职业教育公共基础课程精品教材

高等数学实例教程

瞿汇颐　陈承欢　刘丽瑶　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书探索“一本多纲”的教材编排模式，满足不同学习要求和课时需求，以“融合专业、注重能力、突出应用”为基本思路，深化“应用导向、问题驱动、案例教学”的教学方法，不断探索“数学知识学习与专业实际应用”融合、“解题技能训练与模块要点考核”结合的教学模式．

本书将高等数学的 9 个核心内容“函数、极限、导数、一元函数微分、二元函数微分、不定积分、定积分、微分方程、级数”设置为 9 个独立的教学模块，形成模块化结构，优选了 120 个具有专业背景的典型应用案例，将高等数学应用案例分为【日常应用】【经济应用】【电类应用】【机类应用】4 类．每个模块整体上设置了 3 个阶段：知识学习、技能训练、应用实践．每个模块面向教学全过程设置了 12 个教学环节，教学实例设置了 5 种类型：引导实例、验证实例、方法实例、训练实例、应用实例．数学知识学习设置了 3 个环节：概念认知、知识疏理、问题解惑．自主训练设置了 2 个层次：基本训练、提升训练．全书设置了 9 次模块考核，挖掘了 10 项主要思政元素．在高等数学教学过程中，有意、有机、有效融入思政元素、数学思维、数学文化，实现知识传授、能力培养和价值塑造三者的有机融合．

本书可作为应用型本科院校、高职院校、职业本科学校及本科院校开办的二级学院各理工科、经贸类、管理类专业的教材，也可作为具有高中文化程度的读者自学用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学实例教程 / 瞿汇颐，陈承欢，刘丽瑶编著．
北京 ：电子工业出版社，2024. 6. –– ISBN 978–7–121
–48443–8
Ⅰ. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20249F7W84 号

责任编辑：左 雅
印 刷：
装 订：
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编：100036
开 本：787×1092 1/16 印张：18.75 字数：480 千字
版 次：2024 年 6 月第 1 版
印 次：2024 年 6 月第 1 次印刷
定 价：59.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254580，zuoya@phei.com.cn。

前　　言

高等数学是高职院校、职业本科学校各专业必修的一门公共基础课程，在高素质技术技能人才培养综合素质和可持续发展能力中具有重要作用．近年来，高职院校都在大力推进高等数学的教学改革，教学改革成果也在不断涌现，诸多优秀的《高等数学》教材陆续出版，这些成果和教材都让广大高职院校、职业本科学校的师生受益匪浅．湖南铁道职业技术学院数学教学团队在充分调研高等职业教育人才培养目标、教学需求与发展趋势、大学生学习特点和认知规律的基础上，不断地探索教学规律和创新教学模式，打破常规、锐意进取、注重创新，在教材编排模式、教学模式、教学过程、教学方法等方面进行了大胆创新，本书主要特色和创新如下．

1. 需求多样化、结构模块化、应用专业化

根据大学生认知水平和学习要求，筛选和编排教学内容，探索“一本多纲”的编排模式，力求实现基础性、实用性和发展性三方面需求的协调统一，满足多样化、个性化的学习要求和课时需求．

本书将高等数学的 9 个核心内容“函数、极限、导数、一元函数微分、二元函数微分、不定积分、定积分、微分方程、级数”设置为 9 个独立的教学模块，形成模块化结构，其中 6 个模块为各专业的公共学习模块，二元函数微分、微分方程和级数 3 个模块为选修模块，各专业可根据专业培养目标的要求，选修所需的教学内容．

本书优选了 120 个具有专业背景的典型应用案例，将高等数学应用案例分为【日常应用】【经济应用】【电类应用】【机类应用】4 类，其中【日常应用】类为必修内容，其他三类根据专业需求进行合理选用，为大学生学习本专业的课程奠定坚实的数学基础，同时也为了解其他相关专业的应用需求提供方便，有利于拓展大学生的知识面，充分满足大学生的个性化需求和职业发展需求，真正体现以学生为主体的职业教育思想．

2. 教学过程有方法、专业学习有指导、升学考试有帮助

本书充分尊重大学生的认知规律和数学的教学规律，设置“分层渐进”的教学环节和学习路径，降低高等数学的学习难度，有效提升大学生的数学应用能力．

每个模块整体上设置了 3 个阶段：知识学习、技能训练、应用实践．每个模块面向教学全过程设置了 12 个教学环节：【教学导航】—【价值引导】—【引例导入】—【概念认知】—【知识疏理】—【问题解惑】—【方法探析】—【自主训练】—【应用求解】—【应用拓展】—【模块小结】—【模块考核】．教学实例设置了 5 种类型：引导实例、验证实例、方法实例、训练实例、应用实例，共有 877 个实例．数学知识学习设置了 3 个环节：概念认知、知识疏理、问题解惑，共有 27 个基本概念、62 个重要知识点、40 个重点问题．自主训练设置了 2 个层次：基本训练、提升训练．全书设置了 9 个模块考核，共有 234 道考核题，考核题型多样，包括选择题、判断题、填空题、计算题和应用题 5 种题型，每个模

块通过扫描【在线测试】二维码，即可打开在线测试页面，进行在线考核．全书的 5 类教学实例和 9 次在线考核，共设置了 1111 次学习、练习、巩固机会，千锤百炼，始终如一，方法技巧得以学习、数学思维得以训练、解题能力得以提升．

