 $C_{\mathrm{zi}j}$，从而求得系统的零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$。

例 3.1.4 描述某离散系统的差分方程为

$$y(k)+5y(k-1)+4y(k-2)=f(k) \tag{3.1.19}$$

已知 $f(k)=0$，$k<0$，初始条件 $y(-1)=0$，$y(-2)=0.25$，求系统的零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$。

解：根据定义，系统的零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$ 应满足

$$y_{\mathrm{zi}}(k)+5y_{\mathrm{zi}}(k-1)+4y_{\mathrm{zi}}(k-2)=0 \tag{3.1.20}$$

其初始状态为 $y_{\mathrm{zi}}(-1)=y(-1)=0$，$y_{\mathrm{zi}}(-2)=y(-2)=0.25$

式（3.1.20）的特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+4=0$，特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-4$，都是单根，故

$$y_{\mathrm{zi}}(k)=C_{\mathrm{zi}1}(-1)^k+C_{\mathrm{zi}2}(-4)^k \tag{3.1.21}$$

式（3.1.20）可变形为 $y_{\mathrm{zi}}(k)=-5y_{\mathrm{zi}}(k-1)-4y_{\mathrm{zi}}(k-2)$，令 $k=0,1$，并将 $y_{\mathrm{zi}}(-1)=0$，$y_{\mathrm{zi}}(-2)=0.25$ 代入，得

$$\begin{cases} y_{\mathrm{zi}}(0)=-5y_{\mathrm{zi}}(-1)-4y_{\mathrm{zi}}(-2)=-1 \\ y_{\mathrm{zi}}(1)=-5y_{\mathrm{zi}}(0)-4y_{\mathrm{zi}}(-1)=5 \end{cases}$$

将以上初始值代入式（3.1.21）可得

$$\begin{cases} y_{\mathrm{zi}}(0)=C_{\mathrm{zi}1}+C_{\mathrm{zi}2}=-1 \\ y_{\mathrm{zi}}(1)=-C_{\mathrm{zi}1}-4C_{\mathrm{zi}2}=5 \end{cases}，求得 C_{\mathrm{zi}1}=\frac{1}{3}，C_{\mathrm{zi}2}=-\frac{4}{3}$$

所以系统的零输入响应为

$$y_{\mathrm{zi}}(k)=\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{4}{3}(-4)^k，k\geqslant 0$$

特别注意：式（3.1.21）满足齐次差分方程式（3.1.20），而初始值 $y_{\mathrm{zi}}(0)$、$y_{\mathrm{zi}}(1)$ 也是通过式（3.1.20）递推出来的，因此直接使用 $y_{\mathrm{zi}}(-1)$、$y_{\mathrm{zi}}(-2)$ 的值来求解待定系数 $C_{\mathrm{zi}1}$、$C_{\mathrm{zi}2}$ 也是可以的，即令式（3.1.21）中的 $k=-1$、-2，有

$$\begin{cases} y_{\mathrm{zi}}(-1)=C_{\mathrm{zi}1}(-1)^{-1}+C_{\mathrm{zi}2}(-4)^{-1}=0 \\ y_{\mathrm{zi}}(-2)=C_{\mathrm{zi}1}(-1)^{-2}+C_{\mathrm{zi}2}(-4)^{-2}=0.25 \end{cases}，同样可求得 C_{\mathrm{zi}1}=\frac{1}{3}，C_{\mathrm{zi}2}=-\frac{4}{3}$$

与先递推再求解的结果是一样的。以上方法省去了递推过程，计算更加简洁。

2．零状态响应

零状态响应是指初始状态为零时，仅由激励信号 $f(k)$ 所引起的响应。在零状态情况下，式（3.1.9）仍然是非齐次方程，其初始状态为零，即零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$ 满足式（3.1.16）和

$$y_{\mathrm{zs}}(k)+a_{n-1}y_{\mathrm{zs}}(k-1)+\cdots+a_0y_{\mathrm{zs}}(k-n)=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_0f(k-m) \tag{3.1.22a}$$

或简写为

$$\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} y_{\mathrm{zs}}(k-j) = \sum_{i=0}^{m} b_{m-i} f(k-i) \tag{3.1.22b}$$

通过表 3.1.1 可确定齐次解部分 $y_{\mathrm{zsh}}(k)$ 的形式，通过表 3.1.2 可确定特解部分 $y_{\mathrm{p}}(k)$ 的形式并求出特解。例如，若其 n 个特征根全部为单根，则其为零状态响应。

$$y_{\mathrm{zs}}(k) = y_{\mathrm{zsh}}(k) + y_{\mathrm{p}}(k) = \sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{zs}j} \lambda_j^k + y_{\mathrm{p}}(k) \tag{3.1.23}$$

式中，$C_{\mathrm{zs}j}$ 为待定系数，它们由初始条件 $y_{\mathrm{zs}}(0), y_{\mathrm{zs}}(1), \cdots, y_{\mathrm{zs}}(n-1)$ 确定。

由式（3.1.22a）可得

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{zs}}(k) = &-a_{n-1} y_{\mathrm{zs}}(k-1) - \cdots - a_0 y_{\mathrm{zs}}(k-n) + \\ &b_m f(k) + b_{m-1} f(k-1) + \cdots b_0 f(k-m) \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

式中，令 $k=0$，并将 $y_{\mathrm{zs}}(-1) = y_{\mathrm{zs}}(-2) = \cdots = y_{\mathrm{zs}}(-n) = 0$ 和 $f(k)$ 代入，依次递推可得 $y_{\mathrm{zs}}(0), y_{\mathrm{zs}}(1), \cdots, y_{\mathrm{zs}}(n-1)$ 的值。有了这些初始值，就可求得式（3.1.23）中的待定系数 $C_{\mathrm{zs}j}$，从而求得系统的零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$。

例 3.1.5　描述某离散系统的差分方程为

$$y(k) + 5y(k-1) + 4y(k-2) = f(k) \tag{3.1.25}$$

已知 $f(k) = 2^k \varepsilon(k)$，求系统的零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$。

解：根据定义，系统的零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$ 应满足

$$\begin{cases} y_{\mathrm{zs}}(k) + 5y_{\mathrm{zs}}(k-1) + 4y_{\mathrm{zs}}(k-2) = f(k) \\ y_{\mathrm{zs}}(-1) = y_{\mathrm{zs}}(-2) = 0 \end{cases} \tag{3.1.26}$$

首先求初始值 $y_{\mathrm{zs}}(0)$、$y_{\mathrm{zs}}(1)$，由式（3.1.26）可知

$$y_{\mathrm{zs}}(k) = -5y_{\mathrm{zs}}(k-1) - 4y_{\mathrm{zs}}(k-2) + f(k)$$

令 $k = 0,1$，并将 $y_{\mathrm{zs}}(-1) = y_{\mathrm{zs}}(-2) = 0$ 和 $f(0)$、$f(1)$ 代入，得

$$\begin{cases} y_{\mathrm{zs}}(0) = -5y_{\mathrm{zs}}(-1) - 4y_{\mathrm{zs}}(-2) + f(0) = 1 \\ y_{\mathrm{zs}}(1) = -5y_{\mathrm{zs}}(0) - 4y_{\mathrm{zs}}(-1) + f(1) = -3 \end{cases} \tag{3.1.27}$$

式（3.1.26）为非齐次差分方程，其特征根 $\lambda_1 = -1$、$\lambda_2 = -4$，都是单根，此外不难根据表 3.1.2 求得其特解 $y_{\mathrm{p}}(k) = \frac{2}{9} \times 2^k$，故其零状态响应为

$$y_{\mathrm{zs}}(k) = C_{\mathrm{zs1}}(-1)^k + C_{\mathrm{zs2}}(-4)^k + \frac{2}{9} \times 2^k \tag{3.1.28}$$

将式（3.1.27）的初始值代入式（3.1.28）可得

$$\begin{cases} y_{\mathrm{zs}}(0) = C_{\mathrm{zs1}} + C_{\mathrm{zs2}} + \dfrac{2}{9} = 1 \\ y_{\mathrm{zs}}(1) = -C_{\mathrm{zs1}} - 4C_{\mathrm{zs2}} + \dfrac{4}{9} = -3 \end{cases}，可求得 C_{\mathrm{zs1}} = -\frac{1}{9}，C_{\mathrm{zs2}} = \frac{8}{9}$$

所以系统的零状态响应为

$$y_{\mathrm{zs}}(k) = -\frac{1}{9}(-1)^k + \frac{8}{9}(-4)^k + \frac{2}{9} \times 2^k，k \geqslant 0$$

由于是零状态响应，当 $k<0$ 时，$y_{\mathrm{zs}}(k) = 0$，因此有

$$y_{zs}(k)=\left[-\frac{1}{9}(-1)^k+\frac{8}{9}(-4)^k+\frac{2}{9}\times 2^k\right]\varepsilon(k)$$

3．双零分解法的初始值

双零分解法在求解 $y_{zs}(k)$ 中的待定系数 $C_{zsj}(j=1,2,\cdots,n)$ 时需要用到初始值 $y_{zs}(0),y_{zs}(1),\cdots,y_{zs}(n-1)$；在求解 $y_{zi}(k)$ 中的待定系数 $C_{zij}(j=1,2,\cdots,n)$ 时需要用到初始值 $y_{zi}(0),y_{zi}(1),\cdots,y_{zi}(n-1)$。

（1）应用式（3.1.24），令 $k=0$，并将 $y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=\cdots=y_{zs}(-n)=0$ 和 $f(k)$ 代入，依次递推可得 $y_{zs}(0),y_{zs}(1),\cdots,y_{zs}(n-1)$。有了这些初始值，就可求得待定系数 C_{zsj}，从而求得系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$（见例 3.1.5）。

（2）在 $y_{zi}(k)$ 的实际求解过程中，初始条件一般由以下两种情形之一给出。

情形 1：如果已知的初始条件是 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-n)$ 的值（见例 3.1.4），由式（3.1.16）$y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=\cdots=y_{zs}(-n)=0$，可得式（3.1.17）。应用式（3.1.18），令 $k=0$，并将 $y_{zi}(-1),y_{zi}(-2),\cdots,y_{zi}(-n)$ 代入，依次递推可得 $y_{zi}(0),y_{zi}(1),\cdots,y_{zi}(n-1)$。有了这些初始值，就可求得待定系数 C_{zij}，从而求得系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$。当然直接将式（3.1.17）求得的值 $y_{zi}(-1),y_{zi}(-2),\cdots,y_{zi}(-n)$ 代入式（3.1.15），也能求得待定系数 C_{zij}（见例 3.1.4）。

情形 2：如果已知的初始条件是 $y(0),y(1),\cdots,y(n-1)$ 的值，此时需要先根据第（1）步求 $y_{zs}(0),y_{zs}(1),\cdots,y_{zs}(n-1)$ 的值，然后根据

$$\begin{cases}y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)\\ y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)\\ \quad\vdots\\ y_{zi}(n-1)=y(n-1)-y_{zs}(n-1)\end{cases}\tag{3.1.29}$$

求 $y_{zi}(0),y_{zi}(1),\cdots,y_{zi}(n-1)$ 的值，进而求待定系数 C_{zij} 和零输入响应 $y_{zi}(k)$。

3.1.4　系统的全响应

与 LTI 连续系统类似，一个初始状态不为零的 LTI 离散系统，在外加激励 $f(k)$ 的作用下，其全响应等于零输入响应与零状态响应之和，即

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)\tag{3.1.30a}$$

而 $y_{zs}(k)=y_{zsh}(k)+y_{p}(k)$，因此

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zsh}(k)+y_{p}(k)\tag{3.1.30b}$$

根据式（3.1.10a）和式（3.1.30b）可知，LTI 离散系统的全响应既可以分解为自由（固有）响应（齐次解）和强迫响应（特解），又可以分解为零输入响应和零状态响应，即

$$y(k)=y_{h}(k)+y_{p}(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)\tag{3.1.31a}$$

