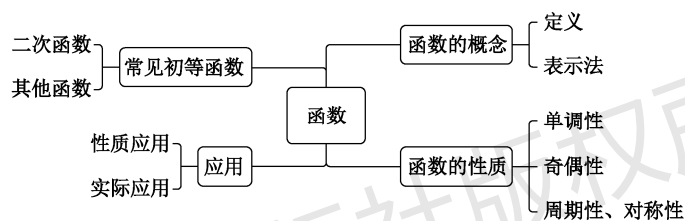


第三单元

函数

知识结构图



考情分析

年份	题号	题型分布			分值	知识点	学习水平		
		选择题	填空题	解答题			一级	二级	三级
2023	2	√			4	函数的定义域	√		
	13	√			4	函数图像变换		√	
	15	√			4	函数的奇偶性		√	
	26			√	12	函数的单调性			√
2022	3	√			4	函数的定义域	√		
	20		√		4	新运算法则	√		
	25			√	12	抽象函数的单调性			√
2021	2	√			4	函数的定义域	√		
	9	√			4	函数的实际应用	√		
	20		√		4	函数的对称性			√
	26			√	12	函数性质的综合应用			√
2020	2	√			4	函数的定义域	√		
	11	√			4	函数解析式		√	
	15	√			4	函数的周期性			√
	26			√	12	二次函数			√
2019	2	√			4	函数的定义域	√		
	14	√			4	分段函数		√	
	15	√			4	函数的单调性		√	
	26			√	12	函数的对称性、周期性			√



3.1 函数的概念

课标要求	知识脉络
1. 理解用集合语言和对应关系定义函数的概念 2. 理解函数表示的解析法、列表法、图像法 3. 理解分段函数的概念 4. 掌握求函数定义域的方法	求函数的定义域 一般函数的值 分段函数的值 间接函数的值 求函数解析式 $\left\{ \begin{array}{l} \text{求函数值} \\ \text{应用} \end{array} \right.$ 函数的概念 $\left\{ \begin{array}{l} \text{函数的定义} \\ \text{相等函数的判定} \end{array} \right.$ 函数的三要素 函数的表示法 化简前的定义域相同 解析式相同



知识清单

一、函数的定义

在某个变化过程中,有两个变量 x 和 y ,设变量 x 的取值范围为数集 D ,如果对于 D 内的每一个 x 值,按照某个对应法则 f , y 都有唯一确定的值与它对应,那么把 x 叫作自变量,把 y 叫作 x 的函数,记作 $y=f(x)$.

1. 函数的三要素

- (1) 定义域: 使函数有意义的 x 的集合.
- (2) 对应法则: 反映两个变量 x 与 y 之间的对应关系的准则,可以是一个表格、一个图像或一个代数式.
- (3) 值域: $x=x_0$ 时对应的值 η_0 叫作 x_0 的函数值,每个 x 值都对应一个 y 值,由所有 y 值构成的集合叫作函数的值域.

2. 函数的表示法

- (1) 列表法: 用表格表示两个变量之间的函数关系的方法.
- (2) 解析法: 用含有两个变量的代数式表示函数关系的方法.
- (3) 图像法: 用图像表示两个变量之间的函数关系的方法.

二、求函数定义域

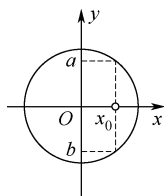
定义域即使函数有意义的自变量的取值范围.

函数	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y = \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$y = \frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)}$	$y = [f(x)]^0$
满足条件					
备注	函数的定义域原则上用集合表示. 在一般情况下,用区间表示定义域更简洁、直观				

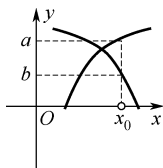


方法清单

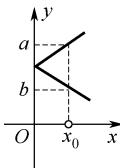
【例 1】下列曲线可作为函数 $y=f(x)$ 的图像的是 ().



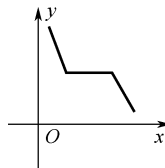
A.



B.



C.



D.

【解析】根据函数的定义，在定义域内， x 轴上的每一个点只能对应于图像上的唯一点，因此只有选项D符合条件.

【答案】D.

【例2】函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为 ().

A. $[-1, +\infty)$

B. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

C. $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

D. $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$

【解析】要使函数有意义，则 $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq -1 \text{ 且 } x \neq 0$.

【答案】D.

【例3】下列两个函数是相同函数的是 ().

A. $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

B. $y = \sqrt[3]{x^3}$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$

C. $y = x|x|$ 与 $y = x^2$

D. $y = (x-1)^0$ 与 $y = \frac{x-1}{x-1}$

【解析】对于选项A， $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ， $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，故不是相同函数.

对于选项B， $y = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，故不是相同函数.

对于选项C， $y = x|x|$ 与 $y = x^2$ 的解析式不同，故不是相同函数.

对于选项D， $y = (x-1)^0$ 与 $y = \frac{x-1}{x-1}$ 的定义域都为 $x \neq 1$ ，且化简后均等于1，故是相同函数.

【答案】D.

【? 解题反思】在一般情况下，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同时满足三个条件：①函数定义域相同；②化简后对应法则相同，即解析式相同；③值域相同；那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数. 在这三个条件中，只要不满足其中任何一个，这两个函数就不是相同函数. 在一般情况下，满足条件①和②即可. 特别注意，定义域是化简前的函数定义域.

【例4】已知 $f(x-2) = 2x^2 + 1$ ，那么 $f(x)$ 的解析式为 ().

A. $2x^2 - 8x + 9$

B. $2x^2 + 8x + 9$

C. $2x^2 - 2x + 3$

D. $2x^2 + x - 1$

【解析】方法一，换元法：设 $x-2 = t$ ，则 $x = t+2$ ，有 $f(t) = 2(t+2)^2 + 1 = 2t^2 + 8t + 9$ ，故 $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$.

方法二，配凑法： $f(x-2) = 2x^2 + 1 = 2(x-2)^2 + 8(x-2) + 9$ ，故 $f(x) = 2x^2 + 8x + 9$.

【答案】B.

【例5】(1) 已知 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(-2, 4)$ ，则 $f(x)$ 的定义域为_____.

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$ ，则 $f(2x+1)$ 的定义域为_____.

【解析】(1) $f(2x+1)$ 中， $-2 < x < 4 \Rightarrow -4 < 2x < 8 \Rightarrow -3 < 2x+1 < 9$ ，故 $f(x)$ 的定义域为 $(-3, 9)$.

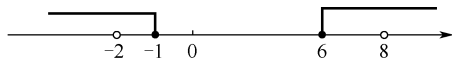
(2) $-2 \leq 2x+1 \leq 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ，故 $f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



【答案】(1) $(-3, 9)$; (2) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

【例 6】求函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x - 6}}{x + 2} - (x - 8)^0$ 的定义域.

解: 要使函数有意义, 则 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ x - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 6 \\ x \neq -2 \\ x \neq 8 \end{cases} \Rightarrow x \leq -1 \text{ 且 } x \neq -2 \text{ 或 } x \geq 6 \text{ 且 } x \neq 8$ (如图).



故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \leq -1 \text{ 且 } x \neq -2 \text{ 或 } x \geq 6 \text{ 且 } x \neq 8\}$.

解题反思 如果函数需要满足两个或两个以上的条件才有意义, 那么这个函数就是一个混合型函数. 求混合型函数的定义域时, 要做到条件充分, 不漏一个条件. 求不等式组的解集时, 要充分利用数轴找公共部分, 特别注意端点值的取舍.

【例 7】设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1 \\ x + 2, & -1 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$.

(1) 求函数的定义域;

(2) 求 $f(4) - f(-3) + f(0)$ 的值.

【解析】(1) 三段函数中自变量的取值范围的并集构成这个分段函数的定义域; (2) 分段代入求值.

解: (1) $(-\infty, -1] \cup (-1, 2) \cup [2, +\infty) = \mathbf{R}$, 故函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) $f(4) - f(-3) + f(0) = 2 \times 4 - (-3)^2 + (0 + 2) = 8 - 9 + 2 = 1$.

解题反思 分段函数: 在自变量的不同取值范围内用不同的解析式来表示的函数称为分段函数. 它可以把几种函数类型综合在一起. 需要明确的是:

(1) 分段函数是一个函数, 而不是几个函数;

(2) 分段函数的定义域是每段函数自变量的取值范围的并集;

(3) 求分段函数的函数值, 要先确定自变量的取值属于哪段函数的取值范围, 然后代入该段的解析式求值;

(4) 对形如 $f[f(x_0)]$ 的求值问题, 应从内向外依次求值.



课堂练习

1. (四川 · 2013) 下列函数中, 与 $y = x$ 为同一函数的是 ().

A. $y = \sqrt[3]{x}$

B. $y = \frac{x^2}{x}$

C. $y = \sqrt{x^2}$

D. $y = |x|$

2. (四川 · 2015) 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为 ().

A. $\{x \in \mathbf{R} | x \neq 2\}$

B. $\{x \in \mathbf{R} | x < 2\}$

C. $\{x \in \mathbf{R} | x \geq 2\}$

D. $\{x \in \mathbf{R} | x > 2\}$

3. (四川 · 2022) 在平面直角坐标系中, 当 $M(x, y)$ 不是坐标原点时, 定义 $M(x, y)$ 的映射点为 $M^*\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$, 则点 $A(1, 2)$ 的映射点 A^* 的坐标为_____.

4. (四川 · 2021) 一个小型机械厂生产某种设备的数量 x (台) 与利润 y (元) 之间的关系式是 $y = -20x^2 + 2200x$. 如果这家机械厂获得超过 60000 元的利润, 那么生产该设备的台数的范围是 ().

A. $\{x | x > 50, x \in \mathbf{N}^*\}$

B. $\{x | 0 < x < 60, x \in \mathbf{N}^*\}$

C. $\{x | 50 \leq x \leq 60, x \in \mathbf{N}^*\}$

D. $\{x | 50 < x < 60, x \in \mathbf{N}^*\}$



课外训练

一、选择题

1. 下列函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 表示同一函数的是 ().

A. $f(x)=|x|$ 、 $g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=1$ 、 $g(x)=x^0$

C. $f(x)=-x$ 、 $g(x)=\sqrt[5]{x^5}$

D. $f(x)=-x$ 、 $g(x)=\sqrt[4]{-x^4}$

2. (四川·2019) 函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 ().