3. 与专业情境融合、与工作实际结合、与素质教育契合

本书以“融合专业、注重能力、突出应用”为基本思路，不断探索“数学知识学习与专业实际应用”融合、“解题技能训练与模块要点考核”结合的教学模式，让数学知识与专业情境相融合，数学方法的学习与数学思维的培养相结合，数学应用与素质教育并重．

深入探索专业课程与数学课程有效整合的路径，将专业学习中所需的数学知识、数学应用融为一体，在高等数学中解决专业学习时的数学需求，通过分析专业应用案例，帮助大学生学会用数学知识分析与解决实际问题，让大学生在跨学科的学习中体验数学的广泛应用和实用价值，让大学生认知数学有用，也能预先了解高等数学在专业中的用途，提前认知专业课程中高等数学的应用．

书中的数学案例设置为与大学生的生活或者未来的工作息息相关的问题，减少无实际意义的纯数学计算，尽量将抽象思维转化为形象思维，提升大学生高等数学解决工作、生活、创业过程中的实际问题，激起大学生探究数学应用的愿望，让大学生学好高等数学的同时，也为未来的工作奠定了坚实的基础．

本书注重对大学生的数学思想方法和数学应用能力的培养，让大学生在解决实际问题中学习，培养其创新思维与实践能力，激发大学生学习数学的热情，提高大学生的数学素养，让大学生领会到数学素养也是大学生的基本素养之一，使传授数学知识和培养大学生的数学素养得到很好的契合．

4. 概念认知案例化、理论阐述通俗化、知识应用多元化

通过生活实例和工作实际，引出数学概念，解决入门难的问题，有利于大学生认识数学内容的实际背景和应用价值，使大学生能感受数学源自生活、工作实际，从而增加数学的亲和力．

用通俗易懂的语言描述数学理论知识的本质，采用数形结合方法，尽量借助图形、图像和数表等多种途径将抽象的数学知识形象、直观、生动地呈现出来．

通过大量浅显、贴近生活与专业的数学应用案例，一方面使理论与实践相得益彰，突出用高等数学分析、解释、解决实际问题与实际现象；另一方面可潜移默化地培养大学生创新意识，提升大学生的数学应用能力．

5. 重知识应用、重能力培养、重素质教育

本着重知识应用、重能力培养、重素质教育的思路，以“学用数学”的主线贯穿整个内容体系，注重加强数学的实际应用，深化“应用导向、问题驱动、案例教学”的教学方法，提高学习效率，着力培养大学生举一反三、融会贯通的能力．强化应用高等数学知识解决实际问题的能力，在数学应用中培养思维能力和创新意识，充分发挥高等数学对形成大学生职业能力和职业素养的重要支撑作用．以“引出问题–学习知识–实现应用”的思路呈现教学内容，数学概念的引入力求从实际问题出发，突出问题的实际背景，引导大学生积极参与问题解决的教学过程．以案例教学的方式，用典型实例引出概念，并用通俗简洁的语言阐述概念的内涵和实质，着重讲解基本概念、基本理论和基本方法，对基本概念和基本理念尽量通过实例说明其实际背景和应用价值，由此加深大学生对基本理论和基本概

念的理解．在处理定理和公式推导与证明方面，避免逢理必证或逢理不证的极端现象，而是本着量力而行的原则，合理取舍教学内容，少一些数学公式的烦琐推导，部分定理、结论的证明过程以电子活页方面呈现，结合图形描述直观形象地加以适当解释与推理，使数学课程的学习由抽象变为形象，由烦琐变为简单，由索然无味变为生动有趣，从而激发每一位大学生学习高等数学的兴趣和热情，让每一位大学生都饶有兴趣地学习高等数学．“创造最适合大学生的教育”应当成为高等教育的共识．

6. 倡导数学精神、坚持立德树人、强化价值引领

高等数学作为大学数学教育的重要组成部分，不仅培养大学生的数学素养和逻辑思维能力，同时也蕴含着丰富的思政元素，本课程挖掘了以下10项主要思政元素：严谨专心、探索精神、数学精神、理性思维、创新意识、钻研精神、辩证思维、审美能力、爱国情怀、责任意识．在高等数学教学过程中，有意、有机、有效融入思政元素、数学思维、数学文化，挖掘数学知识与方法中蕴涵的育德元素与育德功能，实现知识传授、能力培养和价值塑造三者的有机融合．

（1）培养理性思维与激励探索精神

数学教育的价值不仅仅是数学知识的积累，还在于对数学思维和数学观念的培养，更是美育和德育功能的体现．

思政元素之一：严谨专心　高等数学中的定理、公式和推导都需要严格的证明和计算，这体现了数学的严谨性．数学讲究严谨，例如，法则的运用、概念的界定、结果的验证都必须根据标准要求来进行，要求运筹有章、计算有法，始终要求人们不可违背数学的科学规律．本书旨在引导大学生科学地进行分析、推理、概括和判断，并遵循一定的逻辑规律．通过数学训练，不断培养大学生严谨的学习作风和专心致志、坚持真理、追根溯源的科学态度．

思政元素之二：探索精神　高等数学中的许多概念和方法都是经过数学家们长期探索和发现得出的，通过分享这些背后的故事，激发大学生的探索精神和求知欲．

（2）倡导数学精神与钻研精神

思政元素之三：数学精神　所谓数学精神，既指人类从事数学活动中的思维方式、行为规范、价值取向、理想追求等意向性心理的集中表征，又指人类对数学经验、数学知识、数学方法、数学思想、数学意识、数学观念等不断概括和内化的产物．将数学精神贯穿到高等数学的课堂教学中，培养大学生的理性思维和创新意识，引导大学生树立正确的价值观，形成优秀的人文素养．