或

$$y(k)=y_{h}(k)+y_{p}(k)=y_{zi}(k)+y_{zsh}(k)+y_{p}(k)\tag{3.1.31b}$$

可见

$$y_{\mathrm{h}}(k)=y_{\mathrm{zi}}(k)+y_{\mathrm{zsh}}(k) \tag{3.1.32}$$

如果 LTI 离散系统特征方程的特征根全部为单根，则此时有

$$y(k)=\overbrace{\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_j\lambda_j^k}_{\text{自由响应}}}^{\text{齐次解}}+\overbrace{\underbrace{y_{\mathrm{p}}(k)}_{\text{强迫响应}}}^{\text{特解}}=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{\mathrm{z}ij}\lambda_j^k}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\overbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{\mathrm{zs}j}\lambda_j^k}^{\text{零状态响应的齐次解部分}}+\overbrace{y_{\mathrm{p}}(k)}^{\text{特解}}}_{\text{零状态响应}} \tag{3.1.33}$$

式（3.1.33）中有

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_j\lambda_j^k}_{\text{自由响应}}=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{\mathrm{z}ij}\lambda_j^k}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}C_{\mathrm{zs}j}\lambda_j^k}_{\text{零状态响应的齐次解部分}} \tag{3.1.34}$$

式（3.1.34）中有

$$C_j=C_{\mathrm{z}ij}+C_{\mathrm{zs}j}\;(j=1,2,\cdots,n)$$

根据前面的分析发现，以上两种分解方式存在明显的区别。虽然自由响应和零输入响应都是齐次方程的解，但二者的系数并不相同。

例 3.1.6　描述某 LTI 离散系统的差分方程为

$$y(k)+2y(k-1)+y(k-2)=f(k) \tag{3.1.35}$$

已知初始条件 $y(0)=2$，$y(1)=1$，激励 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求 $y_{\mathrm{zi}}(k)$、$y_{\mathrm{zs}}(k)$ 和 $y(k)$。

解：差分方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，为二重根。

（1）先求系统的零状态响应 $y_{\mathrm{zs}}(k)$，显然 $y_{\mathrm{zs}}(k)$ 满足以下差分方程和初始条件。

$$\begin{cases}y_{\mathrm{zs}}(k)+2y_{\mathrm{zs}}(k-1)+y_{\mathrm{zs}}(k-2)=f(k)\\ y_{\mathrm{zs}}(-1)=y_{\mathrm{zs}}(-2)=0\end{cases}$$

由 $y_{\mathrm{zs}}(k)=-2y_{\mathrm{zs}}(k-1)-y_{\mathrm{zs}}(k-2)+f(k)$ 递推得 $y_{\mathrm{zs}}(0)=1$，$y_{\mathrm{zs}}(1)=0$。

不难求得特解 $y_{\mathrm{p}}(k)=\dfrac{4}{9}\times 2^k$，$k\geqslant 0$，所以

$$y_{\mathrm{zs}}(k)=(C_{\mathrm{zs1}}k+C_{\mathrm{zs0}})(-1)^k+\frac{4}{9}\times 2^k,\ k\geqslant 0$$

将 $y_{\mathrm{zs}}(0)=1$，$y_{\mathrm{zs}}(1)=0$ 代入得

$$\begin{cases}y_{\mathrm{zs}}(0)=(C_{\mathrm{zs1}}\times 0+C_{\mathrm{zs0}})(-1)^0+\dfrac{4}{9}\times 2^0=1\\ y_{\mathrm{zs}}(1)=(C_{\mathrm{zs1}}\times 1+C_{\mathrm{zs0}})(-1)^1+\dfrac{4}{9}\times 2^1=0\end{cases}$$，求得 $C_{\mathrm{zs0}}=\dfrac{5}{9}$，$C_{\mathrm{zs1}}=\dfrac{1}{3}$，所以

$$y_{\mathrm{zs}}(k)=\left(\frac{1}{3}k+\frac{5}{9}\right)(-1)^k+\frac{4}{9}\times 2^k,\ k\geqslant 0$$

（2）再求系统的零输入响应 $y_{\mathrm{zi}}(k)$，显然 $y_{\mathrm{zi}}(k)$ 满足以下差分方程和初始条件。

$$\begin{cases}y_{\mathrm{zi}}(k)+2y_{\mathrm{zi}}(k-1)+y_{\mathrm{zi}}(k-2)=0\\ y_{\mathrm{zi}}(0)=y(0)-y_{\mathrm{zs}}(0)=2-1=1\\ y_{\mathrm{zi}}(1)=y(1)-y_{\mathrm{zs}}(1)=1-0=1\end{cases}$$

根据表（3.1.1）可知

$$y_{\mathrm{zi}}(k)=(C_{\mathrm{zi1}}k+C_{\mathrm{zi0}})(-1)^k,\ k\geqslant 0$$

将 $y_{zi}(0)=1$，$y_{zi}(1)=1$ 代入得

$$\begin{cases} y_{zi}(0)=(C_{zi1}\times 0+C_{zi0})(-1)^0=1 \\ y_{zi}(1)=(C_{zi1}\times 1+C_{zi0})(-1)^1=1 \end{cases}$$，求得 $C_{zi0}=1$，$C_{zi1}=-2$，所以

$$y_{zi}(k)=(-2k+1)(-1)^k，k\geqslant 0$$

（3）最后求系统的全响应 $y(k)$。

$$y(k)=y_{zi}(k)+y_{zs}(k)=\left(-\frac{5}{3}k+\frac{14}{9}\right)(-1)^k+\frac{4}{9}\times 2^k，k\geqslant 0$$

与例 3.1.2 的结果一致。

通过上述例题可知，双零分解法具有以下优缺点。优点为：①物理意义明确；②当激励发生变化时，零输入响应无须重新计算。缺点为：①零状态响应的计算相对烦琐；②当系统的激励形式复杂时，零状态响应中的特解不容易确定。

3.1.5 线性与时不变性的应用

与 LTI 连续系统类似，在激励 $f(k)$ 的作用下，实际中要分析的 LTI 离散系统通常是以下两种情况之一，其一是系统的差分方程右端仅含有 $f(k)$，其二是差分方程右端含有 $f(k)$ 及其各次移位。利用 LTI 系统零状态响应的线性和时不变性，可以把第二种情况先转换成第一种情况进行分析和求解，再求第二种情况的结果，具体思路和方法如下。

假定描述某 LTI 离散系统的常系数线性差分方程为式（3.1.9），为了求该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$，可以先求差分方程

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}y(k-j)=f(k) \tag{3.1.36}$$

的零状态响应 $y_{zs1}(k)$，再通过

$$\begin{aligned} y_{zs}(k)&=b_my_{zs1}(k)+b_{m-1}y_{zs1}(k-1)+\cdots+b_0y_{zs1}(k-m) \\ &=\sum_{i=0}^{m}b_{m-i}y_{zs1}(k-i) \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

来计算 $y_{zs}(k)$。

例 3.1.7 描述某离散系统的差分方程为

$$y(k)+5y(k-1)+4y(k-2)=2f(k)-f(k-1) \tag{3.1.38}$$

已知 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，求系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

解：根据例 3.1.5 可知，对于满足差分方程 $y(k)+5y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$ 的离散系统而言，当 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$ 时，其零状态响应为

$$y_{zs1}(k)=\left[-\frac{1}{9}(-1)^k+\frac{8}{9}(-4)^k+\frac{2}{9}\times 2^k\right]\varepsilon(k)$$

因此

$$
\begin{aligned}
y_{zs}(k) &= 2y_{zs1}(k) - y_{zs1}(k-1) \\
&= 2\left[-\frac{1}{9}(-1)^k + \frac{8}{9}(-4)^k + \frac{2}{9}\times 2^k\right]\varepsilon(k) - \\
&\quad \left[-\frac{1}{9}(-1)^{k-1} + \frac{8}{9}(-4)^{k-1} + \frac{2}{9}\times 2^{k-1}\right]\varepsilon(k-1)
\end{aligned}
$$

本节的分析都是以后向差分方程为例来进行的，如果描述系统的是前向差分方程，则其求解方法与之相同。需要注意的是，要根据已知条件认真仔细、正确无误地确定初始值 $y_{zi}(j)$ 和 $y_{zs}(j)(j=0,1,\cdots,n-1)$，当然也可以先将前向差分方程转换为后向差分方程，再求解。

知识点视频：差分和差分方程的定义

知识点视频：线性常系数差分方程的经典解法

知识点视频：线性常系数差分方程的双零响应法

3.2　单位序列响应与单位阶跃响应

3.2.1　单位序列和单位阶跃序列

1．单位（冲激）序列的定义

单位序列的定义为

$$
\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} \tag{3.2.1}
$$

它只在 $k=0$ 处取值为 1，而在其余各点都取值为 0，如图 3.2.1（a）所示。单位序列也被称为单位样值序列、单位取样序列或单位冲激序列，一般简称为单位序列。它是离散系统分析中最简单，也最重要的序列之一。它在离散时间系统中的作用，相当于 $\delta(t)$ 在连续时间系统中的作用。需要重点强调的是，作为连续时间信号的 $\delta(t)$ 可以理解为脉宽趋近于零、幅度趋近于无穷大，而积分值为 1 的信号（参见 $\delta(t)$ 的狄拉克定义），或者由广义函数定义；而离散时间信号 $\delta(k)$，其幅度在 $k=0$ 时为有限值 1。

若将 $\delta(k)$ 平移 i 个单位，如图 3.2.1（b）所示（图中的 $i>0$），则可得

$$
\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases} \tag{3.2.2}
$$

由于 $\delta(k-i)$ 只在 $k=i$ 处取值为 1，而在其余各点都取值为 0，因此

$$
f(k)\delta(k-i) = f(i)\delta(k-i) \tag{3.2.3}
$$

式（3.2.3）也被称为 $\delta(k)$ 的取样性质。

2．单位阶跃序列的定义

单位阶跃序列的定义为

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & k<0\\1, & k\geqslant 0\end{cases} \tag{3.2.4}$$

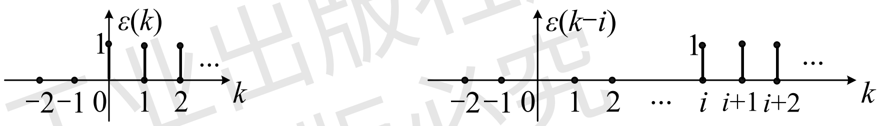
它在 $k<0$ 的各点处都为 0，在 $k\geqslant 0$ 的各点处都为 1，如图 3.2.2（a）所示。单位阶跃序列也是离散系统分析中最重要的序列之一。它在离散时间系统中的作用，相当于 $\varepsilon(t)$ 在连续时间系统中的作用。需要重点强调的是，$\varepsilon(t)$ 在 $t=0$ 处会发生跳变，在此点处一般不定义；而单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 在 $k=0$ 处定义为 1。

（a） $\delta(k)$　　（b） $\delta(k-i)$

图 3.2.1　$\delta(k)$ 与 $\delta(k-i)$ 的信号波形

同样地，如果将 $\varepsilon(k)$ 平移 i 个单位，如图 3.2.2（b）所示（图中的 $i>0$），则可得

$$\varepsilon(k-i)=\begin{cases}0, & k<i\\1, & k\geqslant i\end{cases} \tag{3.2.5}$$



（a） $\varepsilon(k)$　　（b） $\varepsilon(k-i)$

图 3.2.2　$\varepsilon(k)$ 与 $\varepsilon(k-i)$ 的信号波形

3．单位序列与单位阶跃序列之间的关系

不难看出，单位序列 $\delta(k)$ 与单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 之间的关系为

$$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)=\nabla\varepsilon(k) \tag{3.2.6a}$$

更一般的结论有

$$\delta(k-i)=\varepsilon(k-i)-\varepsilon(k-i-1)=\nabla\varepsilon(k-i) \tag{3.2.6b}$$

此外可推理得

$$\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}\delta(i)=\sum_{j=0}^{\infty}\delta(k-j) \tag{3.2.7}$$

4．单位序列与单位阶跃序列的应用

应用单位序列及其移位序列和单位阶跃序列及其移位序列，可简化其他序列的表示。例如，$f(k)=\begin{cases}2^k, & k\geqslant 2\\0, & k<2\end{cases}$ 可简化表示为 $f(k)=2^k\varepsilon(k-2)$。