A. $(-1,1)$

B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)$

D. $(1,+\infty)$

3. (四川·2020) 函数 $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域是 ().

A. $(2,+\infty)$

B. $[2,+\infty)$

C. $(-2,+\infty)$

D. $[-2,+\infty)$

4. 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$, 则函数 $g(x)=\frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域为 ().

A. $[0,1]$

B. $[0,1)$

C. $[0,1)(1,4]$

D. $(0,1)$

5. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}$, 那么 $f(x)$ 的解析式为 ().

A. $\frac{1}{1+x}$

B. $\frac{1+x}{x}$

C. $\frac{x}{1+x}$

D. $1+x$

6. 已知函数 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $[-2,3]$, 则 $y=f(2x-1)$ 的定义域为 ().

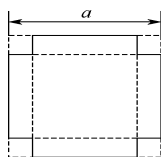
A. $\left[0,\frac{5}{2}\right]$

B. $[-1,4]$

C. $[-5,5]$

D. $[-7,3]$

7. (2020·四川) 如图, 一个边长为 a 的正方形铁皮, 从它的 4 个角各剪去一个边长为 x ($0 < x < \frac{a}{2}$) 的小正方形, 把剩下的铁皮做成一个没有盖子的长方体盒子 (不考虑剪切和



焊接处的材料损耗), 则这个盒子的容积为 ().

A. $x(a-2x)^2$

B. $2x(a-2x)^2$

C. $x(a-x)^2$

D. $2x(a-x)^2$

8. 等腰三角形的周长为 20, 底边长 y 是一腰长 x 的函数, 则 ().

A. $y=10-x(0 < x \leq 10)$

B. $y=10-x(0 < x < 10)$

C. $y=20-2x(5 \leq x \leq 10)$

D. $y=20-2x(5 < x < 10)$

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f[f(3)] = ()$.

A. $\frac{1}{5}$

B. 3

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{13}{9}$

二、填空题

10. 已知 $f(2x-1)=\frac{x}{x^2+1}$, 则 $f(5)=$ _____.

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$, 则函数 $f(x^2)$ 的定义域为_____.

12. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(0,1)$, 则 $f(x)$ 的定义域为_____.

13. 已知函数 $f(x)=2x-3$, $x \in \mathbf{N}$, $1 \leq x \leq 5$, 则函数 $f(x)$ 的值域为_____.



14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases}$, 若 $f(x) = 4$, 则实数 $x =$ _____.

三、解答题

15. 求函数 $y = \sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{x}$ 的定义域.

16. 已知 $f(x) + 2f(-x) = x^2 + 2x$, 求 $f(x)$ 的解析式.

17. 已知定义域为 $\mathbf{N}^*$ 的函数 $f(x)$ 同时满足下列条件:

(1) $f(2) = 1, f(6) = \frac{1}{5}$;

(2) $f(xy) = f(x) + f(y)$.

求 $f(3)$ 、 $f(9)$ 的值.

18. A、B 两地相距 150 千米, 某汽车以 50 千米/小时的速度从 A 地到 B 地, 在 B 地停留 2 小时之后, 又以 60 千米/小时的速度返回 A 地. 写出该车离 A 地的距离 S (千米) 关于时间 t (小时) 的函数关系, 并画出函数图像.

3.2 函数的单调性

课标要求	知识脉络
1. 理解增函数、减函数的定义与函数图像的几何特征 2. 初步掌握函数单调性的判定方法 3. 掌握利用函数的单调性解决简单的实际问题	判断函数的单调性 求参数的值或范围 比较大小 解抽象不等式 判定二次函数的单调区间 其他综合应用 应用 函数的单调性 分类 单调递增函数 定义 图像特征 递增区间 单调递减函数 定义 图像特征 递减区间 判断方法 图像法 定义法 ⋮

知识清单

一、函数单调性的概念及图像特征

	增函数	减函数
定义	一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果对于定义域 I 内的某个区间 D 的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数, D 叫作增区间	一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 如果对于定义域 I 内的某个区间 D 的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数, D 叫作减区间
图像		
图像描述	从左往右看呈上升趋势 y 随 x 的增大而增大	从左往右看呈下降趋势 y 随 x 的增大而减小

二、函数单调性的判定

- 图像法: 先作出函数图像, 利用图像直观判断函数的单调性.
- 定义法: 取值 (定义域内) $\rightarrow$ 作差 $\rightarrow$ 变形 $\rightarrow$ 判号 $\rightarrow$ 定论.
 - 取值, 对于函数 $y = f(x)$, 设 $x_1, x_2 \in D$, 且令 $x_1 < x_2$;
 - 作差, $f(x_1) - f(x_2)$, 主要过程: 通分、因式分解;
 - 变形、判号, 判定 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 0 的大小关系;
 - 定论, 若 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$, 则函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上为增函数; 若 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 则函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上为减函数.
- 直接法: 对于熟悉的初等函数, 如一次函数、反比例函数、二次函数等, 直接判断它们的单调性.
 - 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时, 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数; 当 $k < 0$ 时, 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数.
 - 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 当 $k > 0$ 时为减函数, 减区间为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; 当 $k < 0$ 时为增函数, 增区间为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
 - 二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的单调性由开口方向和对称轴确定, 当 $a > 0$ 时, 减区间为_____, 增区间为_____.
- 综合法: 设 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 \neq x_2$.
 - 若 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数; 若 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$, 则 $f(x)$ 为减函数.
 - 若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 则 $f(x)$ 为增函数; 若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 则 $f(x)$ 为减函数.
 - 设 $a, b \in D$, 且 $a \neq b$, 若 $f(a) \neq f(b)$, 则说明 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性. 设在区间 D 上存在实数 a, b , 使 $f(a) = f(b)$, 则说明 $f(x)$ 在区间 D 上不具有单调性.
- 拆解法: 把一个函数拆解成两个 (或多个) 函数的和, 在相同区间内, 增 + 增为增, 减 + 减为减, 增 + 减不能确定, 即设 $F(x) = f(x) + g(x)$, 有 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为增函数 $\Rightarrow F(x)$ 为增函数;



$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为减函数 $\Rightarrow F(x)$ 为减函数;

$f(x)$ 与 $g(x)$ 中一个为增函数, 另一个为减函数 $\Rightarrow F(x)$ 的单调性不能确定.



方法清单

【例1】(1) 若一次函数 $y = (2m+1)x + b$ 是增函数, 则().

A. $m > -\frac{1}{2}$

B. $m < -\frac{1}{2}$

C. $b > 0$

D. $b < 0$

(2) 下列函数中在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是().

A. $y = \frac{3}{x}$

B. $y = (x-1)^2$

C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

D. $y = -x^2$

(3) 函数 $y = x^2 - x - 2$ 的增区间是().

A. $(-1, 2)$

B. $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【解析】(1) 一次函数为增函数, 则 $2m+1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}$.

(2) 图像法: 可分别画出函数图像的草图, 利用图像判断各函数的单调性.

(3) $y = x^2 - x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$, 其对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 且图像开口向上, 故增区间为 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

【答案】(1) A; (2) C; (3) D.

【例2】不等式 $x - \frac{1}{x} - m \leq 0$ 在区间 $[1, 4]$ 上恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

【解析】将原不等式化为 $x - \frac{1}{x} \leq m$, 设 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $y_1 = x$ 和 $y_2 = -\frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 4]$ 上均为增函数, 故 $f(x)$

在区间 $[1, 4]$ 上为增函数, $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的最大值为 $f(4) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$, 所以 $m \geq \frac{15}{4}$.

【答案】 $\left[\frac{15}{4}, +\infty\right)$.

? 解题反思

(1) 对于含参数不等式恒成立问题, 常见的方法是: ①图像法; ②分离参数法; ③最值法; ④转换主元法(或转换参数法). 利用单调性求最值是常见方法之一, 注意掌握.

(2) 函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 为对勾函数, 可根据对勾函数的拐点判断单调性. 对于 $g(x) = x - \frac{1}{x}$, 可根据组合函数的性质判断其单调性.

【例3】判断函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调性.

解: 设 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{x_2 - x_1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$$

$\because x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$,

$\therefore x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0, x_2 - x_1 > 0$.

故 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$.

$\therefore f(x) = \frac{1}{x-1}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是减函数.

【例4】已知 $f(x)$ 是定义域在 $(0, +\infty)$ 上的增函数，且 $f(3a) - f(4 - a^2) < 0$ ，求 a 的取值范围。

解：将原不等式化为 $f(3a) < f(4 - a^2)$ ，

$$\text{由题意得} \begin{cases} 3a > 0 \\ 4 - a^2 > 0 \\ 3a < 4 - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -2 < a < 2 \\ -1 < a < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 2,$$

故 a 的取值范围是 $(0, 2)$ 。

❓ 解题反思

(1) 利用函数的单调性比较大小，根据单调性建立不等关系时，一定要考虑所给自变量必须在定义域内的同一个单调区间内。

(2) 对于抽象函数求字母取值范围的题目，最终要变成 $f[g(x)] > f[h(x)]$ 的形式，再依据函数 $f(x)$ 的单调性把 f 符号脱掉，得到相应的不等式，再求解。

易错点：没有考虑定义域优先的原则而忽视 $3a > 0$ 和 $4 - a^2 > 0$ 这两个条件。



课堂练习

1. 函数 $f(x) = x^2 - 2x$ 的单调增区间是 ()。

A. $(-\infty, 1]$

B. $[1, +\infty)$

C. $\mathbf{R}$

D. 不存在

2. 若函数 $f(x) = (-k^2 + 3k + 4)x + 2$ 是增函数，则 k 的取值范围是_____。

3. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调增函数。

(1) 比较 $f(a^2 + 2)$ 与 $f(2a)$ 的大小；

(2) 若 $f(a^2) > f(a + 6)$ ，求实数 a 的取值范围。



课外训练

一、选择题

1. 如果函数 $f(x) = kx + b$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 ()。

A. $k > 0$

B. $k < 0$

C. $b > 0$

D. $b < 0$

2. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，则有 ()。

A. $f(-2) < f(1)$

B. $f(-2) > f(1)$

C. $f(-1) < f(1)$

D. 不能确定

3. 已知函数 $y = f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(1-x)$ ，且在 $(-\infty, 1)$ 上是增函数，则下列各式成立的是 ()。

A. $f(1.5) > f(0.5)$

B. $f(1.5) > f(\pi)$

C. $f(1.5) > f(0.6)$

D. $f(1.5) < f(0.4)$

4. 函数 $f(x) = x^2 + 4ax + 2$ 在 $(-\infty, 6)$ 内单调递减，则 a 的取值范围是 ()。

A. $a \geq 3$

B. $a \leq 3$

C. $a \geq -3$

D. $a \leq -3$

5. 函数 $f(x) = |x|$ ， $g(x) = -x^2$ ，则在区间 $(0, +\infty)$ 上，下列说法正确的是 ()。

A. $f(x)$ 是增函数， $g(x)$ 是减函数

B. $f(x)$ 是减函数， $g(x)$ 是增函数

C. $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是增函数

D. $f(x)$ 、 $g(x)$ 都是减函数



6. (四川·2017) 函数 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数, 且对任意实数 x , $f[f(x) - x^3 - x + 1] = 2$ 恒成立, 则 $f(-1) =$ ().

- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4

7. 函数 $f(x) = x^2 - 2ax - 3$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调, 则 ().

- A. $a \in (-\infty, 1]$ B. $a \in [2, +\infty)$
C. $a \in [1, 2]$ D. $a \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, +\infty)$, 若对于任意不等实数 $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$, 不等式 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 恒成立, 则不等式 $f(2x) > f(x+1)$ 的解集为 ().

- A. $\left\{x \mid \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$ B. $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ 或 } x > 1\right\}$
C. $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\right\}$ D. $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$

二、填空题

9. 函数 $y = -2(x-2)^2 + 2020$ 的单调减区间为_____.

10. 函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ 的单调减区间为_____.

11. (1) 若二次函数 $y = 2x^2 - mx + 2020$ 在区间 $[1, 3]$ 上为增函数, 则实数 m 的取值范围是_____.

(2) 若二次函数 $y = 2x^2 - mx + 2020$ 在区间 $[1, 3]$ 上不具有单调性, 则实数 m 的取值范围是_____.

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则 $f(x) \geq f(2x-3)$ 的解集为_____.

13. 函数 $y = -(x-3)|x|$ 的单调增区间是_____.

三、解答题

14. 判断并证明函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上的单调性.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[1, 6]$ 上的增函数, 解不等式 $f(x+3) < f(2-x)$.

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 且满足 $f(xy) = f(x) + f(y)$, $f(2) = 1$.

(1) 求 $f(8)$;

(2) 求不等式 $f(x) + f(x-2) > 3$ 的解集.

3.3 函数的奇偶性

课标要求	知识脉络
1. 理解奇函数、偶函数的定义与函数图像的几何特征 2. 初步掌握奇偶性的判定方法	判断、证明函数的奇偶性 改变符号求值或表达式 结合单调性解抽象不等式 其他综合应用 应用 — 函数的奇偶性 — 判定方法 - 图像法 - 定义法 - 拆解法 性质 - 符号性质 - 对称性质 - 单调性质 - 特殊性质

知识清单

一、奇函数、偶函数的定义

1. 奇函数：一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x)=-f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 叫作奇函数. 其图像关于原点对称.
2. 偶函数：一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有 $f(-x)=f(x)$ ，那么函数 $f(x)$ 叫作偶函数. 其图像关于 y 轴对称.

二、奇函数、偶函数的判定

1. 图像法

若函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，则 $f(x)$ 为偶函数；

若图像关于原点对称，则 $f(x)$ 为奇函数；

若图像既不关于 y 轴对称，也不关于原点对称，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数（不具有奇偶性）.

2. 定义法

第一步：判断函数 $f(x)$ 的定义域是否关于原点对称，若不关于原点对称，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数；

第二步：化简 $f(-x)$ 并判定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系；

第三步：定论.

(1) 若 $f(-x)=f(x)$ ，则 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 若 $f(-x)=-f(x)$ ，则 $f(x)$ 为奇函数；

(3) 若 $f(-x)\neq\pm f(x)$ ，则 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

注意 图像法适用于简单初等函数，清楚明了；定义法适用于所有函数，论证严密，具有可操作性.

3. 拆解法

把一个函数拆解为两个（或多个）函数的和或积.

(1) 和函数的奇偶性：奇 + 奇为奇；偶 + 偶为偶；奇 + 偶为非奇非偶.

(2) 积函数的奇偶性：奇 $\times$ 奇为偶；偶 $\times$ 偶为偶；奇 $\times$ 偶为奇.



三、奇函数、偶函数的性质

性质	奇函数	偶函数
对称性质	定义域关于原点对称; 图像关于原点对称	定义域关于原点对称; 图像关于 y 轴对称
符号性质	$f(-x) = -f(x)$ (变里也变外)	$f(-x) = f(x)$ (变里不变外)
单调性质	关于原点对称区间的单调性相同	关于原点对称区间的单调性相反
特殊性质	若 $f(0)$ 有意义, 则 $f(0) = 0$	



方法清单

【例 1】(1) 下列函数中既是增函数且图像关于原点对称的是 ().

A. $y = x^2$

B. $y = x^{\frac{1}{3}}$

C. $y = 3x - 1$

D. $y = -2x$

(2) (四川 · 2011) 函数 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ 的奇偶性是 ().

A. 既是奇函数又是偶函数

B. 是奇函数但不是偶函数

C. 既不是奇函数也不是偶函数

D. 是偶函数但不是奇函数

【解析】(1) 用图像法或定义法: 明显定义域为 $\mathbf{R}$, 只需将 x 换成 $-x$, 与原函数作比较.

(2) 方法一, 利用函数奇偶性的判定方法: 先判断函数 $y = \tan x$ 和 $y = \frac{1}{x}$ 的奇偶性, 再判断函数 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ 的奇偶性.

方法二, 定义法: 定义域为 $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, x \neq 0\right\}$, 关于原点对称, 再判定 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

方法三, 特殊取值法: 对 x 取一对相反数, 如 $\frac{x}{4}$ 和 $-\frac{x}{4}$, 则有 $f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(-\frac{x}{4}\right)$.

【答案】(1) B; (2) D.

【? 解题反思】用取特殊值法判定函数的奇偶性, 简单实用. 例如, 判定函数 $f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}$ 的奇偶性, x 分别取 2 和 -2 时, 有 $f(2) = f(-2)$, 故为偶函数. 但这种方法只能用来验证或筛选相关说法, 因而只能用于填空题或选择题.

【例 2】(1) 若 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = 0$, 且 $f(2) = -3$, 则 $f(-2) =$ _____;

(2) 已知 $f(x) = \frac{2}{2^x + 1} + a$ 是奇函数, 则 $a =$ _____.

【解析】(1) 由恒等式 $f(x) + f(-x) = 0$ 可判断函数 $f(x)$ 为奇函数, 利用奇函数的符号性质可知 $f(-2) = -f(2)$.

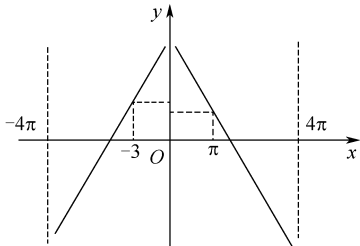
(2) 根据奇函数特有的性质, 即当 $f(0)$ 有意义时, $f(0) = 0$, 可得 $\frac{2}{2^0 + 1} + a = 0 \Rightarrow a = -1$.

【例 3】偶函数 $f(x)$ 在区间 $(-2\pi, 0)$ 上是增函数, 则 $f(-3)$ 与 $f(\pi)$ 的大小关系为 _____.

【解析】方法一: 解决这类问题的关键是把几个数放在同一个单调区间内. 由函数的奇偶性可知 $f(\pi) = f(-\pi)$, 因为 $-3 > -\pi$, 故 $f(-3) > f(-\pi)$.

方法二: 画出函数图像的草图, 利用图像确定大小.

如图, 函数图像开口向下, 其中 π 到对称轴的距离大于 -3 到对称轴的距离, 即 $|\pi - 0| > |-3 - 0|$, 故 $f(-3) > f(-\pi)$.



 解题反思

(1) 利用函数的单调性比较大小时, 所给定的数要放在同一个单调区间内, 若不在同一个区间, 则往往通过函数的奇偶性改变符号, 把数转换到同一单调区间内.

(2) 利用图像比较两个数离对称轴的距离的大小, 进而确定对应函数值的大小是一种重要方法. 对于开口向上的轴对称函数, 离对称轴距离越远的点对应的函数值越大. 开口向下的轴对称函数则相反.

【例4】判断并证明函数 $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ 的奇偶性.

证明: 由 $1-x^2 \neq 0$ 得 $x \neq \pm 1$, 函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x).$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ 为奇函数.

 解题反思 判断该函数奇偶性的另一种方法: 把分子、分母看作两个函数, 分子为奇函数, 分母为偶函数, 故 $f(x)$ 为奇函数. 特别提示: 这种方法只适用于判断, 不能用作证明.



课堂练习

1. 设函数在定义域 $[a, 2a+3]$ 上具有奇偶性, 则 $a =$ _____.
2. 若函数 $f(x)$ 为奇函数, 且 $f(2) = 3$, 则 $f(-2) =$ _____; 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(-1) = 3$, 则 $f(1) =$ _____.
3. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $[3, 7]$ 上是增函数, 最大值为 4, 那么 $f(x)$ 在 $[-7, -3]$ 上是 _____ 函数, 最小值是 _____.
4. 设定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增, 当 $f(a+1) < f(a)$ 时, a 的取值范围为 _____.



课外训练

一、选择题

1. 函数 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ 的图像关于 () 对称.
 - A. x 轴
 - B. y 轴
 - C. 原点
 - D. 直线 $y = x$
2. 下列函数是偶函数的是 ().
 - A. $y = x^2, x \in [-1, 2]$
 - B. $y = x^2 + x, x \in \mathbf{R}$
 - C. $y = 2|x| - 1, x \in \mathbf{R}$
 - D. $y = x^3$
3. 已知函数 $y = f(x)$ 的图像关于 $x = 1$ 对称, 且在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 设 $a = f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $b = f(2)$, $c = f(3)$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系是 ().
 - A. $c < b < a$
 - B. $b < a < c$
 - C. $b < c < a$
 - D. $a < b < c$
4. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 满足 $f(x) + g(x) = e^x$, 则 $g(x) =$ ().
 - A. $e^x - e^{-x}$
 - B. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
 - C. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
 - D. $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$
5. (新课标全国高考) 设偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = 2^x - 4$ ($x \geq 0$), 则 $\{x | f(x-2) > 0\} =$ ().