思政元素之四：理性思维　高等数学教学要注重培养大学生的理性思维．例如，导数、微分、定积分概念的抽象过程，均是从实际问题出发，将这些问题的共性抽象概括就得到了相应的概念，进而解决生产生活中的实际问题．理性思维不仅体现在数学的抽象性和逻辑性，也体现在数学家力图用最简洁、最精确的形式化语言刻画现实世界中的各种现象，以及数学家敢于挑战、勇攀高峰的崇高品质中．例如，从极限思想萌芽的产生，到牛顿和莱布尼茨创立微积分，再到柯西和威尔斯特拉斯给出极限的精确化定义，终于使微积分趋于严谨，整个过程无不体现了数学家追求完美的拼搏精神．

思政元素之五：创新意识　大胆质疑、勇于挑战的创新意识是数学发展的不竭动力．纵观数学的发展历程，每一个悖论的提出、每一个反例的构造、每一个定理的推广、每一个猜想的验证、每一个数学分支的建立等，无不印证了数学的创新精神．在高等数学的教学

过程中，要有意识地引导大学生大胆质疑，培养大学生的批判性思维．

思政元素之六：钻研精神　数学史不仅仅是单纯的数学成就的编年记录，也是数学家们克服困难和战胜危机的斗争史．我国数学家陈景润长期过着普通人难以忍受的艰苦生活，遭受疾病折磨，但是始终踏踏实实、坚持不懈地从事数学研究，他在哥德巴赫猜想及其他数论问题上所取得的成就，至今仍处于领先地位．数学家们的奋斗经历能够感染大学生，鞭策大学生静心学习、潜心钻研，同时对大学生树立正确的价值观、人生观大有裨益．

（3）融入哲学思考与形成正确的世界观

数学中的概念、符号、性质、公理、定理、公式等往往都蕴含着丰富的哲理，数学知识与方法中蕴涵着辩证思维，高等数学中蕴涵着丰富的辩证唯物主义思想．

思政元素之七：辩证思维　高等数学的教学可以培养大学生辩证的思维方法，对提高大学生的认识能力、思维能力都有着重要的作用．普遍联系的观点、矛盾对立统一的观点、量变到质变、否定之否定的辩证规律在数学中随处可见．许多公式、法则、公理和定理都是按照“由特殊到一般，再由一般到特殊”或遵循“从实践中来，到实践中去”的认识规律而产生、推导、归纳、概括、发展和应用的．

高等数学中的许多概念、方法、思想都渗透着丰富的辩证唯物主义思想．在教学中深刻剖析其中体现的那种对立统一、量变到质变的矛盾转化关系，让辩证法在高等数学中的体现充分展示，将会使大学生受到更为深刻、生动、具体的辩证唯物主义思想教育．对立统一是唯物辩证法的实质与核心，高等数学中的许多概念都是对立统一的，例如，极限中的“无限接近”与“达到”，连续与间断等．编者希望通过这些概念引导大学生理解辩证法的思想，培养大学生的辩证思维能力．

高等数学中的许多定理和公式揭示了自然界和社会现象的内在规律，例如，微积分在物理学、经济学、电学、机械学等领域的应用，借此引导我们认识数学与世界的联系，形成正确的世界观．

（4）体会和欣赏数学美

思政元素之八：审美能力　数学也有自己的美学特征，通过审美教育，潜移默化地提高大学生的审美能力，激发创造性和求知欲，这样不仅强化了大学生对数学知识的理解，提高了大学生的数学应用能力，同时也培养了大学生的美学修养，促进大学生情感体验和人格个性的和谐发展．

数学中的美学领悟　数学美是无处不在的，数学知识中的数学意识和观念，例如，运动、优化、随机、对称、稳定、周期，等等，都会给人一种美学的领悟．大学生对数学的喜爱，可能是源自一道平面几何题目的证明．这种对科学问题的好奇，求解的欲望，解决之后的欢乐，是人生必不可少的体验．高等数学中的各种数学符号、数学定义的表述、逻辑证明的表达式、计算题的解题过程等，均体现了数学的简洁美与流畅美，例如，导数公式 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 展示了数学的简洁美；连续与间断、无穷大与无穷小、曲线的凹凸等概念，体现了数学概念中的对称美．不断揭示数学美的特点，有利于大学生在掌握数学知识，培养思维能力、探究能力、创造能力的同时，得到美的熏陶，提升审美能力，有利于促进大学生对美的追求，从而激发大学生的学习热情．

数学中的简约语言　用一个方程表达纷繁的数量关系，用坐标和图象指出问题的特征时，就进行了思想情操的陶冶和简约美的领悟.

（5）激发爱国情怀与培养社会责任感

思政元素之九：爱国情怀　高等数学是现代科学和技术的基础，对于国家的科技创新和经济发展具有重要意义. 数学在航天、国防、经济等领域应用广泛，学习数学具有很强的重要性和紧迫性.

思政元素之十：责任意识　高等数学不仅具有学术价值，还具有广泛的社会应用价值，利用数学知识可以有效分析和解决一些社会问题，例如，环境保护、资源利用等，感知数学在实际生活中的应用，体悟数学应用价值，形成数学应用意识，激发大学生兴趣，不断提高大学生的社会责任感和使命感.