$f(k)$ 的信号波形如图 3.2.3 所示，不难得出 $f(k)=\delta(k+1)+\delta(k)+\delta(k-1)$ 或 $f(k)=\varepsilon(k+1)-\varepsilon(k-2)$。

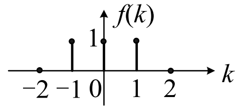


图 3.2.3　$f(k)$ 的信号波形

3.2.2　单位序列响应

1．单位序列响应的定义

对 LTI 离散系统而言，当其初始状态为零、输入为单位序列 $\delta(k)$ 时所引起的响应，称为该系统的单位序列响应（或单位样值响应、单位取样响应），一般用 $h(k)$ 表示。显然，单位序列响应的实质是激励信号为 $\delta(k)$ 时 LTI 系统的零状态响应，它的作用和地位与 LTI 连续系统的冲激响应 $h(t)$ 类似。

2．单位序列响应的求解

求解 LTI 离散系统单位序列响应的方法有差分方程求解法和 z 变换法（见第 6 章）。本章重点介绍单位序列响应的差分方程求解法。由于单位序列响应的实质是激励信号为 $\delta(k)$ 时 LTI 系统的零状态响应，因此 3.1 节中求解 LTI 离散系统零状态响应的思路和方法全部适用。

假定描述某 LTI 离散系统的常系数线性差分方程为式（3.1.9），其单位序列响应为 $h(k)$，即 $h(k)$ 满足初始条件 $h(-1)=h(-2)=\cdots=h(-n)=0$ 和差分方程

$$h(k)+a_{n-1}h(k-1)+\cdots+a_0h(k-n)=b_m\delta(k)+b_{m-1}\delta(k-1)+\cdots+b_0\delta(k-m) \quad (3.2.8)$$

若 $h_1(k)$ 是差分方程式（3.1.36）的单位序列响应，即 $h_1(k)$ 满足

$$\begin{cases} h_1(k)+a_{n-1}h_1(k-1)+\cdots+a_0h_1(k-n)=\delta(k) \\ h_1(-1)=h_1(-2)=\cdots=h_1(-n)=0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

则根据式（3.1.37）或 LTI 系统零状态响应的线性和时不变性，可得

$$h(k)=b_mh_1(k)+b_{m-1}h_1(k-1)+\cdots+b_0h_1(k-m)=\sum_{i=0}^{m}b_{m-i}h_1(k-i) \quad (3.2.10)$$

由于单位序列 $\delta(k)$ 仅在 $k=0$ 时等于 1，而在 $k>0$ 时为零，因此在 $k>0$ 时，对差分方程式（3.2.9）而言，其单位序列响应 $h_1(k)$ 与该系统零输入响应的函数形式相同。这样就把原来求系统单位序列响应的问题，转换为求差分方程齐次解的问题，此时通过表 3.1.1 可确定 $h_1(k)$ 的形式。由式（3.2.9）可知

$$h_1(k)=-a_{n-1}h_1(k-1)-\cdots-a_0h_1(k-n)+\delta(k) \quad (3.2.11)$$

式中，令 $k=0$，并将 $h_1(-1)=h_1(-2)=\cdots=h_1(-n)=0$ 代入，依次递推可得 $h_1(0),h_1(1),\cdots,h_1(n-1)$ 的初始值，其中 $h_1(0)=1$，$h_1(1)=-a_{n-1}$，$h_1(2)=a_{n-1}^2-a_{n-2},\cdots$，有了这些初始值，就可求 $h_1(k)$ 中的待定系数，即求得 $h_1(k)$，进而根据式（3.2.10）求 $h(k)$。

例 3.2.1　求图 3.2.4 所示离散系统的单位序列响应 $h(k)$。

解：（1）列写差分方程，求初始值。

根据图 3.2.4，左端加法器的输出为 $y(k)$，其后续两个延迟单元的输出分别为 $y(k-1)$ 和 $y(k-2)$。根据加法器的输入/输出关系可列出方程

$$y(k)=y(k-1)+2y(k-2)+f(k) \tag{3.2.12}$$

即该系统对应的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k) \tag{3.2.13}$$

根据单位序列响应 $h(k)$ 的定义，可知 $h(k)$ 满足

$$\begin{cases} h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k) \\ h(-1)=h(-2)=0 \end{cases} \tag{3.2.14}$$

令 $k=0,1$，根据 $h(k)=h(k-1)+2h(k-2)+\delta(k)$，$\delta(0)=1$，$\delta(1)=0$，可得

$$h(0)=1，\ h(1)=1$$

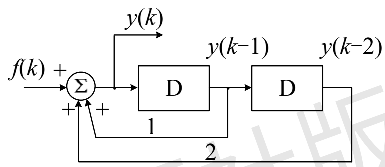


图 3.2.4　例 3.2.1 图

（2）求 $h(k)$。

当 $k>0$ 时，有

$$\begin{cases} h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=0 \\ h(0)=1，\ h(1)=1 \end{cases} \tag{3.2.15}$$

其特征方程为 $\lambda^2-\lambda-2=0$，特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，所以

$$h(k)=C_1(-1)^k+C_2(2)^k，\ k>0$$

令 k=0,1，并将初始值 $h(0)=1$，$h(1)=1$ 代入上式可得

$$\begin{cases} h(0)=C_1+C_2=1 \\ h(1)=-C_1+2C_2=1 \end{cases}，\text{可求得 } C_1=\frac{1}{3}，\ C_2=\frac{2}{3}$$

需要强调的是，以上已经将 $h(0)$ 代入，因此方程的解也满足 $k=0$。故系统的单位序列响应为

$$h(k)=\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k，\ k\geqslant 0$$

由于 $k<0$ 时，$h(k)=0$，因此 $h(k)$ 可写为

$$h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

例 3.2.2　求图 3.2.5 所示离散系统的单位序列响应 $h(k)$。

解：（1）列写差分方程。

根据图 3.2.5，设左端加法器的输出为 $x(k)$，其后续两个延迟单元的输出分别为 $x(k-1)$ 和 $x(k-2)$。由左端加法器的输入/输出关系可列出方程

$$x(k)=x(k-1)+2x(k-2)+f(k)$$

其可改写为

$$x(k)-x(k-1)-2x(k-2)=f(k) \tag{3.2.16}$$

由右端加法器的输入/输出关系可列出方程

$$y(k)=x(k)-x(k-2) \tag{3.2.17}$$

联立式（3.2.16）和式（3.2.17）消去中间变量$x(k)$，可得系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)-f(k-2) \tag{3.2.18}$$

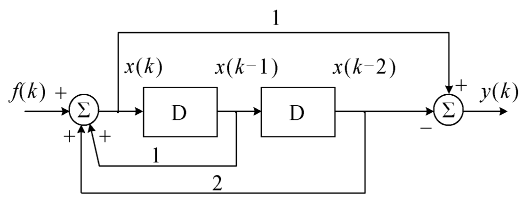


图 3.2.5　例 3.2.2 图

（2）求$h(k)$。

为了求$h(k)$，可以先构造一个简单的 LTI 离散系统，其差分方程的左端与式（3.2.18）的左端相同，右端仅含$f(k)$，即

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k) \tag{3.2.19}$$

可以发现，式（3.2.19）与例 3.2.1 中的式（3.2.13）完全相同。设该简单系统的单位序列响应为$h_1(k)$，由式（3.2.10）可知，$h(k)=h_1(k)-h_1(k-2)$。

而由例 3.2.1 的求解结果可知，$h_1(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$，所以

$$\begin{aligned}
h(k)&=h_1(k)-h_1(k-2)\\
&=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)-\left[\frac{1}{3}(-1)^{k-2}+\frac{2}{3}(2)^{k-2}\right]\varepsilon(k-2)\\
&=\begin{cases}0，k<0\\ \frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k，k=0,1\\ \frac{1}{2}(2)^k，k\geqslant 2\end{cases}
\end{aligned}$$

3.2.3　单位阶跃响应

1．单位阶跃响应的定义

对 LTI 离散系统而言，当其初始状态为零、输入为单位阶跃序列$\varepsilon(k)$时所引起的响应，称为系统的单位阶跃响应（或简称阶跃响应），一般用$g(k)$表示。也就是说，单位阶跃响应的实质是激励信号为$\varepsilon(k)$时 LTI 系统的零状态响应，它的作用和地位与 LTI 连续系统的阶跃响应$g(t)$类似。

2．单位阶跃响应的求解

由于单位阶跃响应的实质是激励信号为$\varepsilon(k)$时 LTI 系统的零状态响应，因此 3.1 节中求解 LTI 离散系统零状态响应的思路和方法全部适用。

假定描述某 LTI 离散系统的常系数线性差分方程为式（3.1.9），其单位阶跃响应为$g(k)$，即$g(k)$满足初始条件$g(-1)=g(-2)=\cdots=g(-n)=0$和差分方程

$$g(k)+a_{n-1}g(k-1)+\cdots+a_0g(k-n)=b_m\varepsilon(k)+b_{m-1}\varepsilon(k-1)+\cdots+b_0\varepsilon(k-m) \quad (3.2.20)$$

若$g_1(k)$是差分方程式（3.1.36）的单位阶跃响应，即$g_1(k)$满足

$$\begin{cases} g_1(k)+a_{n-1}g_1(k-1)+\cdots+a_0g_1(k-n)=\varepsilon(k) \\ g_1(-1)=g_1(-2)=\cdots=g_1(-n)=0 \end{cases} \quad (3.2.21)$$

则根据式（3.1.37）或 LTI 系统零状态响应的线性和时不变性，可得

$$g(k)=b_mg_1(k)+b_{m-1}g_1(k-1)+\cdots+b_0g_1(k-m)=\sum_{i=0}^{m}b_{m-i}g_1(k-i) \quad (3.2.22)$$

在零状态情况下，由于式（3.1.21）仍然是非齐次方程，因此其解应该由齐次解$g_{1\mathrm{h}}(k)$和特解$g_{1\mathrm{p}}(k)$两部分组成，即

$$g_1(k)=g_{1\mathrm{h}}(k)+g_{1\mathrm{p}}(k) \quad (3.2.23)$$

通过表 3.1.1 可确定齐次解$g_{1\mathrm{h}}(k)$的形式，通过表 3.1.2 可确定特解的形式并求得

$$g_{1\mathrm{p}}(k)=\left(\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\right)^{-1} \quad (3.2.24)$$

由式（3.2.21）可知

$$g_1(k)=-a_{n-1}g_1(k-1)-\cdots-a_0g_1(k-n)+\varepsilon(k) \quad (3.2.25)$$

式中，令$k=0$，并将$g_1(-1)=g_1(-2)=\cdots=g_1(-n)=0$，依次递推可得$g_1(0),g_1(1),\cdots,g_1(n-1)$。有了这些初始值，就可求得式（3.2.23）中$g_{1\mathrm{h}}(k)$的待定系数，即求得$g_1(k)$。特殊情况下，如果系统差分方程的$n$个特征根全部为单根，则

$$g_1(k)=\left[g_{1\mathrm{h}}(k)+g_{1\mathrm{p}}(k)\right]\varepsilon(k)=\left[\sum_{j=1}^{n}D_j\lambda_j^{\ k}+\left(\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\right)^{-1}\right]\varepsilon(k) \quad (3.2.26)$$

式中，D_j为待定系数，它们由前面求得的初始值$g_1(0),g_1(1),\cdots,g_1(n-1)$确定。有了$g_1(k)$，根据式（3.2.22）就可求得$g(k)$。

例 3.2.3　求例 3.2.1 中图 3.2.4 所示的离散系统的单位阶跃响应$g(k)$。

解：例 3.2.1 已经求得图 3.2.4 所示的离散系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$$

根据单位阶跃响应$g(k)$的定义，可知$g(k)$满足

$$\begin{cases} g(k)-g(k-1)-2g(k-2)=\varepsilon(k) \\ g(-1)=g(-2)=0 \end{cases} \quad (3.2.27)$$

其特征方程为$\lambda^2-\lambda-2=0$，特征根为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$；此外根据式（3.2.24）不难求得其特解为$-\dfrac{1}{2}$；因此可得$g(k)=C_1(-1)^k+C_2(2)^k-\dfrac{1}{2}$，$k\geqslant 0$。