- A. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 4\}$ B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 4\}$
 C. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$ D. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$
6. 下列函数中既是奇函数又是增函数的是 ().
 A. $y = x + 1$ B. $y = -x^3$
 C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = x|x|$
7. 若函数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 是奇函数, 且 $f(1) < f(2)$, 则必有 ().
 A. $f(-1) < f(-2)$ B. $f(-1) > f(-2)$
 C. $f(-1) = f(-2)$ D. 不确定
8. 已知函数 $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 3$ 为偶函数, 则 $f(x)$ 在区间 $(-5, -2)$ 上是 ().
 A. 增函数 B. 减函数
 C. 部分为增函数, 部分为减函数 D. 无法确定增减性

二、填空题

9. 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(3)$ 、 $f(-4)$ 、 $f(-\pi)$ 的大小关系是_____.
10. 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)$ 和 $f(a^2 - a + 1)$ 的大小关系是_____.
11. $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, 且在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数, 那么满足 $f(a) + f(a^2) > 0$ 的 a 的取值范围是_____.

三、解答题

12. 若函数 $f(x) = x\left(\frac{a}{1-2^x} - \frac{1}{2}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq 0$) 是偶函数, 求 a 的值.

13. 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 满足 $f(1-a) < f(a)$, 又当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 是减函数, 求 a 的取值范围.

14. 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上, $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
 (1) 求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的解析式; (2) 求 $f(2)$ 的值.

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, m]$ 或 $[m+4, +\infty)$, 且是偶函数.

(1) 求 m 的值;

(2) 设 $x_1, x_2 \in [m+4, +\infty)$, 且 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$, 试比较 $f(-4)$ 与 $f(6)$ 的大小.

3.4 函数的周期性、对称性

课标要求	知识脉络
1. 了解函数周期的概念 2. 了解求函数周期的方法 3. 初步掌握利用函数周期性求值或求给定区间的函数解析式的方法	利用恒等式求周期 利用对称性求周期 } 函数周期的求法 函数的周期性 { 函数周期的应用 大数化小数求值 由一个区间变换到另一个区间求解析式 函数周期的概念



知识清单

一、周期函数

在函数 $y=f(x)$ 的定义域内存在一个实数 $T \neq 0$, 如果 $f(x+T)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, T 叫作周期; 当 T 取最小正数时, 这个最小正数叫作最小正周期. 若函数 $y=f(x)$ 的一个最小正周期为 T , 则 kT ($k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$) 也是这个函数的周期.

二、常见周期函数的恒等式

(1) 若对于定义域内的任意 x , 总有 $f(x+a)=f(x+b)$, 其中, a, b 为常数, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且它的一个正周期为 $|b-a|$.

(2) 若对于定义域内的任意 x , 总有 $f(x+a)+f(x)=0$ 或 $f(x+a)=-f(x)$, 其中, a 为常数, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且它的一个正周期为 $2|a|$.



(3) 若对于定义域内的任意 x , 总有 $f(x+a) = \frac{1}{f(x)}$ 或 $f(x+a)f(x) = 1$, 其中, a 为常数, 则 $f(x)$ 为周期函数, 且它的一个正周期为 $2|a|$.

三、函数的对称性

(1) 函数 $f(x)$ 满足恒等式 $f(m+x) = f(n-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于直线对称, 其对称轴为直线 $x = \frac{m+n}{2}$.

(2) 函数 $f(x)$ 满足恒等式 $f(m+x) = -f(n-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于点中心对称, 其对称中心为 $\left(\frac{m+n}{2}, 0\right)$.

(3) 函数 $f(x)$ 满足恒等式 $f(m+x) + f(n-x) = c$, 则函数 $f(x)$ 的图像关于点中心对称, 其对称中心为 $\left(\frac{m+n}{2}, \frac{c}{2}\right)$.



方法清单

【例 1】(1) $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+4) = f(x)$, 若 $f(-3) = 2$, 则 $f(2023) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2-x) = f(2+x)$, 若 $f(-3) = -2$, 则 $f(2025) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】(1) 由 $f(x+4) = f(x)$ 得函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$, 故 $f(2023) = f(4 \times 505 + 3) = f(3) = -f(-3) = -2$.

(2) 由 $f(2-x) = f(2+x)$ 确定函数的对称轴为 $x=2$. 又因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $x=0$ 也是对称轴. 由两对称轴确定函数的周期 $T=4$, $f(2025) = f(4 \times 506 + 1) = f(1)$.

在 $f(2-x) = f(2+x)$ 中, 令 $x=1$, 得 $f(1) = f(3) = f(-3) = -2$.

【例 2】 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)f(x+2) = 13$.

(1) 证明: $f(x)$ 为周期函数;

(2) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(7)$ 的值.

【解析】(1) 用 $x+2$ 代替 x , 用 $f(x+2)$ 作为桥梁, 得出 $f(x)$ 与 $f(x+a)$ 的关系. (2) 对 x 取特殊值.

(1) **证明:** 用 $x+2$ 代替 x , 得 $f(x+2)f(x+4) = 13$.

又 $f(x)f(x+2) = 13$, 故 $f(x) = f(x+4)$.

$\therefore f(x)$ 为周期函数

(2) **解:** 在 $f(x)f(x+2) = 13$ 中, 令 $x=1$, 得 $f(1)f(3) = 13$.

由 $f(1) = 2$ 得 $f(3) = \frac{13}{2}$, 故 $f(7) = f(4+3) = f(3) = \frac{13}{2}$.

【例 3】 已知 $f\left(x - \frac{1}{4}\right)$ 为偶函数, $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 为奇函数, 当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 求 $x \in (3, 6]$ 时的解析式.

【解析】 根据已知条件确定函数的周期, 再进行平移求出函数的解析式.

解: $\because f\left(x - \frac{1}{4}\right)$ 为偶函数, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{1}{4}$ 对称.

$\because f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 为奇函数, $\therefore$ 函数 $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 的图像关于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 对称.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为周期函数, 且周期 $T = 4 \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = 3$.

设 $x \in (3, 6]$, 则 $x - 3 \in (0, 3]$,

$$\therefore f(x) = f(x-3) = (x-3)^2 - 2(x-3) = x^2 - 8x + 15,$$

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 15, & 3 < x \leq 6 \end{cases}.$$

❓ 解题反思

(1) 若 $f(x+a)$ 为偶函数, 则说明函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称; 若 $f(x+b)$ 为奇函数, 则说明函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(b,0)$ 对称.

(2) 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称, 同时关于点 $(b,0)$ 对称, 则其周期为 $4|a-b|$.

 课堂练习

1. 若 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 、周期为 5 的奇函数，且满足 $f(1)=1, f(2)=3$ ，则 $f(8)-f(4)$ 的值为 ()。
- A. -1 B. 1
C. -2 D. 2
2. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x-4)=-f(x)$ ，且在区间 $[0,2]$ 上是增函数。则 ()。
- A. $f(-25)<f(11)<f(80)$ B. $f(80)<f(11)<f(-25)$
C. $f(11)<f(80)<f(-25)$ D. $f(-25)<f(80)<f(11)$
3. (四川·2018) 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且对任意实数 x ，都有 $f(x+2)=f(x)$ ，当 $0<x<1$ 时， $f(x)=x+1$ ，则 $f(-1)+f(0)+f\left(\frac{9}{2}\right)=$ _____。(用数字作答)
4. (四川·2021) 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(-x)=4-f(x)$ ，若函数 $y=\frac{1}{x}+2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像的交点的坐标是 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, (x_{30}, f(x_{30}))$ ，记 $x_i+f(x_i)=p_i (i=1,2,\dots,30)$ ，则 $p_1+p_2+\dots+p_{30}=$ _____。

3.5 函数性质的综合应用举例

课标要求	知识脉络
初步掌握利用函数的性质解决函数的综合性问题	<pre> graph LR A[函数的实际应用] --- B[方法] A --- C[类型] B --- B1[数形结合法] B --- B2[分离参数法] B --- B3[最值法] B --- B4[其他方法] C --- C1[三大性质的综合] C --- C2[以二次函数为母函数的综合] C --- C3[抽象函数] C --- C4[其他综合] </pre> 数形结合法 分离参数法 最值法 其他方法 方法 — 函数的实际应用 — 类型 三大性质的综合 以二次函数为母函数的综合 抽象函数 其他综合

方法清单

一、分离奇（偶）函数法求值

【例 1】 已知函数 $f(x) = a\sin x - bx^3 + 2$, $f(3) = 7$, 则 $f(-3) =$.

【解析】在 $f(x)$ 中，剥离出一个奇函数 $g(x) = a\sin x - bx^3$ ，则 $f(x) = g(x) + 2$ ，即 $g(x) = f(x) - 2$ ，则 $g(3) = f(3) - 2 = 7 - 2 = 5$ ， $g(-3) = -5$ ，故 $f(-3) = g(-3) + 2 = -3$.

❓ 解题反思 分离奇(偶)函数法求值,是指从一个非奇非偶函数 $f(x)$ 中分离出其中的奇函数或偶函数 $g(x)$,由已知 $f(a)$ 求 $f(-a)$ 的值的方法.具体为设 $f(x)=g(x)+h(x)$,其中, $g(x)$ 为奇函数或偶函数,则 $g(x)=f(x)-h(x)$,即 $g(a)=f(a)-h(a)$,由函数的奇偶性求出 $g(-a)$ 的值,故有 $f(-a)=g(-a)+h(-a)$.



二、利用函数的周期性、对称性求值或解析式

【例 2】(四川·2019) 对任意实数 x , 有 $f(x)+f(-x)=0$, $f(-x-2)=-f(x)$ 恒成立, 当 $x \in (0,1)$ 时, $f(x)=\sin \pi x+1$.

(1) 求 $f(0)$ 、 $f(1)$;

(2) 求当 $x \in (11,13)$ 时, $f(x)$ 的解析式.

【解析】(1) 利用赋值法即可求解. (2) 先判定函数的周期性和奇偶性, 再利用函数的这两个性质求出各区间的函数解析式.