本书由郴州思科职业学院瞿汇颐老师、湖南铁道职业技术学院陈承欢教授、刘丽瑶老师共同编著，郴州思科职业学院的罗泽辉等老师、湖南铁道职业技术学院朱彬彬、张丽芳等老师参与了教学案例的设计与部分章节的编写、校对、整理工作. 本书是郴州思科职业学院、湖南铁道职业技术学院与电子工业出版社校社合作的教学改革成果之一，本书在编写过程中，也得到了电子工业出版社多位编辑的悉心指导，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，教材中的疏漏之处敬请专家与读者批评指正.

编　者

《高等数学实例教程》课程设计与说明

1. 教学模块设计

教学模块	说明
模块 1　函数及其应用	必修模块
模块 2　极限及其应用	必修模块
模块 3　导数及其应用	必修模块
模块 4　一元函数微分及其应用	必修模块
模块 5　二元函数微分及其应用	选修模块
模块 6　不定积分及其应用	必修模块
模块 7　定积分及其应用	必修模块
模块 8　微分方程及其应用	选修模块
模块 9　级数及其应用	选修模块

2. 教学过程设计

教学环节	说明
环节 1:【教学导航】	明确教学目标，确定教学重点和教学难点
环节 2:【价值引导】	挖掘每个模块中蕴涵的育德元素与育德功能，在各个模块教学过程中有意、有机、有效融入思政元素、数学思维、数学文化
环节 3:【引例导入】	通过分析典型案例引入数学概念和方法，让大学生对基本概念有初步印象，使其在实际问题中学习和理解数学知识，增强学习的趣味性和实用性
环节 4:【概念认知】	集中分析讲解基本概念、基本定义，为后续解题提供理论指导，解题时如果遇到概念问题直接可以在此环节进行查找
环节 5:【知识疏理】	系统讲解基本特性、基本定理、基本性质、基本公式和基本方法
环节 6:【问题解惑】	对出错可能性大的问题进行分析，一方面预防出错，另一方面当出现错误时可以尽快找到解决方法
环节 7:【方法探析】	让大学生进一步理解概念、熟悉公式和方法，有效提高大学生解题能力和考试能力，针对性地探析解题方法和过程
环节 8:【自主训练】	分类设置必要的练习题，让大学生动手练习，验证知识是否熟练掌握、方法是否灵活运用
环节 9:【应用求解】 （1）日常应用 （2）经济应用 （3）电类应用 （4）机类应用	学习数学知识主要目的是应用，运用所学知识解决生活、工作中的实际问题. 这里设置了日常应用、经济应用、电类应用和机类应用 4 个类典型应用问题，其中日常应用为必学内容，其他 3 类根据教学需要进行选择讲解即可，同时也为大学生了解其他相关专业的应用需求提供方便，让大学生在跨学科的学习中体验数学的广泛应用和价值，有利于拓展大学生的知识面
环节 10:【应用拓展】	设置必要的实际应用问题，让大学生自行求解
环节 11:【模块小结】	对本模块关键知识和常用方法进行小结，部分方法绘制了思维导图
环节 12:【模块考核】	每个模块设置一个考核环节，检查知识掌握情况和训练实际问题的解决能力

目　　录

模块 1　函数及其应用

在研究事物内部、事物与事物各因素之间的关系时，我们通常通过对客观事物的分析，建立各因素之间的关系式，这种关系式可以充分揭示各因素之间的数量关系，也是我们揭示事物发展规律、对事物进行分析和研究的重要基础，这种事物各因素之间的关系即可应用函数进行描述．1837 年，德国数学家狄利克雷（Dirichlet，1805－1859）提出的函数定义，使函数关系更加明确．函数是微积分学的主要研究对象，它能准确地刻画各事物或各因素之间数量上的依赖关系．

教学导航

教学目标	（1）理解函数的概念，会求函数的定义域及函数值，会绘制简单分段函数的图象 （2）掌握函数的基本性质，会判断函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性 （3）掌握基本初等函数的图象和主要性质 （4）理解复合函数的概念，掌握复合函数的复合过程，能熟练地进行复合函数的分解 （5）理解初等函数的概念 （6）掌握常用函数的典型应用，能根据一些实际问题建立函数
教学重点	集合与函数的概念、求函数的定义域、分段函数、复合函数
教学难点	分段函数、复合函数

价值引导

各类函数图象，有的是直线、有的是折线、有的是双曲线、有的是抛物线等．如同函数图象一样，人生的道路也不是一帆风顺的，有时崎岖，有时平坦，有时低潮绵延，有时高潮跌起，新时代的大学生应始终坚持积极向上的人生态度，去经受成功与失败的考验．

分段函数表现的是一种量变到质变的过程，体现了量变与质变的辩证关系．在生活与工作中，大学生要学会关注细节的变化，培养辩证的思维方法和科学的理性思维．

函数的连续性说的是当自变量变化很小时，因变量的变化也很小．学习上、工作中，我们也应循序渐进，不能急于求成，像气温的变化、植物的生长、知识的积累都应该遵循其自身规律，妄图寻求捷径的想法只能事与愿违，函数的连续性也印证了这一道理，例如，拔苗助长的故事就是违反事物发展的客观规律、急于求成的负面事例．

引例导入

【引导实例1-1】计算网上购书金额

【引例描述】

张珊同学上京东商城购买了1本图书《社交礼仪》，该书原价为29.8元，购书优惠为7折，即购一本图书实际价格为20.86，如果购买 x 本该书，计算应付的金额.