令$k=0,1$，根据$g(k)=g(k-1)+2g(k-2)+\varepsilon(k)$，$\varepsilon(0)=1$，$\varepsilon(1)=1$，可得$g(0)=1$，$g(1)=2$。

将以上初始值代入联立可求得$C_1=\dfrac{1}{6}$，$C_2=\dfrac{4}{3}$，因此该系统的单位阶跃响应为

$$g(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k) \tag{3.2.28}$$

例 3.2.4　求例 3.2.2 中图 3.2.5 所示离散系统的单位阶跃响应$g(k)$。

解：例 3.2.2 已经求得图 3.2.5 所示离散系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)-f(k-2)$$

例 3.2.3 已经求得简单系统$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k)$的单位阶跃响应为

$$g_1(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

所以

$$\begin{aligned}g(k)&=g_1(k)-g_1(k-2)\\&=\left[\frac{1}{6}(-1)^k+\frac{4}{3}(2)^k-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)-\left[\frac{1}{6}(-1)^{k-2}+\frac{4}{3}(2)^{k-2}-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k-2)\\&=\begin{cases}0,\ k<0\\ \dfrac{1}{6}(-1)^k+\dfrac{4}{3}(2)^k-\dfrac{1}{2},\ k=0,1\\ (2)^k,\ k\geqslant 2\end{cases}\end{aligned}$$

3.2.4　单位阶跃响应与单位序列响应之间的关系

由式（3.2.7）中$\varepsilon(k)$与$\delta(k)$的关系，且根据 LTI 系统的线性和时不变性，可知同一 LTI 离散系统的单位阶跃响应$g(k)$与单位序列响应$h(k)$之间的关系为

$$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j) \tag{3.2.29}$$

同理，由$\delta(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)$可以得出

$$h(k)=g(k)-g(k-1)=\nabla g(k) \tag{3.2.30}$$

例 3.2.5　应用$g(k)$和$h(k)$之间的关系求解例 3.2.1 中图 3.2.4 所示离散系统的单位阶跃响应$g(k)$。

解：例 3.2.1 已经求得图 3.2.4 所示离散系统的单位序列响应为

$$h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

根据式（3.2.29）可得

$$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}h(i)=\sum_{i=-\infty}^{k}\left\{\left[\frac{1}{3}(-1)^{i}+\frac{2}{3}(2)^{i}\right]\varepsilon(i)\right\}=\sum_{i=0}^{k}\left\{\left[\frac{1}{3}(-1)^{i}+\frac{2}{3}(2)^{i}\right]\varepsilon(i)\right\}$$

$$=\left\{\sum_{i=0}^{k}\left[\frac{1}{3}(-1)^{i}+\frac{2}{3}(2)^{i}\right]\right\}\varepsilon(k)=\left[\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}+\frac{2}{3}\sum_{i=0}^{k}(2)^{i}\right]\varepsilon(k)$$

由数学中的几何级数（等比数列）求和公式可得

$$\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}=\frac{1-(-1)^{k+1}}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{k}\right]$$

$$\sum_{i=0}^{k}(2)^{i}=\frac{1-(2)^{k+1}}{1-(2)}=(2)^{k+1}-1$$

所以

$$g(k)=\left\{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{k}\right]+\frac{2}{3}\times\left[(2)^{k+1}-1\right]\right\}\varepsilon(k)=\left[\frac{1}{6}(-1)^{k}+\frac{4}{3}(2)^{k}-\frac{1}{2}\right]\varepsilon(k)$$

结果与例 3.2.3 中的式（3.2.28）相同。同理可以根据例 3.2.2 中求得的结果 $h(k)$，来计算例 3.2.4 中的结果 $g(k)$，读者可以自行计算和验证。

特别注意：回顾 LTI 离散系统单位序列响应和单位阶跃响应的定义和求解过程可以发现，当系统的内部结构确定之后，系统的差分方程也就确定了。此时如果要求该系统的单位序列响应或单位阶跃响应，其实质就是求该系统输入为 $\delta(k)$ 或 $\varepsilon(k)$ 时的零状态响应，显然求得的结果仅与差分方程自身有关，也就是仅与系统的内部结构有关，而与系统的激励无关。因此，当 LTI 离散系统的内部结构确定之后，其单位序列响应 $h(k)$ 和单位阶跃响应 $g(k)$ 也就唯一确定了，可见 LTI 离散系统的单位序列响应 $h(k)$ 和单位阶跃响应 $g(k)$ 都是对离散系统时域特性的反映。一些常用的数列求和公式列在附录 C 中，以备查阅。

知识点视频：离散系统的单位序列响应和单位阶跃响应

3.3 零状态响应与卷积和

卷积和（简称“卷积”）在 LTI 离散系统的时域分析方法中具有非常重要的地位，卷积和在 LTI 离散系统分析中的作用，与连续系统中卷积积分的作用相同。本节要讨论的问题是先将激励信号分解为众多单位序列之和，然后利用单位序列响应和 LTI 离散系统的 LTI 性质，求解 LTI 离散系统在任意激励作用下的零状态响应。

3.3.1 卷积和的数学定义

一般情况下，若有两个序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$，则二者卷积和 $f(k)$ 的数学定义式为

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i) \tag{3.3.1a}$$

后续 3.4 节中还会证明：

$$
\begin{aligned}
f(k) &= f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i) = f_2(k) * f_1(k) \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_2(i) f_1(k-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_1(k-i) f_2(i)
\end{aligned} \tag{3.3.1b}
$$

根据以上数学定义可知：

（1）若 $f_1(k)$ 为因果序列，则 $f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{\infty} f_1(i) f_2(k-i)$。

（2）若 $f_2(k)$ 为因果序列，则 $f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$。

（3）若 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 都为因果序列，则 $f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \sum_{i=0}^{k} f_1(i) f_2(k-i)$，其隐含要求 $k \geqslant 0$。

3.3.2　任意激励下的零状态响应

设某 LTI 离散系统的单位序列响应为 $h(k)$，即该系统激励信号为 $\delta(k)$ 时的零状态响应为 $h(k)$，设该系统在任意激励信号 $f(k)$ 作用下的零状态响应为 $y_{zs}(k)$。

一方面，对于图 3.3.1 所示的任意序列 $f(k)$ 的分解而言，不难得出序列 $f(k)$ 可用 $\delta(k)$ 及其移位序列线性组合表示为

$$
\begin{aligned}
f(k) &= \cdots + f(-2)\delta(k+2) + f(-1)\delta(k+1) + f(0)\delta(k) + f(1)\delta(k-1) + \\
&\quad f(2)\delta(k-2) + \cdots \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i)
\end{aligned} \tag{3.3.2a}
$$

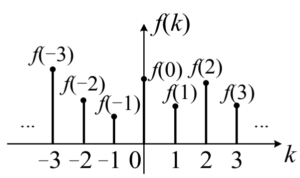


图 3.3.1　任意序列 $f(k)$ 的分解

根据卷积和的数学定义式（3.3.1）不难得出

$$
f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) = f(k) * \delta(k) = \delta(k) * f(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(i) f(k-i) \tag{3.3.2b}
$$

式（3.3.2b）表明任意序列 $f(k)$ 与 $\delta(k)$ 的卷积和仍然是其自身。

另一方面，对该系统而言，根据系统的线性和时不变性可知：

（1）当激励信号为 $\delta(k-i)$ 时，其零状态响应为 $h(k-i)$。

（2）当激励信号为 $f(i)\delta(k-i)$ 时，其零状态响应为 $f(i)h(k-i)$。

（3）当激励信号为

$$
\sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)\delta(k-i) = f(k) * \delta(k) = \delta(k) * f(k) = f(k)
$$

时，其零状态响应为

$$y_{\mathrm{zs}}(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f(i)h(k-i)=f(k)*h(k)=h(k)*f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)f(k-i) \tag{3.3.3}$$

特别注意：式（3.3.3）表明对于单位序列响应为$h(k)$的 LTI 离散系统而言，任意激励信号$f(k)$作用下的零状态响应$y_{\mathrm{zs}}(k)$等于激励信号$f(k)$与单位序列响应$h(k)$的卷积和。显然式（3.3.3）提供了一种新的求解 LTI 离散系统零状态响应的思路和方法，可称之为卷积和法。

例 3.3.1 如果某 LTI 离散系统的单位序列响应为$h(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$，求激励信号分别为$f_1(k)=1$和$f_2(k)=\varepsilon(k)$时系统的零状态响应$y_{\mathrm{zs1}}(k)$和$y_{\mathrm{zs2}}(k)$。

解：（1）求$y_{\mathrm{zs1}}(k)$，根据式（3.3.3）并考虑到$f_1(k-i)=1$可得

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{zs1}}(k)&=h(k)*f_1(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)f_1(k-i)\\&=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(0.5)^i\varepsilon(i)\cdot 1=\sum_{i=0}^{\infty}(0.5)^i\varepsilon(i)=\frac{1}{1-0.5}=2\end{aligned}$$

（2）求$y_{\mathrm{zs2}}(k)$，根据式（3.3.3）可得

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{zs2}}(k)&=h(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)f_2(k-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}(0.5)^i\varepsilon(i)\varepsilon(k-i)\\&=\begin{cases}\sum_{i=0}^{k}(0.5)^i\varepsilon(i), & k\geqslant 0\\0, & k<0\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-(0.5)^{k+1}}{1-0.5}, & k\geqslant 0\\0, & k<0\end{cases}=\begin{cases}2\left[1-(0.5)^{k+1}\right], & k\geqslant 0\\0, & k<0\end{cases}\\&=2\left[1-(0.5)^{k+1}\right]\varepsilon(k)\end{aligned}$$

例 3.3.2 如例 3.1.5 所示的 LTI 离散系统

$$y(k)+5y(k-1)+4y(k-2)=f(k)$$

求激励为$f(k)=2^k\varepsilon(k)$时系统的零状态响应$y_{\mathrm{zs}}(k)$。

解：（1）设该系统的单位序列响应为$h(k)$，显然$h(k)$满足

$$\begin{cases}h(k)+5h(k-1)+4h(k-2)=\delta(k)\\h(-1)=h(-2)=0\end{cases}$$

令$k=0,1$，根据$h(k)=-5h(k-1)-4h(k-2)+\delta(k)$，$\delta(0)=1$，$\delta(1)=0$，可得

$$h(0)=1,\quad h(1)=-5$$

当$k>0$时，有

$$\begin{cases}h(k)+5h(k-1)+4h(k-2)=0\\h(0)=1,\ h(1)=-5\end{cases}$$

其特征根$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-4$，都是单根，因此

$$h(k)=C_1(-1)^k+C_2(-4)^k,\quad k>0$$

将初始值$h(0)=1$，$h(1)=-5$代入上式，得

$$\begin{cases}h(0)=C_1+C_2=1\\h(1)=-C_1-4C_2=-5\end{cases}，求得\ C_1=-\frac{1}{3},\ C_2=\frac{4}{3}$$

需要强调的是，以上已经将$h(0)$代入，因此方程的解也满足$k=0$。故系统的单位序列响应

$$h(k)=-\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{4}{3}(-4)^k,\ k\geqslant 0$$

由于 $k<0$ 时，$h(k)=0$，因此最终 $h(k)$ 可写为

$$h(k)=\left[-\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{4}{3}(-4)^k\right]\varepsilon(k)$$

（2）求 $y_{zs}(k)$，根据式（3.3.3）可得

$$y_{zs}(k)=h(k)*f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)\cdot f(k-i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left\{\left[-\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{4}{3}(-4)^i\right]\varepsilon(i)\cdot 2^{k-i}\varepsilon(k-i)\right\}$$

$$=\begin{cases}\sum_{i=0}^{k}\left[-\frac{1}{3}(-1)^i+\frac{4}{3}(-4)^i\right]\times 2^{k-i},\ k\geqslant 0\\ 0,\ k<0\end{cases}=\left[-\frac{1}{9}(-1)^k+\frac{8}{9}(-4)^k+\frac{2}{9}\cdot 2^k\right]\varepsilon(k)$$