解: (1) $\because f(-x)+f(x)=0$, $\therefore f(-1)+f(1)=0$, $f(-0)+f(0)=0$, $\therefore f(0)=0$.

$\because f(-x-2)=-f(x)$, 令 $x=-1$, 可得 $f[-(-1)-2]=-f(-1)$, 即 $f(-1)=-f(-1)$.

$\therefore f(-1)=0$, $f(1)=0$.

(2) $\because f(-x)+f(x)=0$, $\therefore$ 函数 $f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-x-2)=-f(x+2)=-f(x)$.

$\therefore f(x+2)=f(x)$, $\therefore$ 周期 $T=2$, $\therefore f(12)=f(0)=0$.

设 $11 < x < 12$, 则 $-1 < x-12 < 0$, 即 $0 < 12-x < 1$.

$\therefore f(12-x)=\sin \pi(12-x)+1=-\sin \pi x+1$. 又 $f(12-x)=f(-x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)=\sin \pi x-1$.

设 $12 < x < 13$, 则 $0 < x-12 < 1$.

$\therefore f(x-12)=\sin \pi(x-12)+1=\sin \pi x+1$. 又 $f(x-12)=f(x)$,

$\therefore f(x)=\sin \pi x+1$.

$$\text{故 } f(x)=\begin{cases} \sin \pi x-1, & 11 < x < 12 \\ 0, & x=12 \\ \sin \pi x+1, & 12 < x < 13 \end{cases}.$$

【? 解题反思】 关于函数的平移问题, 有以下说明.

(1) 函数的平移只能改变位置, 而不能改变函数图像的形状, 原函数若是分段函数, 平移后仍为分段函数.

(2) 求区间 D 的函数时, 原则上设 $x \in D_i$.

(3) 将 x 转移到另一个区间常见的方法有:

① 通过函数的周期性进行转移;

② 先通过函数的对称性转移, 再通过周期性进行转移, 或者先通过函数的周期性转移, 再通过对称性进行转移.

(4) 对 x 赋予特殊值求函数值.

三、解抽象不等式

(1) 抽象不等式的概念: 没有给出具体不等式, 利用抽象函数 $f(x)$ 表示的不等式.

(2) 特征: 已知函数的单调性、奇偶性、特殊函数值或某个特殊点, 求函数满足的不等式的解集.

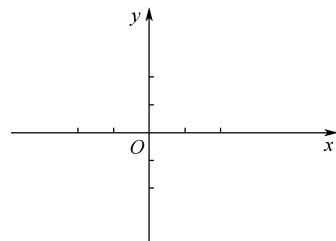
(3) 方法: ① 图像法 (数形结合法), 根据已知条件画出函数的大致图像, 结合图像找到对应位置, 确定不等式成立满足的条件, 进而求出不等式的解集; ② 利用函数的单调性, 脱去函数符号, 进而建立不等式. 不等式中有常数时, 往往把常数转化为含函数符号的函数值, 如 $6=f(3)$.

【例 3】 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数, 且 $f(-2)=0$, 在如图坐标系中画出函数 $f(x)$ 的大致图像.

根据图像回答下列问题.

(1) 不等式 $f(x)>0$ 的解集为_____;

(2) 不等式 $xf(x)<0$ 的解集为_____;



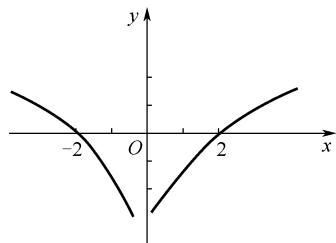
(3) 不等式 $\frac{f(x)}{x} > 0$ 的解集为_____.

【解析】根据题意画出函数 $f(x)$ 图像的草图.

(1) 不等式 $f(x) > 0$ 的解集取 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$ 两点向外的部分, 即 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 不等式 $xf(x) < 0$ 的解集取二、四象限部分, 即 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

(3) 不等式 $\frac{f(x)}{x} > 0$ 的解集取一、三象限部分, 即 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.



四、抽象函数及其应用

抽象函数是指没有给出具体的函数解析式或图像, 只给出一些函数符号及其满足的条件函数. 抽象函数的应用一般是给定函数 $f(x)$ 的某些性质, 证明它的其他性质, 或利用这些性质求值, 解抽象不等式、方程等.

【例4】(四川·2022) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2y) = f(x) + 2f(y)$, 且 $f(1) = -1$.

(1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $f\left(\frac{2}{3}\right)$ 的值;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) < 0$ 恒成立, 判断函数 $f(x)$ 的单调性并证明.

解: (1) 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 0$; 令 $x = 0$, 得 $f(2y) = 2f(y)$.

所以 $f(x+2y) = f(x) + f(2y)$, 即 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

$$\therefore f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{同理, } f(1) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = -1, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}, \text{ 所以 } f\left(\frac{2}{3}\right) = 2f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}.$$

(2) 设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 - x_1 > 0$.

$$\therefore f(x_2) = f[(x_2 - x_1) + x_1] = f(x_2 - x_1) + f(x_1), \therefore f(x_2) - f(x_1) = f(x_2 - x_1).$$

$$\because x > 0 \text{ 时, } f(x) < 0 \text{ 恒成立, } \therefore f(x_2 - x_1) < 0, \text{ 即 } f(x_1) < f(x_2).$$

故函数 $f(x)$ 为减函数.

【? 解题反思】抽象函数问题的常用方法和解题技巧如下.

(1) 模型函数法: 把抽象函数转化为具体函数模型, 一般用于选择题或填空题.

(2) 特殊变形法: 对函数的单调性的判断仍然要紧扣单调性的定义, 结合题目所给的性质和相应的条件, 对任意 x_1, x_2 在所给区间上比较 $f(x_1) - f(x_2)$ 与 0 的大小, 有时根据需要进行适当的变形, 如 $x_1 = x_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}$,

$$x_1 = (x_1 + x_2) - x_2 \text{ 或 } x_1 = (x_1 - x_2) + x_2.$$

(3) 赋值法: 对字母赋予特殊值判断函数的单调项、奇偶性等, 主要从以下几方面考虑.

① 令 $x = -2, -1, 0, 1, 2$ 等特殊值, 求抽象函数的函数值.

② 令 $x = x_2, y = x_1$, 且 $x_1 < x_2$, 判断抽象函数的单调性.

③ 令 $y = -x$, 判断函数的奇偶性.

④ 将 x 替换为 $x + T$, 确定抽象函数的周期.



课堂练习

1. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x) = f(x) + 3x$ 为 ().

A. 偶函数

B. 奇函数

C. 非奇非偶函数

D. 不能确定

2. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = 2x^3 + x^2$, 则 $f(2) =$ _____.



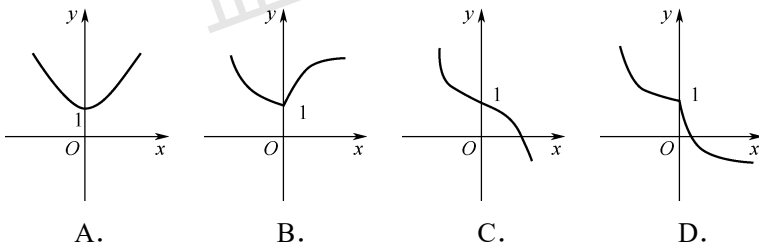
3. 已知 $f(x) = ax^{2023} + \frac{1}{x} + 3$, 若 $f(3) = 5$, 则 $f(-3) = \underline{\hspace{2cm}}$.



课外训练

一、选择题

- 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则下列各式成立的是 ().
 A. $f(-2) > f(0) > f(1)$ B. $f(-2) > f(-1) > f(0)$
 C. $f(1) > f(0) > f(-2)$ D. $f(1) > f(-2) > f(0)$
- 已知函数 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx - 8$, 且 $f(1) = 10$, 那么 $f(-1)$ 的值为 ().
 A. -18 B. -26
 C. -10 D. 10
- $f(x)$ 为奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上, $f(x) = x(1-x)$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的解析式为 ().
 A. $f(x) = x(1-x)$ B. $f(x) = -x(1+x)$
 C. $f(x) = x(1+x)$ D. $f(x) = -x(1-x)$
- 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x) = f(2-x)$, 若 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上是减函数, 则 $f(x)$ ().
 A. 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是增函数.
 B. 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是减函数.
 C. 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是增函数.
 D. 在区间 $[-2, -1]$ 上是减函数, 在区间 $[3, 4]$ 上是减函数.
- (四川·2020) 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 既是奇函数, 又是周期函数, T 是它的一个周期, 则方程 $f(x) = 0$ 在闭区间 $[-2T, 2T]$ 上的实数根的个数可能是 ().
 A. 1 B. 5 C. 9 D. 12
- 函数 $g(x) = f(x) - f(-x) + 1$ 可能的图像是 ().



- 设函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x \geq 0 \\ g(x), & x < 0 \end{cases}$, 则 $f(-7) = ()$.
 A. 3 B. -3 C. 2 D. -2
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 对任意实数 $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0$, 则 a 的取值范围是 ().
 A. $-3 \leq a < 0$ B. $-3 \leq a \leq -2$ C. $a \leq -2$ D. $a < 0$

二、填空题

- 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 若 $x \geq 0$ 时, 都有 $f(x+2) = f(x)$, 且当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = \log_2(x+1)$, 则 $f(-2023) + f(2024) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- 已知函数 $f(x)$ 为奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 且 $f(3) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x-1)}{x} > 0$ 的解集为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

11. 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数满足 $f(-x) = 6 - f(x)$, 若函数 $y = \frac{1}{x} + 3$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像的交点坐标为 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \dots, ((x_{40}, f(x_{40})))$, 且 $x_i + f(x_i) = P_i$ ($i = 1, 2, \dots, 40$), 则 $P_1 + P_2 + \dots + P_{40} =$ _____.

三、解答题

12. 已知函数 $f(x)$, 对任意实数 x , 均有 $f(x) = -2f(x+2)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的解析式为 $f(x) = x^2 - 2x$, 求 $f(-1)$ 、 $f(2.5)$ 的值.

13. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 对任意实数 x , 都有 $f\left(\frac{3}{2} + x\right) = f\left(\frac{3}{2} - x\right)$.

(1) 证明: $y = \frac{3}{2} - xf(x)$ 是周期函数, 并指出周期;

(2) 若 $f(1) = 2$, 求 $f(2) + f(3)$ 的值.