【引例求解】

根据问题描述可知：

购买1本书，应付金额为 $1\times29.8\times0.7=1\times20.86$，

购买2本书，应付金额为 2×20.86，

购买3本书，应付金额为 3×20.86，

由此可以推断购买 x 本书，应付金额为 $x\times20.86$.

即在集合 $N=\{0，1，2，3，\cdots\}$ 中任取一个值，按照乘20.86的法则，在集合 $M=\{0，20.86，41.72，62.58，\cdots\}$ 中有唯一的一个值与之对应.

如果用 x 表示 N 中的任意一个值，用 y 表示 M 中相对应的值，那么 $y=20.86x$，反映了实际问题中购买数量 x 和应付金额 y 之间的函数关系.

【引导实例1-2】计算正方形的面积

【引例描述】

已知正方形的边长为 x，求该正方形的面积 y.

【引例求解】

正方形的面积 y 等于其边长的乘积，

对于边长为1的正方形，其面积为 $1^2=1$，

对于边长为2的正方形，其面积为 $2^2=4$，

对于边长为3的正方形，其面积为 $3^2=9$，

对于边长为4的正方形，其面积为 $4^2=16$，

依次类推，对于边长为 x 的正方形，其面积为 x^2.

即在集合 $L=\{1，2，3，4，\cdots\}$ 中任取一个值，按照其平方的法则，在集合 $A=\{1，4，9，16，\cdots\}$ 中有唯一的一个值与之对应.

如果用 x 表示 L 中的任意一个值，y 表示 A 中相对应的值，那么 $y=x^2$ 反映了正方形的边长 x 与正方形面积 y 之间的函数关系.

概念认知

【概念1-1】常量与变量

我们首先做一个实验，掷同一铅球数次，铅球的质量和体积在掷球过程中都保持稳定

的数值，即为常量，而投掷距离、上抛角度、用力大小在不同的掷球过程中会发生变化，为不同的数值，即为变量.

【定义 1-1】变量

> 在某一过程中始终保持一定数值的量称为常量；在某一过程中可以取不同数值的量称为变量.

例如，商品的购买数量，教室的长、宽、高等都属于常量；教室的温度、汽车运行的速度等都属于变量.

【说明】

① 常量一般用 a、b、c、…等英文字母表示，变量用 x、y、z、u、t、…等英文字母表示.

② 常量为一定值，在数轴上可用定点表示，变量代表该量可能取的任一值，在数轴上表示一个动点，例如，$x\in(a，b)$ 表示 x 可代表 $(a，b)$ 中的任一个数. 常量可以看作是变量的一种特例.

③ 常量与变量是相对而言的，同一量在不同场合下，可能是常量，也可能是变量，例如，在一天或在一年中观察某小孩的身高，从小范围和大范围而言，重力加速度可为常量和变量. 然而，一旦环境确定了，同一量不能既为常量又为变量，二者必居其一.

【概念 1-2】集合

【定义 1-2】集合

> 集合是具有某种特定性质的事物所组成的全体，通常用大写英文字母 A、B、C、…等来表示，组成集合的各个事物称为该集合的元素，形式为 $A=\{x|x$ 所具有的特征$\}$.

【说明】以后不特别说明的情况下，考虑的集合均为数集.

若事物 a 是集合 M 的一个元素，就记 $a\in M$（读 a 属于 M）；若事物 a 不是集合 M 的一个元素，就记 $a\notin M$ 或 $a\bar{\in} M$（读 a 不属于 M）；集合有时也简称为集.

1. 集合的特点

① 对于一个给定的集合，要具有确定性的特征，即对于任何一个事物或元素，能够判断它属于或不属于给定的集合，二者必居其一.

② 对于一个给定的集合，同一个元素在同一个集合里不能重复出现，完全相同的元素，不论数量多少，在一个集合里只算作一个元素.

③ 若一集合只有有限个元素，就称为有限集；否则称为无限集.

2. 集合的基本关系

（1）子集

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若有 $x\in A$，必有 $x\in B$，就称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$(读 B 包含 A).

显然：$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

（2）等集

若 $A \subset B$，同时 $B \subset A$，就称 A、B 相等，记为 $A=B$.

（3）空集

不含任何元素的集合称为空集，记为 ϕ，例如，$\{x|x^2+1=0，x\in \mathbf{R}\}=\phi$，$\{x:2^x=-1\}=\phi$，空集是任何集合的子集，即 $\phi \subset A$.

3. 集合的表示方法

表示集合的方法，常见的有列举法和描述法两种.

（1）列举法

按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号“{ }”括起来，这种方法称为列举法.

例如，引导实例 1-2 中的正方形边长的集合表示为 $L=\{x|x=1，2，3，4，\cdots\}$，全体自然数的集合表示为 $\mathbf{N}=\{x|x=1，2，3，4，\cdots\}$.

（2）描述法

设 $P(a)$为某个与 a 有关的条件或法则，把满足 $P(a)$的所有元素 a 构成的集合 A 表示为 $A=\{a|P(a)\}$，这种方法称为描述法. 例如，全体实数构成的集合表示为 $R=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

【验证实例 1-1】求不等式 $x-3>2$ 的解构成的集合

解： 由不等式 $x-3>2$ 的解构成的集合 A 可表示为 $A=\{x|x>5\}$.