结果与例 3.1.5 中所求的结果相同。

对比此前的经典法可以发现，卷积和法无须求解 LTI 离散系统的特解，适用范围广。当然，卷积和法需要事先知道或设法先求得系统的单位序列响应，再计算激励信号与单位序列响应的卷积和，后续会介绍几种常用的卷积和计算方法。

在应用卷积和求解任意激励信号作用下 LTI 系统的零状态响应时，系统单位序列响应 $h(k)$ 的求解是关键。当差分方程右端含有 $f(k)$ 及其移位序列时，可以先求简单系统的单位序列响应 $h_1(k)$，再利用差分方程的右端得到 $h(k)$，具体方法和过程见 3.2 节。在附录 B 中列出了常见序列的卷积和表，以备查阅。

3.3.3　单位序列响应的物理意义

由式（3.3.3）可知

$$y_{zs}(k)=h(k)*f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)f(k-i)$$

$$=\cdots+h(-2)f(k+2)+h(-1)f(k+1)+h(0)f(k)+h(1)f(k-1)+h(2)f(k-2)+\cdots$$

观察发现，$h(0)$ 是当前时刻输入值 $f(k)$ 的加权系数，$h(1)$ 是前一时刻输入值 $f(k-1)$ 的加权系数，$h(-1)$ 是后一时刻输入值 $f(k+1)$ 的加权系数，$h(i)$ 是 $f(k-i)$ 的加权系数，可见 $h(i)$ 的实质是不同时刻输入值对当前时刻零状态响应贡献的加权系数。

3.3.4　卷积和的计算方法

卷积和的常用计算方法有以下几种：定义法（解析法）、图解法、滑带法、性质法、列表法和不进位乘法，其中性质法的内容较多，将在 3.4 节中专门介绍。例 3.3.1 和例 3.3.2 都是使用的定义法，不再重复介绍，下面对图解法和滑带法进行简要说明。

1．图解法

图解法是根据卷积和的定义式，对序列的波形进行变换从而求解的方法。当已知序列 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的波形时，一般通过以下 4 步完成求解。

（1）换元，将 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的自变量 k 都换成 i，得到 $f_1(i)$ 和 $f_2(i)$，并画出二者的波形。

（2）反转，将 $f_2(i)$ 的波形以纵坐标为轴反转，得到 $f_2(-i)$，画出 $f_2(-i)$ 的波形。

（3）平移，将 $f_2(-i)$ 的波形沿横坐标（i 轴）平移 k，得到 $f_2\left[-(i-k)\right]=f_2(k-i)$ 的波形，其中 k 为 $f_2(-i)$ 的平移量。

（4）求和，将 $f_1(i)$ 和 $f_2(k-i)$ 相乘，得到 $f_1(i)f_2(k-i)$，乘积结果对自变量 i 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上进行累加求和，即计算累加和 $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$ 得到结果。

需要强调的是，第（4）步中，当 $f_2(-i)$ 的平移量 k 变化时，得到的 $f_1(i)f_2(k-i)$ 乘积结果的表达式可能不相同，因此需要根据 $f_1(i)$ 和 $f_2(-i)$ 的波形对 k 进行分区间讨论。

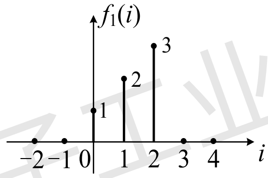
例 3.3.3 如有两个序列

$$f_1(k)=\begin{cases}k+1，& k=0,1,2\\0，& 其余\end{cases}，\quad f_2(k)=\begin{cases}1，& k=0,1,2,3\\0，& 其余\end{cases}$$

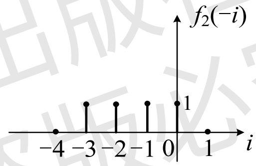
求二者的卷积和 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$。

解：（1）画出 $f_1(i)$ 和 $f_2(-i)$ 的波形，如图 3.3.2（a）和图 3.3.2（b）所示。

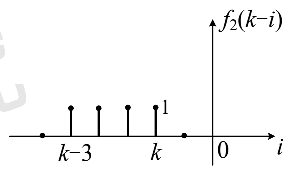
（2）在 i 轴上对 $f_2(-i)$ 平移 k 个时间单位，如图 3.3.2（c）所示。



（a） $f_1(i)$



（b） $f_2(-i)$



（c） $f_2(k-i)$

图 3.3.2　例 3.3.3 图

（3）按 k 取值的不同进行讨论，计算求和。

当 $k<0$ 时，可得 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=0$。

当 $k=0$ 时，可得 $f(0)=f_1(k)*f_2(k)=f_1(0)f_2(0)=1$。

当 $k=1$ 时，可得 $f(1)=f_1(0)f_2(1)+f_1(1)f_2(0)=3$。

后续依次可得 $f(2)=f_1(0)f_2(2)+f_1(1)f_2(1)+f_1(2)f_2(0)=6$，$f(3)=6$，$f(4)=5$，$f(5)=3$；当 $k\geqslant 6$ 时，$f(k)=0$。计算结果如图 3.3.3 所示。

若要求卷积和 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$ 在某时刻的值，如 $k=2$ 时 $f(2)$ 的值，则应用图解法一般比较方便快捷。

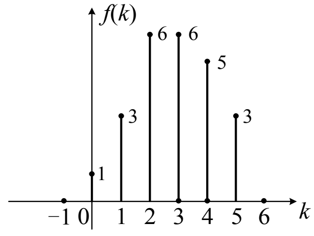


图 3.3.3　例 3.3.3 计算结果

2．滑带法

当序列较短或用图解法计算比较方便时，使用滑带法计算卷积和更加快捷，其实质与图解法相同，不同之处在于序列不是用横纵坐标波形来表示的，而是把序列的取值依次写出并整齐排列在纸带上，其计算过程与图解法基本相同。

例 3.3.3 的滑带法求解过程如图 3.3.4 所示。图中上、下两条从左到右的纸带分别表示序列 $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$，二者的零点位置上下对齐（阴影部分）。其中在图 3.3.4（c）～图 3.3.4（j）中，上方为固定带 $f_1(i)$，下方为滑动带 $f_2(k-i)$。最终的求解结果与图解法的求解结果一致。

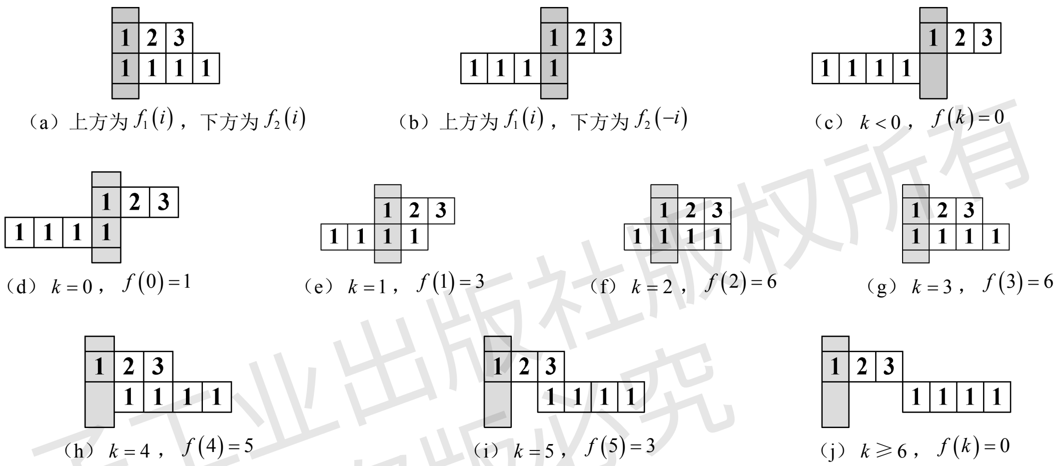


图 3.3.4　例 3.3.3 的滑带法求解过程

相关书籍对列表法和不进位乘法求卷积和有介绍，其实质与滑带法相同，有兴趣的读者可自行查阅。通过以上讨论不难发现，定义法和图解法适用范围广，其中定义法应用卷积和的数学定义通过数学解析、推理和运算直接得到结果；图解法通过序列波形变换（反转和平移）辅助求解，形象直观，可以比较方便地计算某时刻的卷积和；当序列较短时，合理使用列表法、滑带法或不进位乘法，一般能够快速计算出结果。

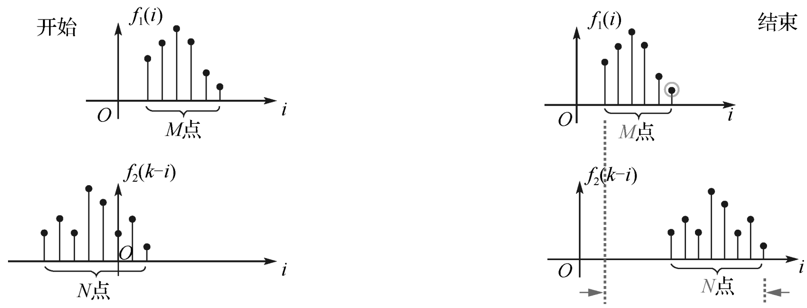
3.3.5　有限长序列的卷积和

有限长序列是指在时域有限区间 $[k_1,k_2]$ 内有非零取值，而在区间 $[k_1,k_2]$ 外均为零的序列，一般 k_2-k_1+1 的值被称为有限长序列的长度。

可以证明，如果 $f_1(k)$ 是长度为 M 的有限长序列，$f_2(k)$ 是长度为 N 的有限长序列，则二者的卷积和 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$ 是长度为 $M+N-1$ 的有限长序列。有限长序列的卷积和如图 3.3.5 所示。

通过观察可以发现，从 $f(k)$ 出现第一个非零点[见图 3.3.5（a）]，到出现最后一个非零点[见图 3.3.5（b）]，$f_2(k-i)$ 一共向右移动了 $M+N-1$ 个单位，因此 $f(k)$ 的长度正好是 $M+N-1$。由此可以看出，$f(k)$ 第一个非零点出现在 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 第一个非零点时刻之和处，$f(k)$ 最后一个非零点出现在 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 最后一个非零点时刻之和处，以上结论与 2.3

节中时限信号的卷积积分结果的特点相似。



（a）$f(k)$的非零点开始处　　（b）$f(k)$的非零点结束处

图 3.3.5　有限长序列的卷积和

知识点视频：卷积和的定义与解析法　　知识点视频：卷积和的图解法与列表法

3.4　卷积和的性质

卷积和与卷积积分类似，也有很多重要的性质，灵活应用这些性质可以大大简化运算过程、方便系统的分析。本节在讨论和分析卷积和时都认为其是存在的（收敛的）。

3.4.1　卷积和的代数性质

离散信号的卷积和运算符合如下所示的交换律、分配律和结合律等代数运算性质，相关结论读者可自行证明。

1．交换律

$$f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k) \tag{3.4.1}$$

2．分配律

$$f_1(k)*\left[f_2(k)+f_3(k)\right]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k) \tag{3.4.2}$$

分配律的物理含义及应用如下。

（1）假设 $f_1(k)$是某 LTI 离散系统的单位序列响应，$f_2(k)$和 $f_3(k)$是激励信号，那么式（3.4.2）表明多个输入信号之和的零状态响应等于每个激励的零状态响应之和。

（2）假设某 LTI 离散系统的单位序列响应为$h(k)$，且该系统由两条支路并联而成，设$f_2(k)=h_1(k)$是第 1 条支路的单位序列响应，$f_3(k)=h_2(k)$是第 2 条支路的单位序列响应，$f_1(k)=f(k)$是激励信号，显然该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$；根据式（3.4.2）有

$y_{zs}(k)=f(k)*h_1(k)+f(k)*h_2(k)=f(k)*\left[h_1(k)+h_2(k)\right]$，因此可以得到 $h(k)=h_1(k)+h_2(k)$，以上结果表明并联离散系统的单位序列响应等于各支路的单位序列响应之和，对应关系可用图 3.4.1 表示。推而广之，对多条支路并联组成的离散系统，以上结论同样成立，即并联离散系统的单位序列响应等于所有支路的单位序列响应之和。