14. 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x)$ 为增函数, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

(1) 证明: $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$;

(2) 已知 $f(3) = 1$, 且 $f(a) > f(a-1) + 2$, 求 a 的取值范围.



3.6 二次函数图像及其性质

课标要求	知识脉络
1. 了解二次函数的三种表达式 2. 理解二次函数的图像和基本性质 3. 掌握二次函数的单调性、奇偶性和对称性 4. 初步掌握用二次函数模型解决实际问题	二次函数 特殊性质 - 单调性 - 奇偶性 表达式 - 一般式 - 顶点式 - 交点式 应用 - 求解析式 - 求最值问题 - 根的分布问题 - 恒不等式问题 - 建模解决实际问题 图像及基本性质 - 开口方向 - 对称性 - 顶点坐标 - 判别式Δ - 最值



知识清单

一、二次函数的表达式

- (1) 一般式: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a}$.
- (2) 顶点式: $y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$), 顶点坐标为 (h, k) .
- (3) 交点式: $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ ($a \neq 0$) (x_1, x_2 表示图像与 x 轴的两个交点的横坐标), 对称轴方程为 $x = \frac{x_1+x_2}{2}$.

说明: 二次函数是非常重要的考点, 在三种表达式中, 顶点式最能体现函数特征, 包括顶点坐标、对称轴、单调区间、最大(小)值, 因此要掌握通过配方法把一般式化为顶点式的方法. 在涉及抛物线平移时, 也需要用顶点式来确定平移方式.

二、二次函数的图像和性质

图像			
Δ 与交点的关系	$\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 有两个交点	$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 有一个交点	$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 无交点
开口方向	$a > 0 \Leftrightarrow$ 开口向上; $a < 0 \Leftrightarrow$ 开口向下		
顶点坐标、对称轴	顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴方程为 $x = -\frac{b}{2a}$		

续表

单调区间	$a > 0$	增区间为_____, 减区间为_____.		
	$a < 0$	增区间为_____, 减区间为_____.		
最值	$a > 0$	$x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow y$ 有最小值_____.		
	$a < 0$	$x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow y$ 有最大值_____.		
x 的范围 对应 y 值 的范围	$a > 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2 \Rightarrow y < 0$ $x_1 < x < x_2 \Rightarrow y > 0$	$x \neq -\frac{b}{2a} \Rightarrow y > 0$	$x \in \mathbf{R}, y > 0$ 恒成立
	$a < 0$	$x < x_1$ 或 $x > x_2 \Rightarrow y > 0$ $x_1 < x < x_2 \Rightarrow y < 0$	$x \neq -\frac{b}{2a} \Rightarrow y < 0$	$x \in \mathbf{R}, y < 0$ 恒成立



方法清单

【例 1】若 $f(x) = 2x^2 + (b-1)x + c$ 是偶函数, 则 $b =$ _____.

【解析】二次函数 $f(x)$ 是偶函数, 则对称轴为 $x = -\frac{b-1}{4} = 0$, 即 $b = 1$.

【答案】1.

【? 解题反思】函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 为偶函数的充要条件是 $b = 0$. (与 a, c 的取值无关)

【例 2】若函数 $f(x) = x^2 + 4(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 6)$ 上是减函数, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $a \leq -2$

B. $a > -2$

C. $a < 4$

D. $a > 4$

【解析】结合函数图像, 确定对称轴所处的位置. 对称轴为 $x = -\frac{4(a-1)}{2} (-\infty, 6)$, 即 $-\frac{4(a-1)}{2} \geq 6$.

【答案】A.

【? 解题反思】若二次函数在区间 D 上是增函数或减函数, 则称这个函数在区间 D 上具有单调性; 若二次函数在区间 D 上具有单调性, 则其对称轴一定不在区间 D 内.

(1) 若二次函数在 $(m, +\infty)$ 上是单调函数, 则其对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, 在 $(m, +\infty)$ 内, 即 $-\frac{b}{2a} \leq m$.

(2) 若二次函数在 $(-\infty, n)$ 上具有单调性, 则其对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, 在 $(-\infty, n)$ 内, 即_____.

(3) 若二次函数在 (m, n) 上不具有单调性, 则其对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$, 在 (m, n) 内, 即_____.

(4) m, n 是函数 $f(x)$ 的区间 D 上的任意两点, 若 $m \neq n$, 有 $f(m) \neq f(n)$, 则说明_____.

【例 3】(四川 · 2013) 已知二次函数 $f(x)$, $f(x+1) = f(1-x)$, 且图像在 y 轴上的截距为 -3 , 被 x 轴截得的线段长为 4.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

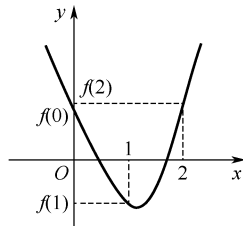
(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最大值和最小值.

【解析】(1) 由 $f(x+1) = f(1-x)$ 可知, 抛物线对称轴为 $x = 1$; 由被 x 轴截得的线段长为 4, 可求出抛物线与 x 轴的两个交点的坐标. 设 $f(x)$ 为交点式, 并把点 $(0, -3)$ 代入求待定系数的值.

(2) 用数形结合法, 画出函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的图像, 找出最低点、最高点. 也可用绝对值法, 把函数解析式化为顶点式, 在 $[-2, 3]$ 上确定 $|x-h|$ 的最大值和最小值.

解: (1) 由 $f(x+1) = f(1-x)$ 可知, 函数 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x = 1$.

$\because f(x)$ 的图像被 x 轴截得的线段长为 4,





总复习精要(数学)

∴函数 $f(x)$ 的图像必经过点 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$.

设 $f(x) = a(x+1)(x-3)$, 由题意知 $f(x)$ 的图像经过点 $(0,-3)$,

$$\therefore a(0+1)(0-3) = -3 \Rightarrow a = 1.$$

故 $f(x) = (x+1)(x-3)$, 即 $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

(2) 由函数图像可知 $f_{\min}(x) = f(1) = -4$.

在两个端点中, -2 离对称轴的距离比 3 离对称轴的距离大, 故 $f_{\max}(x) = f(-2) = 5$.

❓ 解题反思

(1) 二次函数常见的几个恒等式的作用如下.

$$f(m+x) = f(n-x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 图像的对称轴为 } x = \frac{m+n}{2}.$$

$$f(m+x) = -f(n-x) \Leftrightarrow f(x) \text{ 图像的对称轴中心坐标为 } \left(\frac{m+n}{2}, 0\right).$$

$$f(x+m) = f(x+n) \Leftrightarrow f(x) \text{ 是周期函数, 且它的一个正周期为 } |n-m|.$$

(2) 求二次函数在给定区间的值域的方法如下.

① 数形结合法: 画出抛物线在给定区间的图像, 找出最高点和最低点.

② 把函数解析式转化为顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$, 在给定区间内确定 $|x-h|$ 的最大值和最小值, 进而确定函数 $f(x)$ 的最大值和最小值.

【例 4】 若方程 $7x^2 - (k+13)x + k^2 - k = 0$ 的两根满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 求实数 k 的取值范围.

【解析】 把方程和函数联系起来, 由方程的根的情况作出二次函数 $f(x) = 7x^2 - (k+13)x + k^2 - k$ 的大致图像, 抓住 0 、 1 、 2 三个界点对定函数值的符号, 用 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(2)$ 建立不等式组.

解: 设 $f(x) = 7x^2 - (k+13)x + k^2 - k$.

$$\text{由题意得 } \begin{cases} k^2 - k > 0 \\ 7 - k - 13 + k^2 - k > 0 \\ 28 - 2(k+13) + k^2 - k > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 2 < k < 1 + \sqrt{7} \text{ 或 } 1 - \sqrt{7} < k < 0.$$

∴实数 k 的范围是 $(2, 1 + \sqrt{7}) \cup (1 - \sqrt{7}, 0)$.

❓ 解题反思 由一元二次方程根的分布求参数范围的方法: 利用方程根分布的界点画出对应二次函数

的大致图像. 从以下四个方面考虑建立不等式(组): ①开口方向; ②判别式的符号; ③对称轴的位置;

④利用界点对应的函数值(界点值)的符号建立相应的不等式(组). 注意, 当界点值的符号已能够确定判别式的符号或对称轴的位置时, 无须考虑判别式或对称轴的范围.



课堂练习

1. 已知二次函数 $f(x) = 3x^2 + mx + c$ 在区间 $[-1, 3]$ 上不具有单调性, 则 m 的取值范围是_____.
2. 若方程 $x^2 - mx + m - 1 = 0$ 有一正一负两个根, 则实数 m 的取值范围是_____.
3. 已知函数 $f(x) = -2(x-1)^2 + 1$, $x \in [-2, 3]$, 求 $f(x)$ 的最大值和最小值.



课外训练

一、选择题

1. (四川·2008) 已知二次函数 $y = -2x^2 + 3x + 2$, 则 ().

A. 当 $x = -2$ 时有最大值 $\frac{1}{2}$

B. 当 $x = \frac{3}{4}$ 时有最大值 $\frac{25}{8}$

C. 当 $x = -2$ 时有最小值 $\frac{1}{2}$

D. 当 $x = \frac{3}{4}$ 时有最小值 $\frac{25}{8}$

2. $y = ax^2 + bx + c$ 的图像如图所示, 下列结论正确的是 ().

A. $abc > 0$

B. $a + b + c < 0$

C. $a - b + c > 0$

D. $2c < 3b$

3. 二次函数 $f(x) = 2x^2 + (k+2)x + k$ 的图像的顶点在 x 轴上, 则 $k =$ ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

4. 已知二次函数 $f(x) = 2x^2 + mx$ 关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $m =$ ().

A. 2

B. -2

C. 4

D. -4

5. 若函数 $f(x) = 3x^2 + kx + 2024$ 在区间 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 上递增, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $k \geq 2$

B. $k \leq 2024$

C. $k \geq 2024$

D. $k \geq -4$

6. (四川 · 2019) 函数 $f(a) = (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-3)^2 + \cdots + (a-9)^2 + (a-10)^2$ 的单调递增区间为 ().

A. $[5, +\infty)$

B. $[5.5, +\infty)$

C. $[6, +\infty)$

D. $[6.5, +\infty)$

7. 已知函数 $f(x) = -x^2 + 2x + m$, 若 $|a-1| > |b-1|$, 则下列正确的是 ().