【验证实例 1-2】求抛物线 $y=x^2+5$ 上的点 $(x，y)$构成的集合

解： 由抛物线 $y=x^2+5$ 上的点$(x，y)$构成的集合为 B，可表示为 $B=\{(x，y)|y=x^2+5\}$.

4. 应用区间表示集合

（1）区间

区间是介于两个实数之间的全体实数.

（2）开区间

对于实数 a 和 b，且 $a<b$，数集$\{x|a<x<b\}$称为开区间，记作$(a，b)$，即$(a，b)=\{x|a<x<b\}$. a 和 b 称为开区间$(a，b)$的端点，这里 $a\notin(a，b)$，$b\notin(a，b)$.

（3）闭区间

对于实数 a 和 b，且 $a<b$，数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间，记作$[a，b]$，即$[a，b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$. a 和 b 称为闭区间$[a，b]$的端点，这里 $a\in[a，b]$，$b\in[a，b]$.

（4）半开区间

类似地可以说明$[a，b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a，b]=\{x|a<x\leqslant b\}$，$[a，b)$和$(a，b]$都称为半开区间.

（5）有限区间

以上这些区间都称为有限区间，$b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段，闭区间$[a，b]$与开区间（a，b）在数轴上可以表示出来.

（6）无限区间

此外，还有无限区间，引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），则可类似地表示下面的无限区间：

$[a，+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$，$(-\infty，b)=\{x|x<b\}$.

全体实数的集合也可记作（$-\infty$，$+\infty$），它也是无限区间.

常见的区间类型及其表示方法如表 1-1 所示.

表 1-1　常见的区间类型及其表示方法

区间类型	开区间	闭区间	半开区间	无限区间
范围表示法	(a, b)	$[a, b]$	$(a, b]$、$[a, b)$	$(-\infty, +\infty)$
不等式表示法	$a<x<b$	$a\leqslant x\leqslant b$	$a<x\leqslant b$、$a\leqslant x<b$	$-\infty<x<+\infty$

5. 应用邻域表示集合

设 δ 是任一正数，a 为某一实数，把数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，即 $U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$.

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径，如图 1-1 所示.

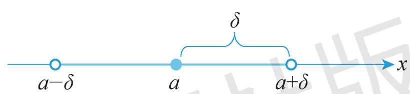

图 1-1　邻域的中心与半径

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此 $U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta, a+\delta)$.

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a, \delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

例如，$|x-2|<1$，即为以点 $a=2$ 为中心，以 1 为半径的邻域，也就是开区间$(1, 3)$.

有时，用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a}, \delta)$，即 $U(\hat{a}, \delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$，这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

【概念 1-3】函数

在某个变化过程中出现两个变量，通常不是彼此独立地变化，而是其中一个变量的变化会引起另一个变量随它做相应的变化．其中，一个是主动变化的量，另一个是被动变化的量．例如，时间的变化，使得温度随之相应地变化，时间是主动变化的量，而温度是被动变化的量，在温度与时间这两个变量之间存在着对应的关系．实际上，这种对应关系是由某种对应法则所决定的，这种关系被称为变量之间的函数关系.

【定义 1-3】函数

> 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，当变量 x 在一个给定的非空数集 D 内任意取某一个数值时，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称为变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$，其中，x 称为自变量，y 称为函数或因变量，数集 D 称为该函数的定义域.

函数定义的示意图如图 1-2 所示.

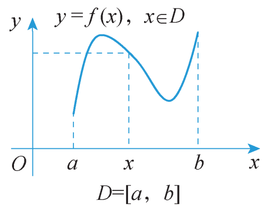

图 1-2　函数定义的示意图

函数的本质是对应法则 f，它反映的是变量 x 与 y 之间的一种依存关系，不同的函数对应法则须使用不同的字母表示，例如，我们考查自变量 x 的两个函数，为了避免混淆，函数可分别记作 $y=u(x)$ 与 $y=g(x)$.

（1）单值函数

在函数定义中，若对每一个 $x\in D$，如果自变量取定值时，对应的函数值 $y=f(x)$ 是唯一的，那么这样的函数叫单值函数，例如，$y=\cos x$ 是单值函数.

（2）多值函数

如果自变量取定值时，对应的函数值 y 有两个或两个以上，那么这样的函数叫多值函数，例如，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 是多值函数.

我们这里所讲的函数是指单值函数，也就是说，对于每一个 x 值只能对应变量 y 的一个值．以后若没有特别声明，讨论的都是单值函数.

知识疏理

【知识 1-1】函数的三要素

函数概念反映着自变量和因变量之间的依赖关系，它涉及函数的定义域、对应法则和值域，函数的定义域、对应法则和值域称为函数的三要素．很明显，只要定义域和对应法则确定了，值域也就随之确定．因此，定义域和对应法则是确定函数的两个关键要素.

图 1-3 简明地标注了函数的自变量、因变量、对应法则、定义域、值域等基本要素.