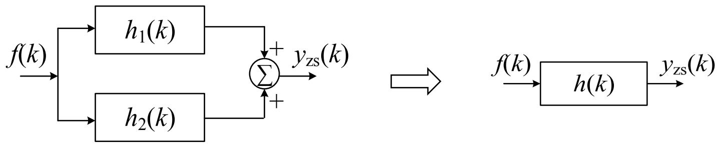


图 3.4.1　卷积和的分配律与并联系统

3．结合律

$$\left[f_1(k)*f_2(k)\right]*f_3(k)=f_1(k)*\left[f_2(k)*f_3(k)\right] \tag{3.4.3}$$

根据式（3.4.3），应用卷积运算的交换律，可得

$$\left[f_1(k)*f_2(k)\right]*f_3(k)=f_1(k)*\left[f_2(k)*f_3(k)\right]=\left[f_1(k)*f_3(k)\right]*f_2(k) \tag{3.4.4}$$

需要强调的是，结合律成立的前提条件是必须同时满足序列两两相卷积都是收敛的（存在的），否则不能使用交换律。

结合律的物理含义及应用：假设某 LTI 离散系统的单位序列响应为 $h(k)$，且该系统由两条支路级联（串联）而成，设 $f_2(k)=h_1(k)$ 是第 1 条支路的单位序列响应，$f_3(k)=h_2(k)$ 是第 2 条支路的单位序列响应，$f_1(k)=f(k)$ 是激励信号，显然该系统的零状态响应 $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$；根据式（3.4.3）有 $y_{zs}(k)=\left[f(k)*h_1(k)\right]*h_2(k)=f(k)*\left[h_1(k)*h_2(k)\right]$，因此可以得到 $h(k)=h_1(k)*h_2(k)=h_2(k)*h_1(k)$，以上结果表明级联（串联）离散系统的单位序列响应等于各支路的单位序列响应的卷积和，对应关系可用图 3.4.2 表示。推而广之，对多条支路串联组成的离散系统，以上结论同样成立，即串联离散系统的单位序列响应等于所有支路的单位序列响应的卷积和。

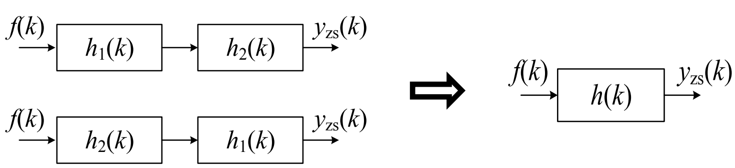


图 3.4.2　卷积和的结合律与级联系统

3.4.2　序列与单位序列的卷积和

应用卷积运算的交换律和单位序列的取样性质，可得

$$f(k)*\delta(k)=\delta(k)*f(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(i)f(k-i)=\delta(0)f(k-0)=f(k)$$

即

$$f(k)*\delta(k)=\delta(k)*f(k)=f(k) \tag{3.4.5}$$

式（3.4.5）表明，某序列与单位序列的卷积和就是它自身，其与 3.3 节中已经得出的结论式（3.3.2b）相同。根据式（3.4.5）显然可得

$$f(k-k_1)*\delta(k)=\delta(k)*f(k-k_1)=f(k-k_1) \tag{3.4.6}$$

式（3.4.5）是卷积运算的重要性质之一，推而广之可得

$$f(k)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1)*f(k)=\sum_{i=0}^{\infty}\left[\delta(i-k_1)f(k-i)\right]=f(k-k_1)$$

即

$$f(k)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1)*f(k)=f(k-k_1) \tag{3.4.7}$$

若设 $f(k)=\delta(k-k_2)$，则式（3.4.7）变为

$$\delta(k-k_2)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1)*\delta(k-k_2)=\delta(k-k_1-k_2) \tag{3.4.8}$$

还可证明

$$f(k-k_1)*\delta(k-k_2)=f(k-k_2)*\delta(k-k_1)=f(k-k_1-k_2) \tag{3.4.9}$$

此外，若设 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，则

$$f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f_1(k-k_2)*f_2(k-k_1)=f(k-k_1-k_2) \tag{3.4.10}$$

式（3.4.10）也被称为卷积和的平移性质，读者可自行证明。

卷积和的平移性质的物理含义：假设某 LTI 离散系统的单位序列响应 $h(k)=f_2(k)$，$f_1(k)$ 是激励信号，则该系统的零状态响应为 $y_{zs}(k)=f_1(k)*h(k)=f_1(k)*f_2(k)=f(k)$。那么延时为 k_1 的激励作用于单位序列响应延时为 k_2 的系统，与延时为 k_2 的激励作用于单位序列响应延时为 k_1 的系统，其零状态响应是相同的且延时为 k_1+k_2。

例 3.4.1 图 3.4.3 所示的复合系统由两个子系统级联组成，已知两个子系统的单位序列响应分别为 $h_1(k)=a^k\varepsilon(k)$ 和 $h_2(k)=b^k\varepsilon(k)$，求复合系统的单位序列响应 $h(k)$。

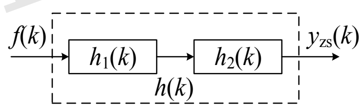


图 3.4.3　例 3.4.1 图

解：根据题意和级联系统的特性可知

$$h(k)=h_1(k)*h_2(k)=a^k\varepsilon(k)*b^k\varepsilon(k)=\left[\sum_{i=0}^{k}a^ib^{k-i}\right]\varepsilon(k)=b^k\left[\sum_{i=0}^{k}(\frac{a}{b})^i\right]\varepsilon(k)$$

$$=\begin{cases} b^k\left[\sum\limits_{i=0}^{k}1^i\right]\varepsilon(k)=(k+1)b^k\varepsilon(k)，当 a=b 时 \\ b^k\dfrac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{k+1}}{1-\dfrac{a}{b}}\varepsilon(k)=\dfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a}\varepsilon(k)，当 a\neq b 时 \end{cases}$$

上式中，若 $a\neq 1$，$b=1$，则

$$a^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}\varepsilon(k)$$

若 $a=1$，$b=1$，则

$$\varepsilon(k)*\varepsilon(k)=(k+1)\varepsilon(k) \tag{3.4.11}$$

在计算序列的卷积和时，合理利用以上相关结论可简化计算。例如，

$$\begin{aligned}\varepsilon(k+3)*\varepsilon(k-6)&=[\varepsilon(k)*\delta(k+3)]*[\varepsilon(k)*\delta(k-6)]\\&=[\varepsilon(k)*\varepsilon(k)]*[\delta(k+3)*\delta(k-6)]\\&=[(k+1)\varepsilon(k)]*\delta(k-3)\\&=(k-2)\varepsilon(k-3)\end{aligned}$$

更一般地，可推理出以下结论：

$$\begin{aligned}&\varepsilon(k-k_1)*\varepsilon(k-k_2)=(k-k_1-k_2+1)\varepsilon(k-k_1-k_2)\\&\varepsilon(k+k_1)*\varepsilon(k+k_2)=(k+k_1+k_2+1)\varepsilon(k+k_1+k_2)\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

例 3.4.2　图 3.4.4 所示的离散系统（它与例 3.2.1 的系统相同），已知初始状态为 $y(-1)=0$，$y(-2)=\dfrac{1}{6}$，激励 $f(k)=\cos(k\pi)\varepsilon(k)=(-1)^k\varepsilon(k)$，求系统的全响应 $y(k)$。

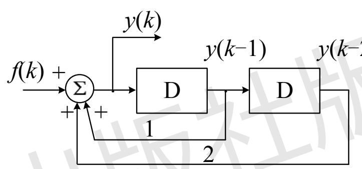


图 3.4.4　例 3.4.2 图

解：根据图 3.4.4 不难列出系统的差分方程为

$$y(k)-y(k-1)-2y(k-2)=f(k) \tag{3.4.13}$$

（1）先求系统的零输入响应 $y_{zi}(k)$，显然 $y_{zi}(k)$ 满足

$$\begin{cases}y_{zi}(k)-y_{zi}(k-1)-2y_{zi}(k-2)=0\\y_{zi}(-1)=y(-1)=0,\ y_{zi}(-2)=y(-2)=\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

利用递推关系，可得

$$\begin{cases}y_{zi}(0)=y_{zi}(-1)+2y_{zi}(-2)=\dfrac{1}{3}\\y_{zi}(1)=y_{zi}(0)+2y_{zi}(-1)=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

特征方程为 $\lambda^2-\lambda-2=0$，特征根为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，所以

$$y_{zi}(k)=C_{zi1}(-1)^k+C_{zi2}(2)^k$$

代入初始值，可得

$$\begin{cases}y_{zi}(0)=C_{zi1}+C_{zi2}=\dfrac{1}{3}\\y_{zi}(1)=-C_{zi1}+2C_{zi2}=\dfrac{1}{3}\end{cases}，可求得\ C_{zi1}=\frac{1}{9}，\ C_{zi2}=\frac{2}{9}$$

所以

$$y_{zi}(k)=\frac{1}{9}(-1)^k+\frac{2}{9}(2)^k，\ k\geqslant 0$$

（2）求系统的单位序列响应 $h(k)$，显然 $h(k)$ 满足：

$$\begin{cases} h(k)-h(k-1)-2h(k-2)=\delta(k) \\ h(-1)=h(-2)=0 \end{cases}$$

参见例 3.2.1 可以求得

$$h(k)=\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k)$$

（3）求系统的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

$$\begin{aligned} y_{zs}(k)=f(k)*h(k)&=(-1)^k\varepsilon(k)*\left[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k\right]\varepsilon(k) \\ &=\frac{1}{3}\left[(-1)^k\varepsilon(k)\right]*\left[(-1)^k\varepsilon(k)\right]+\frac{2}{3}\left[(-1)^k\varepsilon(k)\right]*\left[(2)^k\varepsilon(k)\right] \\ &=\frac{1}{3}\left[(k+1)(-1)^k\right]\varepsilon(k)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\left[(2)^{k+1}-(-1)^{k+1}\right]\varepsilon(k) \\ &=\left[\frac{1}{3}k(-1)^k+\frac{5}{9}(-1)^k+\frac{4}{9}(2)^k\right]\varepsilon(k) \end{aligned}$$

（4）求系统的全响应 $y(k)$。

$$\begin{aligned} y(k)&=y_{zi}(k)+y_{zs}(k) \\ &=\frac{1}{9}(-1)^k+\frac{2}{9}(2)^k+\frac{1}{3}k(-1)^k+\frac{5}{9}(-1)^k+\frac{4}{9}(2)^k \\ &=\frac{1}{3}(k+2)(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k，\ k\geqslant 0 \end{aligned}$$

3.4.3 系统基本单元的单位序列响应与系统综合

应用卷积和的延时和差分、求和运算，不难求得 LTI 离散系统时域框图基本单元（数乘器/标量乘法器、延迟单元）的单位序列响应，如图 3.4.5 所示。

（a）数乘器 $h(k)=a\delta(k)$　　（b）延迟单元 $h(k)=\delta(k-1)$

图 3.4.5　LTI 离散系统时域框图基本单元的单位序列响应

图 3.4.5 中两个基本单元的左侧为激励（输入）信号 $f(k)$，基本单元的单位序列响应记为 $h(k)$，右侧输出为零状态响应 $y_{zs}(k)$，即 $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$。

对数乘器而言，因为 $y_{zs}(k)=af(k)$，所以 $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)=af(k)$，而 $af(k)=f(k)*a\delta(k)$，所以 $h(k)=a\delta(k)$。

对延迟单元而言，因为 $y_{zs}(k)=f(k-1)$，所以 $y_{zs}(k)=f(k)*h(k)=f(k-1)$，而 $f(k-1)=f(k)*\delta(k-1)$，所以 $h(k)=\delta(k-1)$。

同理，对一阶后向差分电路而言，$y_{zs}(k)=\nabla f(k)$，可分析得出 $h(k)=\nabla\delta(k)$；对序列求和电路而言，可分析得出 $h(k)=\varepsilon(k)$。

以上这些结论与连续系统分析和系统综合时数乘器、延时器、微分器和积分器的冲激响应类似。如果已知某 LTI 离散系统的单位序列响应函数，利用它们可以求出构成该 LTI 离散系统的系统框图，那么这个过程就是离散系统的系统综合。