A. $f(a) > f(b)$

B. $f(a) < f(b)$

C. $f(a) = f(b)$

D. $f(a) = -f(b)$

8. 函数 $f(x) = (m^2 - 4)x^2 - 5x + (m+2)$ 是奇函数, 则 $m =$ ().

A. $m = 2$

B. $m = -2$

C. $m = \pm 2$

D. $m \in \mathbb{R}$

9. 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$ 的增区间为 ().

A. $(-\infty, -1]$

B. $[6, +\infty)$

C. $(-\infty, -6]$

D. $[1, +\infty)$

二、填空题

10. (四川 · 2007) 已知二次函数 $y = ax^2 - 2x + \frac{5}{2}$ 的最小值为 1, 则实数 a 的值是_____.

11. 若二次函数 $y = -x^2 + 2mx + 3$ 在 $(-\infty, 2)$ 是增函数, 则 m 的取值范围是_____.

12. 方程 $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ 的一个根大于 5, 另一个根小于 5, 则实数 m 的取值范围是_____.

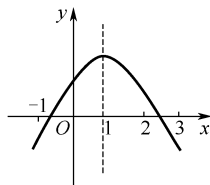
13. 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-4, 7]$ 上为增函数, 则 $y = f(x-3)$ 的增区间为_____.

三、解答题

14. 二次函数 $f(x)$ 的最小值为 1, 且 $f(0) = f(2) = 3$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

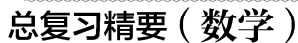
(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.



15. (四川 · 2020) 设函数 $f(x) = mx^2 + nx + p$ 的图像过坐标原点, 且对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) = f(2-x)$.

(1) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 -1, 求 m, n 的值;

(2) 若对任意 $m \in [1, 2]$, 都有 $f(x) < 6$, 求实数 x 的取值范围.



3.7 函数的实际应用举例



知识清单

一、图像信息问题

根据信息画出图像，从图像中提取信息.

二、二次函数的应用

二次函数的应用步骤一般如下:

第一步，建立二次函数关系，列出解析式，并根据实际情况写出定义域.

第二步, 将解析式化为顶点式.

第三步, 求出函数的最大值或最小值.

三、分段函数的应用

第一步, 根据 x 在不同范围内的值或不同范围内的图像, 分别列出相应的函数解析式.

第二步, 写成分段函数的形式.

第三步, 根据题意利用分段函数解决实际问题. 即分解→综合→应用.

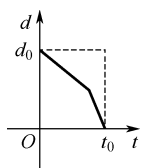
四、解函数应用题的基本步骤

1. 读题：弄清题中的相关量，概括出数学实质.
2. 引进数学符号，建立数学模型：建立函数关系式，将实际问题转化为数学问题，实现问题的数学化.
3. 求解：利用数学方法将得到的常规数学问题予以解答，求得结果.
4. 检验：把得出的数学结果放回到实际问题中检验，得出符合条件的结论.

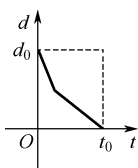


方法清单

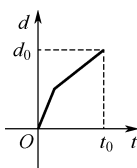
【例 1】某学生离家去学校，由于怕迟到，所以一开始就跑步，等跑累了再走余下的路程. 在下图中，纵轴表示该学生与学校的距离，横轴表示出发后的时间，则四个图形中较符合该学生走法的是 ().



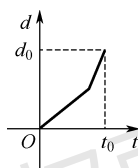
A.



B.



C.



D.

【解析】明确两个变量 t 和 d ， d 随时间的增大而变小，排除选项 C、D；速度先快后慢，排除选项 A.

【答案】B.

【例 2】某商场销售一批衬衫，每件盈利 40 元，每天可以售出 20 件. 为扩大销售，增加盈利，减少库存，商场决定采取适当的降价措施. 价格调查发现，若每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可以多售出 2 件. 设每件衬衫降价 x (元) 时，商场盈利 y (元).

- (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式；
- (2) 每件衬衫降价多少元时，商场每天盈利最多？最多盈利是多少？

【解析】

	每件盈利/元	销售量/件	每天盈利/元
原来	40	20	800
现在	$40 - x$	$20 + 2x$	$(40 - x)(20 + 2x)$

解：(1) 调整价格后，每件衬衫的利润为 $(40 - x)$ 元，每天销售量为 $(20 + 2x)$ 件，则利润 $y = (40 - x)(20 + 2x)$ ， $0 \leq x \leq 40$ 且 $x \in \mathbf{Z}$.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y &= (40 - x)(20 + 2x) \\
 &= -2x^2 + 60x + 800 \\
 &= -2(x - 15)^2 + 1025
 \end{aligned}$$

$\because -2 < 0$, $\therefore$ 当 $x = 15$ 时， y 有最大值 1025.

故每件衬衫降价 15 元时，商场每天盈利最多，最多盈利是 1025 元.

【例 3】(四川·2016) A 市居民生活用水原收费标准为 4 元/米³. 为了保护生态，鼓励节约用水，A 市从 2016 年 1 月 1 日起，调整居民生活用水收费标准，具体规定如下.

第一阶梯：每户月用水量不超过 25 米³ 的部分 (含 25 米³)，按 3 元/米³ 计费.

第二阶梯：每户月用水量超过 25 米³，但不超过 35 米³ 的部分 (含 35 米³)，按 4 元/米³ 计费.

第三阶梯：每户月用水量超过 35 米³ 的部分，按 6 元/米³ 计费.

例如，当某户某月用水量为 30 米³ 时，该户当月应缴水费为 $3 \times 25 + 4 \times (30 - 25) = 95$ (元).

假设某户月用水量为 x 米³，当月应缴水费为 y 元.

- (1) 求调整收费标准后， y 与自变量 x 的函数解析式；



(2) 当某户月用水量超过多少米³时, 按调整后收费标准应缴水费超过按原收费标准应缴水费?

【分析】分段函数是热点问题, 主要考虑自变量在每一段变化范围内所对应的法则不同, 关键是弄清楚分段的条件和该如何分段, 先将其作为几个独立的问题, 将各段的变化规律分别找出来, 再将其合在一起, 要注意各段变化的范围, 特别注意端点值的选取.

解: (1) 由题意可知, 当 $0 < x \leq 25$ 时, $y = 3x$;

当 $25 < x \leq 35$ 时, $y = 3 \times 25 + 4(x - 25) = 4x - 25$;

当 $x > 35$ 时, $y = 3 \times 25 + 4 \times (35 - 25) + 6(x - 35) = 6x - 95$.

所以调整收费标准后, y 与自变量 x 的函数解析式为 $y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 25 \\ 4x - 25, & 25 < x \leq 35 \\ 6x - 95, & x > 35 \end{cases}$.

(2) 由题意可知, 当 $0 < x \leq 25$ 时, 若 $y = 3x > 4x$, x 不存在;

当 $25 < x \leq 35$ 时, 若 $y = 4x - 25 > 4x$, x 不存在;

当 $x > 35$ 时, $y = 6x - 95 > 4x$, 解得 $x > 47.5$.

因此, 当某户月用水量超过 47.5 米³时, 按调整后收费标准应缴水费超过按原收费标准应缴水费.



课堂练习

某商场在节日期间举行促销活动, 规定:

① 若所购商品标价不超过 200 元, 则不给予优惠;

② 若所购商品标价超过 200 元但不超过 500 元, 则超过 200 元的部分给予 9 折优惠;

③ 若所购商品标价超过 500 元, 其 500 元内 (含 500 元) 的部分按第②条给予优惠, 超过 500 元的部分给予 8 折优惠.

(1) 写出节省钱数 y (元) 的与所购商品标价 x (元) 的函数关系式;

(2) 某人来该商场购买了一件家用电器, 共节省 330 元, 则该家用电器的标价为多少元?



课外训练

一、选择题

1. 一个小球被抛出后, 如果距离地面的高度 h (米) 和运行时间 t (秒) 的函数解析式为 $h = -5t^2 + 10t + 1$, 那么小球到达最高点时距离地面的高度是 () 米.

A. 1

B. 3

C. 5

D. 6

2. 将一根 12 米长的木条锯成几段, 围成一个日字形窗框, 则该窗户的最大透光面积为 () 米².

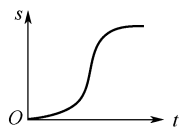
A. 36

B. 6

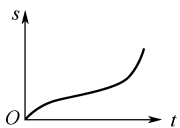
C. 9

D. 24

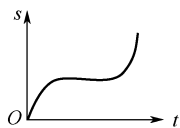
3. 汽车经过启动、加速行驶、匀速行驶、减速行驶之后停车, 若把这一过程中汽车的行驶路程 s 看作时间 t 的函数, 其图像可能是 ().



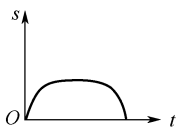
A.



B.



C.



D.

4. (四川·2019) 已知甲、乙两个城市相距 120 千米, 小王开汽车以 100 千米/小时匀速从甲城市驶往乙城市, 到达乙城市后停留 1 小时, 再以 80 千米/小时匀速返回甲城市. 汽车从甲城市出发时, 时间 x (小时) 记为 0. 在从甲城市出发至返回到甲城市的这段时间内, 该汽车离甲城市的距离 y (千米) 表示成时间 x (小时) 的函数为 ().

$$A. y = \begin{cases} 100x, & 0 \leq x \leq 12 \\ 80x, & x > 12 \end{cases}$$

$$B. y = \begin{cases} 100x, & 0 \leq x \leq 12 \\ 120 - 80x, & x > 12 \end{cases}$$

$$C. y = \begin{cases} 100x, & 0 \leq x \leq 1.2 \\ 120, & 1.2 < x \leq 2.2 \\ 120 - 80x, & 2.2 < x \leq 3.7 \end{cases}$$

$$D. y = \begin{cases} 100x, & 0 \leq x \leq 1.2 \\ 120, & 1.2 < x \leq 2.2 \\ 296 - 80x, & 2.2 < x \leq 3.7 \end{cases}$$

二、填空题

5. (四川·2017) 某公司为落实供给侧改革, 决定加强高科技产品的生产. 已知该公司 2016 年生产的高科技产品的产值占总产值的 20%, 计划 2017 年的总产值比上一年增长 10%, 且使 2017 年的高科技产品的产值占总产值的 24%, 则该公司 2017 年生产的高科技产品的产值应比 2016 年生产的高科技产品的产值增长_____.