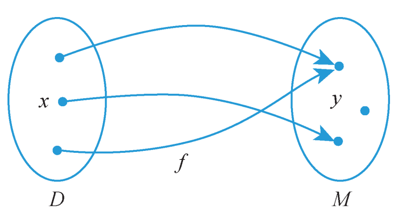

图 1-3　函数的基本要素

1. 对应法则

符号“f”表示自变量 x 与函数 y 的某种对应关系，例如，$y=f(x)=5x^2+3x-1$，它的对应关系“f”是自变量的平方乘 5 加上自变量的 3 倍减去 1，我们不妨简化为 $y=f(\ )=5(\ )^2+3(\ )-1$，当 $x=3$ 时，对应的函数值是 $f(3)=5\times 3^2+3\times 3-1$.

同理，当 $x=a$ 时，对应的函数值是 $f(a)=5a^2+3a-1$.

对于 x 取确定的数值 $x_0\in D$，依对应法则 f，变量 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y|x=x_0$.

2. 定义域

使函数 $y=f(x)$有意义的自变量 x 的取值范围即集合 D 称为函数 $f(x)$的定义域.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：

① 对有实际背景的函数，根据自变量的实际意义确定.

【验证实例 1-3】求引导实例 1-1 中函数的定义域

解： 引导实例 1-1 中的购买数量与应付金额的函数关系是 $y=20.86x$，其定义域为 $D=(0, +\infty)$.

② 对于不考虑实际意义，只研究用解析法表示的函数，这时我们规定：函数的定义域是使函数解析式有意义时自变量所取的实数集合.

函数的定义域就是自变量所能取的，使算式有意义的一切实数值的全体.

如果函数由若干部分组合而成，则该函数的定义域为各组成部分定义域的交集.

函数的定义域一般使用区间或集合表示. 应注意，对于实际应用问题，除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑自变量的实际意义.

3. 值域

如果 x 取数值 $x_0\in D$，那么函数 $f(x)$在 x_0 处有定义，与 x_0 对应的数值 y_0 称为函数 $f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

所有函数值组成的集合 $M=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记号为 M. 函数的值域可由定义域和对应法则来确定.

【验证实例 1-4】求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 的值域

解： 对于函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$，由于其分母最大为 3，此时自变量 x 为 0，所以其值域为 $\left[\dfrac{1}{3},\ +\infty\right\}$.

【知识 1-2】函数的表示方法

函数常见的表示法有三种：解析法、列表法和图形法. 其中，解析法较为普遍，它借助于数学式子来表示对应法则.

1. 解析法

解析法的表示形式如图 1-4 所示.

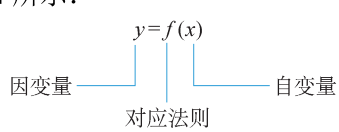

图 1-4　函数的解析法的表示形式

函数记号 $y=f(x)$表示将对应法则 f 作用在 x 上，从而将两个变量相联系，它既表明了两个变量之间的相互依赖关系，又表明了把它作用在 x 上，可以得到唯一的 y 值和 x 对应.

解析法的优点是便于数学上的分析和计算，本书主要讨论用解析式表示的函数.

2. 列表法

函数关系也可以采用列表法来表示，例如，银行利率表、一天中各个时间点气温变化等. 列表法的优点是简明、直观，一些科技手册常采用这种方法，科学实验的结果也常用这种方法表示，科学研究时，通过数据拟合可以得到函数的解析式.

3. 图形法

函数关系还可采用图形法来表示，例如，天气预报图、心电图等. 图形法的优点是直观、容易比较，其缺点是不便于做精细的理论研究.

对于给定的非空数集 D 中任一固定的 x 值，依照法则有一个 y 值与之对应，以 x 值为横坐标，y 值为纵坐标在坐标平面上就确定了一个点. 当 x 取遍 D 中的每一数时，便得到一个点集 $C=\{(x,\ y)|y=f(x),\ x\in D\}$，我们称之为函数 $y=f(x)$ 的图形. 换言之，当 x 在非空数集 D 中变动时，点 $(x,\ y)$ 的轨迹就是 $y=f(x)$ 的图形.

【知识 1-3】函数的性质

1. 函数的单调性

（1）函数单调性的定义

设函数 $f(x)$ 在某区间 I 上有定义，对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有：

① $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在 I 上单调递增，特别当严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立时，就称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增，其示意图如图 1-5 所示.

② $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，就称 $f(x)$ 在 I 上单调递减，特别当严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立时，就称 $f(x)$ 在 I 上严格单调递减，其示意图如图 1-6 所示.

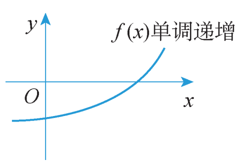

图 1-5　函数的单调递增示意图

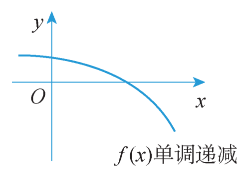

图 1-6　函数的单调递减示意图

（2）函数的单调区间

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 内单调递减，在 $(0,\ +\infty)$ 内单调递增，$(-\infty,\ 0)$ 称为函数的单调递减区间，$(0,\ +\infty)$ 称为函数的单调递增区间，它们统称为函数 $y=x^2$ 的单调区间，如图 1-7 所示.

例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是严格单调递减函数.

（3）单调函数特征

单调递增函数的图形沿着 x 轴的正向而上升，单调递减函数的图形沿着 x 轴的正向而下降.

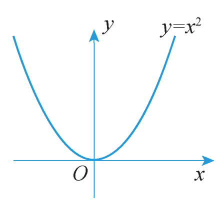

图 1-7　函数 $y=x^2$ 的图形

（4）判断函数单调性的方法

判断函数单调性的方法一般可用“作差法”或“作商法”.