知识点视频：卷积和的性质

知识点总结（三）

1．差分的定义及序列求和运算

一阶前向差分：$\Delta f(k)=f(k+1)-f(k)$

一阶后向差分：$\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$

前、后向差分之间的关系：$\nabla f(k)=\Delta f(k-1)$ 或 $\Delta f(k)=\nabla f(k+1)$

序列求和运算：$\sum\limits_{i=-\infty}^{k} f(i)$

2．线性常系数差分方程

LTI 离散系统所满足的差分方程均为线性常系数差分方程，其通式为

$$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=b_mf(k)+b_{m-1}f(k-1)+\cdots+b_0f(k-m)$$

式中，$a_j\left(j=0,1,\cdots,n-1\right)$ 和 $b_i\left(i=0,1,\cdots,m\right)$ 均为常数。

3．迭代法

差分方程是具有递推关系的代数方程，若已知初始条件和激励，则利用迭代法可求差分方程的数值解，但多数情况下所得的数值解很难表示成解析式的形式。

4．齐次解与特解

齐次解是齐次差分方程 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=0$ 的解。特征方程 $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ 的根为特征根。根据特征根，查表 3.1.1 可得齐次解的形式。因齐次解的形式仅取决于系统而与输入无关，故其又被称为自由响应。

特解的形式可根据激励查表 3.1.2 得到，待定系数可直接由差分方程计算得出，与初始条件无关。因特解的形式仅取决于激励而与系统无关，故其又被称为强迫响应。

经典解法（将全响应分解为齐次解和特解）的求解步骤如下。

（1）求解特征方程的特征根，查表得齐次解的形式。

（2）根据给定的激励查表，得特解的形式。

（3）将特解的形式代入差分方程，确定特解中的待定系数，从而完全确定出特解。

（4）根据初始条件 $y(-1),y(-2),\cdots,y(-n)$，迭代可得 $y(0),y(1),y(2),\cdots,y(n-1)$，从而确定齐次解中的待定系数，求解出全响应。

5．稳态响应与暂态响应

通常当输入信号是阶跃序列或有始周期序列，且所有特征根的模值均小于 1 时，系统的

响应可分为暂态响应和稳态响应两部分。齐次解中的各项均按指数衰减，与特解中的衰减项一起构成了暂态响应。其余部分为稳态响应，通常也由阶跃序列或有始周期序列组成。对于不满足前述条件的情况，全响应无法分解为暂态响应和稳态响应。

6．零输入响应与零状态响应

零输入响应的求解步骤：①列出零输入响应满足的齐次方程；②求解特征方程的特征根，查表得齐次解的形式（与经典解法中齐次解的形式完全相同）；③根据 $y_{zi}(-1)=y(-1)$，$y_{zi}(-2)=y(-2)$，$\cdots$，$y_{zi}(-n)=y(-n)$ 通过迭代法可求解出 $y_{zi}(0),y_{zi}(1),\cdots,y_{zi}(n-1)$ 的值，从而可确定齐次解的待定系数，进而求解出零输入响应。

零状态响应的求解步骤：①求解特征方程的特征根，查表得齐次解的形式（与经典解法中齐次解的形式或零输入响应的形式完全相同）；②根据给定的激励查表，得特解的形式；③将特解代入差分方程，确定特解中的待定系数，从而完全确定出特解；④根据 $y_{zs}(-1)=y_{zs}(-2)=\cdots=y_{zs}(-n)=0$，通过迭代法可求解出 $y_{zs}(0),y_{zs}(1),\cdots,y_{zs}(n-1)$ 的值，从而可确定齐次解中的待定系数，进而求解出零状态响应。

7．单位序列响应与单位阶跃响应

单位序列响应是指当输入为单位序列 $\delta(k)$ 时 LTI 系统的零状态响应，记为 $h(k)$。

单位阶跃响应是指当输入为单位阶跃序列 $\varepsilon(k)$ 时 LTI 系统的零状态响应，记为 $g(k)$。

单位序列响应的求解步骤如下。

对于 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=f(k)$ 的情形，按以下步骤计算：① $h(k)+a_{n-1}h(k-1)+\cdots+a_0h(k-n)=\delta(k)$，$h(-1)=h(-2)=\cdots=h(-n)=0$；②根据迭代法，计算出 $h(0),h(1),\cdots,h(n-1)$；③求解特征方程的特征根，查表得齐次解的形式；④代入初始条件，求解出单位序列响应。

对于差分方程式（3.1.9）的情形，可先算 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=f(k)$ 的单位序列响应 $h_1(k)$，再按照关系式 $h(k)=b_mh_1(k)+b_{m-1}h_1(k-1)+\cdots+b_0h_1(k-m)$ 进行计算。

单位阶跃响应的求解步骤如下。

对于 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=f(k)$ 的情形，按以下步骤计算：① $g(k)+a_{n-1}g(k-1)+\cdots+a_0g(k-n)=\varepsilon(k)$，$g(-1)=g(-2)=\cdots=g(-n)=0$；②根据迭代法，计算出 $g(0),g(1),\cdots,g(n-1)$；③求解特征方程的特征根，查表得齐次解的形式；④设特解为待定常数，代入方程可求出特解；⑤代入初始条件，求解单位阶跃响应。

对于差分方程式（3.1.9）的情形，可先算 $y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\cdots+a_0y(k-n)=f(k)$ 的单位阶跃响应 $g_1(k)$，再按照关系式 $g(k)=b_mg_1(k)+b_{m-1}g_1(k-1)+\cdots+b_0g_1(k-m)$ 进行计算。

特别注意：单位序列响应和单位阶跃响应都是离散系统特性的反映，与系统的激励无关。根据 $h(k)=g(k)-g(k-1)=\nabla g(k)$ 和 $g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}$，$h(i)=\sum_{j=0}^{\infty}h(k-j)$，二者可以相互进行计算。

8．卷积和的定义

$$f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$$

（1）若 $f_1(k)$ 为因果序列，则 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{\infty}f_1(i)f_2(k-i)$。

（2）若 $f_2(k)$ 为因果序列，则 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f_1(i)f_2(k-i)$。

（3）若二者都是因果序列，则 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)=\sum_{i=0}^{k}f_1(i)f_2(k-i)$，其中隐含要求 $k\geqslant 0$，可见两个因果序列的卷积和结果也是因果序列。

9．零状态响应的卷积和计算法

$$y_{zs}(k)=f(k)*h(k)$$

10．卷积和的性质

1）代数性质

交换律：$f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$

分配律：$f_1(k)*\left[f_2(k)+f_3(k)\right]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k)$

结合律：$\left[f_1(k)*f_2(k)\right]*f_3(k)=f_1(k)*\left[f_2(k)*f_3(k)\right]$

2）与单位序列的卷积及移位性质

$$f(k)*\delta(k)=\delta(k)*f(k)=f(k)$$

$$f(k)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1)*f(k)=f(k-k_1)$$

$$\delta(k-k_1)*\delta(k-k_2)=\delta(k-k_2)*\delta(k-k_1)=\delta(k-k_1-k_2)$$

$$f(k-k_1)*\delta(k-k_2)=f(k-k_2)*\delta(k-k_1)=f(k-k_1-k_2)$$

若 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$，则 $f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f_1(k-k_2)*f_2(k-k_1)=f(k-k_1-k_2)$

11．有限长序列的卷积和特性

可以证明，如果 $f_1(k)$ 是长度为 M 的有限长序列，$f_2(k)$ 是长度为 N 的有限长序列，则二者的卷积和 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$ 是长度为 $M+N-1$ 的有限长序列。

12．并联和级联（串联）系统的特性

并联系统的单位序列响应等于各并联支路的单位序列响应之和；级联（串联）系统的单位序列响应等于各级联（串联）支路的单位序列响应的卷积和。

重难点提示（三）

重点提示：

（1）零输入响应和零状态响应的概念及计算。

（2）单位序列响应和阶跃响应的概念及计算。

（3）零状态响应的卷积和计算方法。

（4）卷积和的计算。

难点提示：

（1）已知条件为 $y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$ 时零输入响应的计算。

① 根据 $y_{\mathrm{zs}}(-1) = y_{\mathrm{zs}}(-2) = \cdots = y_{\mathrm{zs}}(-n) = 0$ 迭代计算出 $y_{\mathrm{zs}}(0), y_{\mathrm{zs}}(1), \cdots, y_{\mathrm{zs}}(n-1)$。

② 根据 $y(j) = y_{\mathrm{zi}}(j) + y_{\mathrm{zs}}(j)$，$j = 0,1,\cdots,n-1$，可得到 $y_{\mathrm{zi}}(j) = y(j) - y_{\mathrm{zs}}(j)$。

（2）简化卷积和计算的若干解题思路。

卷积和的移位性质是最为常用的性质之一。当两个信号中其中一个信号为单位序列的移位形式时，计算非常简单；当计算的表达式中有两个及两个以上的卷积和计算时，应注意灵活应用卷积和的分配律、交换律、结合律等性质。

习题（三）

3-1 画出下列各序列的图形。

（1）$f(k) = 2\delta(k+1) + 3\delta(k-2) - \delta(k-3)$。

（2）$f(k) = \varepsilon(k+2) - \varepsilon(k-4)$。

3-2 画出下列各序列的图形。

（1）$f(k) = k\varepsilon(k)$。

（2）$f(k) = (k-4)\varepsilon(k-4)$。

（3）$f(k) = (k-4)\varepsilon(k+4)$。

3-3 求解下列差分方程。

（1）$y(k) + 3y(k-1) + 2y(k-2) = 0$，$y(-1) = 2$，$y(-2) = 1$。

（2）$y(k) + 2y(k-1) + y(k-2) = 0$，$y(0) = y(-1) = 1$。

（3）$y(k) - 7y(k-1) + 16y(k-2) - 12y(k-3) = 0$，$y(0) = -1$，$y(1) = -3$，$y(2) = -5$。

3-4 求下列差分方程所描述系统的单位序列响应 $h(k)$。

（1）$y(k) - 0.25y(k-1) = f(k)$。

（2）$y(k) + 0.25y(k-1) - 0.125y(k-2) = f(k)$。

（3）$y(k) - y(k-1) + 0.25y(k-2) = f(k)$。

3-5 用经典法求解差分方程 $y(k) - 5y(k-1) + 6y(k-2) = \varepsilon(k)$ 的全响应，已知 $y(-1) = 3$，$y(-2) = 5$。

3-6 一人每年年初在银行存款一次，设其第 k 年新存款额为 $f(k)$，若银行年息为 r，每年所得利息自动转存下一年，则以 $y(k)$ 表示第 k 年的总存款额，请列写其差分方程。

3-7 已知系统的差分方程为 $y(k) - 0.5y(k-1) = f(k)$，起始条件为 $y(-1) = 0$，求下列输入序列的输出 $y(k)$。

（1）$f(k) = \delta(k)$。

（2）$f(k) = \varepsilon(k)$。

3-8　已知 $f(k)=\varepsilon(k)+\varepsilon(k-2)$，$h_1(k)=\delta(k)-\delta(k-1)$，$h_2(k)=a^k\varepsilon(k-1)$，求 $y(k)=f(k)*h_1(k)*h_2(k)$。

3-9　求以下卷积和。

（1）$a^k\varepsilon(k)*\varepsilon(k-4)$。

（2）$\varepsilon(k-3)*\varepsilon(k-4)$。

3-10　已知差分方程 $y(k)+3y(k-1)+2y(k-2)=f(k)$，激励 $f(k)=2^k\varepsilon(k)$，初始条件 $y(0)=0$，$y(1)=2$，求系统的 $y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$ 和 $y(k)$。

3-11　某 LTI 离散系统所满足的差分方程为 $y(k)+2y(k-1)=f(k)$，激励 $f(k)=(3k+4)\varepsilon(k)$，初始条件 $y(-1)=-1$，求系统的 $y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$ 和 $y(k)$。