6. 某公司生产一种电子仪器的固定成本为 20000 元, 每生产一台该仪器需增加投入 100 元, 已知总收入满足函数 $R(x) = \begin{cases} 400x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 400 \\ 80000, & x > 400 \end{cases}$, 其中, x 是该仪器的月产量.

(1) 将利润表示为月产量的函数 $f(x)$, 则 $f(x) =$ _____.

(2) 当月产量为_____台时, 公司所获利润最大. (总收入 = 总成本 + 利润)

三、解答题

7. (四川·2015) 某商品的进价为 50 元, 根据市场调查, 如果售价为 50 元, 则每天可卖出 400 件, 售价每上涨 1 元, 每天少卖 10 件. 设该商品售价为 x (元) ($x \geq 50, x \in \mathbf{N}$).

(1) 求每天销售量与自变量 x 的函数关系式;

(2) 求每天销售利润与自变量 x 的函数关系式;

(3) 该商品的售价为多少元时, 每天可获得最大利润? 最大日利润是多少元?

8. 为减少空气污染, 某市鼓励居民用电 (减少使用燃气或燃煤), 采用分段计费的方法计算电费: 每月用电不超过 100 度时, 按 0.57 元/度计算; 每月用电量超过 100 度时, 其中的 100 度仍按原标准收费, 超过的部分按 0.5 元/度计算.

(1) 设每月用电 x 度时, 应交电费 y 元, 写出 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 小明家第一季度缴纳电费时情况如下表所示:

月 份	一月	二月	三月	合计
缴费金额/元	76	63	45.6	184.6

问小明家第一季度共用电多少度?



9. 某公司为提高员工的综合素质, 聘请专业机构对员工进行专业技术培训. 其中, 培训机构成本费用为 12000 元. 公司每位员工的培训费按以下方式与该机构结算: 若公司参加培训的员工人数不超过 30, 则每人的培训费为 850 元; 若公司参加培训的员工人数多于 30, 则给予优惠: 每多 1 人, 每位员工的培训费减少 10 元. 已知该公司最多有 60 位员工可参加培训, 设参加培训的员工人数为 x , 员工的培训费为 y (元), 培训机构的利润为 Q 元.

(1) 写出 y 与 x ($x > 0, x \in \mathbf{N}^*$) 之间的函数解析式;

(2) 当公司参加培训的员工为多少人时, 培训机构可获得最大利润? 并求最大利润.

综合训练



基础训练

一、选择题

- (四川 · 2019) 函数 $y = \sqrt{x+1}$ 的定义域是 ().
 A. $\{x | x < -1\}$ B. $\{x | x \leq -1\}$
 C. $\{x | x > -1\}$ D. $\{x | x \geq -1\}$
- 已知函数 $y = \frac{2-k}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 则 ().
 A. $k > 0$ B. $k < 0$ C. $k > 2$ D. $k < 2$
- (四川 · 2015) 函数 $y = \sqrt{2\ln(2-x)}$ 的定义域是 ().
 A. $\{x | x \geq 2\}$ B. $\{x | x \leq 2\}$
 C. $\{x | x > 2\}$ D. $\{x | x < 2\}$
- 对于函数 $y = \frac{1}{x}$, 下列说法正确的是 ().
 A. 单调递减区间为 $(-\infty, +\infty)$
 B. 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$
 C. 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$
 D. 单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$
- 下列函数是奇函数的是 ().
 A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = x^2$ C. $y = x^3$ D. $y = 3^x$
- 函数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, 下列结论正确的是 ().
 A. $f(x)$ 是增函数且是偶函数 B. $f(x)$ 是减函数且是奇函数

C. $f(x)$ 是增函数且是奇函数

D. $f(x)$ 是减函数且是偶函数

7. 设函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x - 3$, 则 $f(-2) =$ ().

A. 1

B. -1

C. $-\frac{11}{4}$

D. $\frac{11}{4}$

8. (四川 · 2015) 已知 $y = f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1) = 3, f(-2) = -5$, 则 $f(-1) + f(2) =$ ().

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

9. (四川 · 2019) 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 且 $f(1) = 1$, 若对于任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(5 - x)$ 恒成立, 则 $f(9) =$ ().

A. -4

B. -1

C. 0

D. 1

10. 用一根 40 厘米的铁丝围成一个矩形, 设矩形的一边长为 x (厘米), 面积为 y (厘米²), 则把 x 表示为 y 的函数解析式是 ().

A. $y = x(40 - x)$

B. $y = \frac{1}{2}x(40 - x)$

C. $y = x(20 - x)$

D. $y = \frac{1}{2}x(20 - x)$

二、填空题

11. 设偶函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减, 则 $f(-2)$ 、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 、 $f\left(\frac{3}{3}\right)$ 按从大到小的顺序为_____.

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x + 7) = f(x)$, 若 $f(-5) = 2$, 则 $f(-2021) =$ _____.

13. 定义域为 $[-2, 2]$ 的偶函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若 $f(1 - m) > f(m)$ 恒成立, 则 m 的取值范围是_____.

三、解答题

14. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$.

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $[a, a + 1]$ 上的最大值 $g(a)$;

(2) 已知 $g(a) = -3$, 求 a 的值.

15. 函数图像与 x 轴交点的横坐标叫作函数的零点. 例如, 函数 $y = 2x - 4$ 与 x 轴交于 $(2, 0)$, 则函数 $y = 2x - 4$ 的零点为 2. 已知函数 $f(x) = x^2 + mx - 6$.

(1) 若 $f(x)$ 的一个零点为 -2, 试求 m 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 有一个零点位于 -2 和 -1 之间, 试求实数 m 的取值范围.



16. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(-x+2)$, 且图像过点 $P(3,-4)$ 和 $Q(-1,20)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (3) 若 $f(x)$ 的值不大于 -4 , 求 x 的取值范围.



提升训练

一、选择题

1. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,4]$, 则函数 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 的定义域为 ().

- A. $[-4,4]$ B. $[-2,2]$ C. $[-4,-2]$ D. $[2,4]$

2. 函数 $y=f(x)$, 0 对任意 x_1, x_2 , 都有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$, 若 $f(8)=3$, 则 $f(2)=()$.

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. $\frac{3}{2}$

3. 在数学中, 布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的定理, 它可应用到有限维空间, 并构成一般不动点定理的基石. 布劳威尔不动点定理得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔 (L.E.J.Brouwer), 简单地讲, 就是对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$, 存在一个点 x_0 , 使得 $f(x_0)=x_0$, 那么就称该函数为不动点函数. 下列函数为不动点函数的是 ().

- A. $f(x)=2^x+x$ B. $f(x)=x^2-x+3$

- C. $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, & x \leq 1 \\ |2-x|, & x > 1 \end{cases}$ D. $f(x)=\frac{1}{x}+2x$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2-ax-5x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, x > 1 \end{cases}$, 对任意实数 $x_1 \neq x_2$, 都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)] > 0$, 则

a 的取值范围是 ().

- A. $-3 \leq a < 0$ B. $-3 \leq a \leq -2$ C. $a \leq -2$ D. $a < 0$

5. 已知函数 $y=f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数. 若 $f(a) \geq f(-2)$, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $a \leq -2$ B. $a \geq 2$ C. $a \leq -2$ 或 $a \geq 2$ D. $-2 \leq x \leq 2$.

6. 函数 $f(x)=x^2-2|x|-m$ 有 4 个零点, 则实数 m 的取值范围是 ().

- A. $m < 1$ B. $-1 < m < 0$ C. $m > 0$ D. $-1 \leq m \leq 0$

7. 函数 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, $f(-3)=0$, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 ().

- A. $\{x | -3 < x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$ B. $\{x | x < -3 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$
C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x | -3 < x < 0 \text{ 或 } 0 < x < 3\}$

8. 对于 $-1 \leq a \leq 1$, 不等式 $x^2+(a-2)x+1-a > 0$ 恒成立, 则 x 的取值范围是 ().

- A. $0 < x < 2$ B. $x < 0$ 或 $x > 2$ C. $x < 1$ 或 $x > 3$ D. $-1 < x < 1$

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则满足 $f(\sqrt{x+2}) < f(x)$ 的 x 的取值范围是 ().

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, -1)$

C. $[-2, -1) \cup (2, +\infty)$

D. $(-1, 2)$

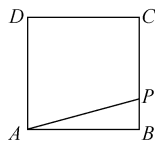
10. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 6, 如图, 动点 P 从点 B 出发, 沿折线 BCD 移动到点 D 为止. 设 P 移动的路程为 x , $\triangle ABP$ 的面积为 y , 则 y 关于 x 的函数解析式为 ().

A. $y = 3x$

B. $y = 3(6 - x)$

C. $y = \begin{cases} 3(6 - x), & 0 < x \leq 6 \\ 18, & 6 < x \leq 12 \end{cases}$

D. $y = \begin{cases} 3x, & 0 < x \leq 6 \\ 18, & 6 < x \leq 12 \end{cases}$



二、填空题

11. 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3) = f(1-x)$, $f(-2) = -1$, 则 $f(2022) =$ _____.

12. 已知函数 $f(x) = 4x^2 - mx + 5$ 在区间 $[-2, +\infty)$ 上是增函数, 则 $f(m)$ 的取值范围是 _____.

13. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 且在 $[-2, 0]$ 上是减函数. 下列是关于 $f(x)$ 的性质: ① $f(x)$ 是以 2 为周期的函数; ② $f(0)$ 是该函数的最大值; ③ $f(x)$ 在 $[2, 3]$ 上是减函数; ④ $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称. 其中正确的命题的序号是 _____.

三、解答题

14. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = 1$, $f(x+1) - f(x) = 2x + 5$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $x \in [-3, 1]$, 且 $f(x) \leq m^2 - 5m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + mx, & x < 0 \end{cases}$ 是奇函数.

(1) 求实数 m 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, a-2]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

16. 已知函数 $f(x)$ 对任意实数 a, b 都有 $f(a+b) = f(a) + f(b) - 2$, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) > 2$.

(1) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

(2) 若 $f(6) = 8$, 解不等式 $f(2m^2 - m) < 5$.