3-12　求图 3.5.1 所示系统的单位序列响应 $h(k)$。

3-13　求图 3.5.2 所示系统的单位序列响应 $h(k)$。

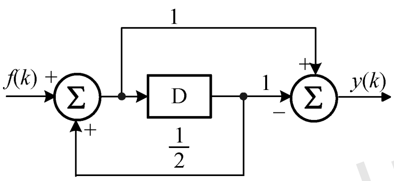


图 3.5.1　习题 3-12 的图

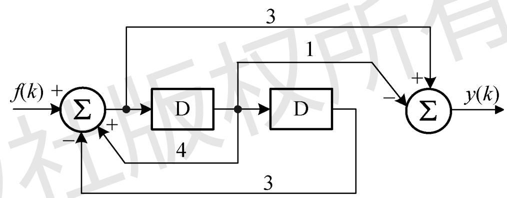


图 3.5.2　习题 3-13 的图

3-14　已知 $f_1(k)=\varepsilon(k)-\varepsilon(k-4)$，$f_2(k)=2^k\left[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)\right]$，请画出 $f_1(k)$ 和 $f_2(k)$ 的波形，并用图解法求解 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$。

3-15　描述 LTI 离散系统的差分方程为 $y(k)-0.7y(k-1)+0.1y(k-2)=7f(k)-2f(k-1)$，已知系统在 $k=0$ 时接入输入 $f(k)=\varepsilon(k)$，全响应的初始条件 $y(0)=14$，$y(1)=13.1$，求该系统的 $y_{zi}(k)$、$y_{zs}(k)$ 和 $y(k)$，同时指出其自由响应、强迫响应、暂态响应和稳态响应各是多少。

3-16　描述 LTI 离散系统的差分方程为 $y(k)-0.5y(k-1)=f(k)+0.5f(k-1)$，求该系统的单位序列响应 $h(k)$。

3-17　已知 $f_1(k)=3^k\varepsilon(k-2)$，$f_2(k)=2^k\varepsilon(k+2)$，求 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$。

3-18　已知 LTI 离散系统的单位序列响应 $h(k)=\delta(k)+2\delta(k-1)+3\delta(k-2)$，输入为 $f(k)=3\delta(k)-2\delta(k-1)+\delta(k-3)$，求该系统零状态响应 $y_{zs}(k)$ 在 $k=2$ 和 $k=4$ 处的值。

3-19　已知系统的阶跃响应为 $g(k)=\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}(-1)^k+\frac{4}{3}(-2)^k\right]\varepsilon(k)$。求系统的单位序列响应 $h(k)$ 和系统在 $f(k)=(-3)^k\varepsilon(k)$ 激励下的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

3-20　已知某离散系统的单位序列响应 $h(k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k\varepsilon(k)$，其零状态响应 $y_{zs}(k)=\left[\frac{6}{5}(2)^k-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right]\varepsilon(k)$，求该系统的激励 $f(k)$。

3-21 已知 $f_1(k)=\begin{cases}1, & k=-1,0,1,2\\0, & \text{其余}\end{cases}$ 和 $f_2(k)=\begin{cases}3-k, & k=0,1,2,3\\0, & \text{其余}\end{cases}$，求 $f(k)=f_1(k)*f_2(k)$。

3-22 已知 LTI 离散系统的单位序列响应为

$h(k)=\begin{cases}1, & k=1,2,3\\0, & \text{其余}\end{cases}$，求输入为 $f(k)=\begin{cases}1, & k\text{为偶数，且}k\geqslant 0\\0, & \text{其余}\end{cases}$ 时的零状态响应 $y_{zs}(k)$。

3-23 图 3.5.3 所示的复合系统由多个子系统构成，已知 $h_1(k)=\varepsilon(k)$，$h_2(k)=\varepsilon(k-2)$，$h_3(k)=\delta(k)+\delta(k-2)$，求复合系统的单位序列响应 $h(k)$。

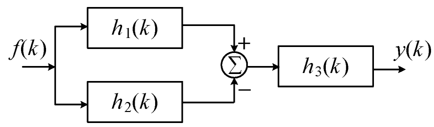


图 3.5.3　习题 3-23 的图

3-24 图 3.5.4 所示的复合系统由多个子系统构成，已知 $h_1(k)=\varepsilon(k)$，$h_2(k)=\delta(k-3)$，$h_3(k)=\delta(k)+\delta(k-3)$，求复合系统的单位序列响应 $h(k)$。

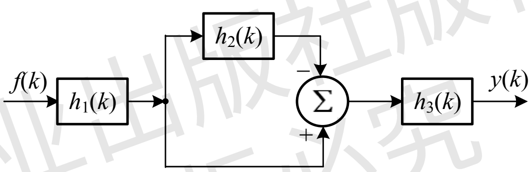


图 3.5.4　习题 3-24 的图

3-25 已知 LTI 因果系统的激励 $f(k)=\delta(k)+4\delta(k-1)+4\delta(k-2)$，其零状态响应 $y_{zs}(k)=3^k\varepsilon(k)$。求系统的单位序列响应 $h(k)$。

3-26 某离散 LTI 系统如图 3.5.5 所示，已知 $h_1(k)=4\times 0.5^k\left[\varepsilon(k)-\varepsilon(k-3)\right]$，$h_2(k)=h_3(k)=(k+1)\varepsilon(k)$，$h_4(k)=\delta(k-1)$，$h_5(k)=\delta(k)-4\delta(k-3)$，求该系统的单位序列响应 $h(k)$。

3-27 在数字信号传输中，为减弱传输信码之间的串扰，常采用时域均衡器。图 3.5.6 是一个借助横向滤波器来实现的时域均衡器。如果输入 $f(k)=0.25\delta(k)+\delta(k-1)+0.5\delta(k-2)$，要求输出 $y(k)$ 在 $k=1$、$k=3$ 时为零，即 $y(1)=0$、$y(3)=0$，求加权系数 $h(0)$、$h(1)$、$h(2)$。

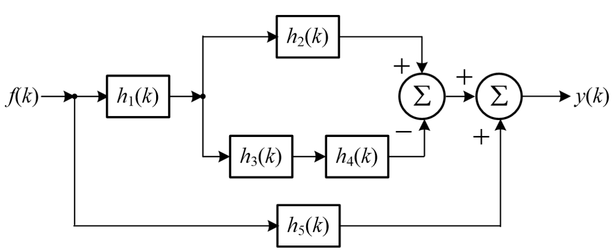


图 3.5.5　习题 3-26 的图

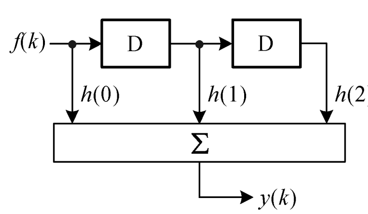


图 3.5.6　习题 3-27 的图

考研题选编（三）

1．（**电子科技大学　2013**）选择题：信号 $x(n)=2\delta(n)-5\delta(n-1)+3\delta(n-3)$ 与信号 $h(n)=6\delta(n)-3\delta(n-1)$ 的卷积和等于（　　）。

A．{12，−24，16，8，−9}　$n=0,1,2,3,4$　　B．{12，−36，33，−9，0}　$n=0,1,2,3,4$

C．{12，−36，15，18，−9}　$n=0,1,2,3,4$　　D．{12，−30，19，9，19}　$n=-1,0,1,2,3$

2．（**浙江大学　2001**）已知 $x(n)=u(n)-u(n-2)$，$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$，$h_2(n)=a^n\cdot u(n-1)$，求 $y(n)=x(n)*h_1(n)*h_2(n)$。

3．（**上海交通大学　1999**）已知系统的差分方程为 $y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=u(n)$，$y(0)=0$，$y(1)=1$。求 $y(n)$ 的零输入响应 $y_{zi}(n)$ 和零状态响应 $y_{zs}(n)$。

4．（**北京航空航天大学　2000**）选择题：一个离散时间 LTI 系统，其输入 $x(n)$ 和单位样值响应 $h(n)$ 分别为 $x(n)=a^n u(n)$，$h(n)=a^n u(n)$，其中 $u(n)$ 是单位阶跃序列，则 $x(n)*h(n)$ 的结果是（　　）。

A．$(n+1)a^n u(n)/(1-a)$　　B．$(n+1)a^n u(n)$

C．$(n+1)a^n$　　D．$na^n u(n)$

5．（**哈尔滨工业大学　2002**）考虑某离散时间系统 S，其输入为 $x(n)$，输出为 $y(n)$。若该系统由系统 S_1 和 S_2 级联而成，S_1 的输入/输出关系为 $y_1(n)=2x_1(n)+4x_1(n-1)$，S_2 的输入/输出关系为 $y_2(n)=2x_2(n-2)+0.5x_2(n-3)$。则

（1）系统 S 的输入/输出关系是什么？

（2）若系统 S_1 和 S_2 的级联次序颠倒，则系统 S 的输入/输出关系是否改变？

6．（**哈尔滨工程大学　2002**）已知 LTI 系统的单位样值响应为 $h(n)=\delta(n)-\delta(n-2)$，激励为 $x(n)=u(n)+u(n-2)$，试用时域方法求系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$，并画出 $y_{zs}(n)$ 的波形。

7．（**国防科技大学　2006**）已知序列 $f_1(n)=2^n u(n-1)$，$f_2(n)=3^n u(n+1)$，求 $f_1(n)*f_2(n)$。

8．（**浙江大学　2003**）有某一因果离散时间 LTI 系统，当输入 $f_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时，其输出的全响应 $y_1(n)=2^n u(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；系统的起始状态不变，当输入 $f_2(n)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时，系统的全响应 $y_2(n)=3\times 2^n u(n)-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$。试求：（1）系统的零输入响应。

（2）系统对输入为 $f_3(n)=0.5\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 的全响应（系统初始状态保持不变）。

9．（**电子科技大学　2005**）已知一离散时间系统的输入/输出关系为 $y(k)=\frac{1}{4}\left[x(k-1)+2x(k)+x(k+1)\right]$，求输入 $x(k)=\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)+\sin(\pi k)$ 时的输出 $y(k)$。

10．（**北京交通大学　2005**）已知某离散时间系统如图 3.5.7 所示，试求该系统的单位脉冲响应 $h(k)$。其中 $h_1(k)=\varepsilon(k-1)$，$h_2(k)=0.5^k\varepsilon(k)$。

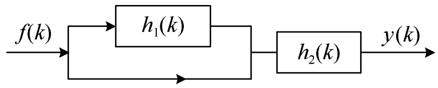


图 3.5.7　考研题选编 10 的图

11.（**东南大学 2000**）已知离散时间系统的差分方程为 $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=x(n+1)-x(n)$，$x(n)=(-2)^n u(n)$，零输入初始条件为 $y_{zi}(0)=0$，$y_{zi}(1)=1$。求零输入响应、零状态响应、全响应，并指出强迫响应与自由响应分量。

12.（**哈尔滨工业大学 2002**）一个输入为 $x(n)$，输出为 $y(n)$ 的离散时间 LTI 系统，已知：

（1）若对全部 n，$x(n)=(-2)^n$，则有 $y(n)=0$。

（2）若对全部 n，$x(n)=2^{-n}u(n)$，则有 $y(n)=\delta(n)+a\times 4^{-n}u(n)$，其中 a 为常数。

求：（1）常数 a。

（2）若系统输入对全部 n 有 $x(n)=1$，求响应 $y(n)$。

13.（**武汉科技大学 2017**）选择题：下述四个等式中，错误的是（　　）。

A. $\delta(n)=u(n)-u(n)$　　B. $\delta(n)=u(-n)-u(n+1)$

C. $u(n)=\sum_{j=-\infty}^{n}\delta(j)$　　D. $u(-n)=\sum_{j=-\infty}^{0}\delta(n-j)$

14.（**武汉大学 2015**）简答题：设系统差分方程为 $y(n)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$，其中 $x(n)$ 与 $y(n)$ 分别表示系统输入和输出，判断系统是否是 LTI 系统的。

15.（**电子科技大学 2012**）某离散时间 LTI 系统的输入为 $x(n)=u(n+1)+u(n)-u(n-1)-u(n-2)$，输出为 $y(n)=\{-1,0,6,8,3\}$，$n=-1,0,1,2,3$，试求系统的单位脉冲响应 $h(n)$。

16.（**北京邮电大学 2016**）填空题：离散信号 $\cos\frac{\pi}{3}n+\sin\frac{\pi}{4}n$ 的基波周期为________。