①“作差法”. 在定义域内任取 $x_1 < x_2$，判断 $f(x_1) - f(x_2) < 0$ 或 $f(x_1) - f(x_2) > 0$.

②“作商法”. 在定义域内任取 $x_1 < x_2$，判断 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} < 1$ 或 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)} > 1$.

2. 函数的奇偶性

（1）函数奇偶性的定义

如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都有

① $f(-x) = f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为偶函数，偶函数示意图如图 1-8 所示.

② $f(-x) = -f(x)$ 恒成立，就称 $f(x)$ 为奇函数，奇函数示意图如图 1-9 所示.

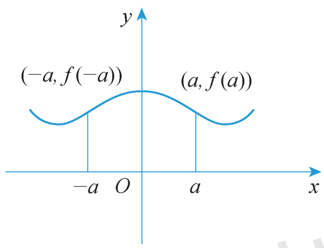

图 1-8　偶函数示意图

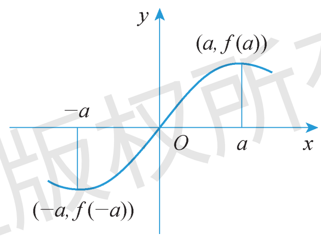

图 1-9　奇函数示意图

例如，$y = x^2$（如图 1-7 所示）、$y = \cos x$ 是偶函数；$y = x$、$y = \sin x$、$y = x^3$、$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 是奇函数；$y = 2^x$、$y = \arccos x$、$y = x^2 + x^3$，$y = \cos x + \sin x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

特别地，函数 $y = 0$ 既是奇函数也是偶函数.

（2）奇函数和偶函数的图形特征

由定义可知，奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称. 这也是证明一个函数是奇函数还是偶函数必要条件.

（3）奇函数、偶函数的和与积运算

可以证明，两个偶函数的和为偶函数；

两个奇函数的和为奇函数；

两个偶函数的积为偶函数；

两个奇函数的积也为偶函数；

一个奇函数与一个偶函数的积为奇函数.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果函数 $f(x)$ 存在一个不为零的常数 l，使得关系式 $f(x + l) = f(x)$，对于定义域 D 内的任何 x 值都成立，则 $f(x)$ 叫作周期函数，l 称为函数 $f(x)$ 的周期.

一个以 l 为周期的周期函数，在定义域内每个长度为 l 的区间上，函数图形为相同的形状，即周期函数在每个周期 $(a + kl，a + (k+1)l)$（a 为任意数，k 为任意常数）上有相同的形状，其示意图如图 1-10 所示.

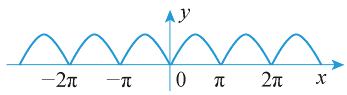

图 1-10　函数的周期性示意图

若 l 为 $f(x)$ 的周期，由定义知 $2l$、$3l$、$4l$、…也都是 $f(x)$ 的周期，所以周期函数有无穷多个周期，通常所说的周期是指最小正周期，并且用 T 表示，然而最小正周期未必都存在．有的周期函数有无穷多个周期，但它没有最小正周期，例如，常数函数 $y=C$．

$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 分别为周期为 2π、2π、π 的周期函数，函数 $y=x-[x]$ 的周期为 1，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ 则没有最小正周期.

4. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在正数 M，使得对于区间 I 上的任何 x 值，对应函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)|\leqslant M$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界；反之，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

有界函数的图形介于两条平行直线 $y=\pm M$ 之间，示意图如图 1-11 所示．例如，$y=\arctan x$ 是有界函数，其图形介于 $y=\pm\dfrac{\pi}{2}$ 两条平行直线之间，而 $y=\log_2 x$ 是一个无界函数.

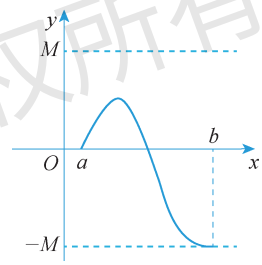

图 1-11　函数的有界性示意图

【知识 1-4】基本初等函数

基本初等函数主要包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

1. 幂函数

形如 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）的函数称为幂函数，常见的幂函数图形如图 1-12 所示，其定义域较为复杂，下面做一些简单的讨论：

① 当 μ 为非负整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$．

② 当 μ 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．

③ 当 μ 为其他有理数时，要视情况而定.

例如，$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；

$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=x^{\frac{3}{4}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$；

$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

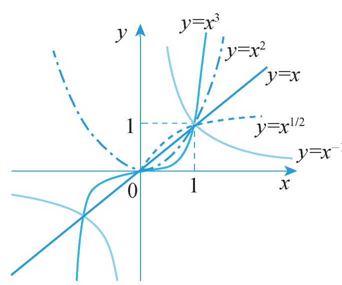

图 1-12　幂函数图形

④ 当 μ 为无理数时，规定其定义域为 $(0,+\infty)$，其图形也很复杂，但不论 μ 取何值，图形总过（1，1）点，当 $\mu>0$ 时，还过（0，0）点.

2. 指数函数

形如 $y=a^x$（a 是常数，且 $a>0$，$a\neq 1$）的函数称为指数函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，其图形总在 x 轴上方，且过（0，1）点，其图形如图 1-13 所示.

① 当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 是单调递增的.

② 当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是单调递减的.

以后我们会经常遇到这样一个指数函数 $y=\mathrm{e}^x$. 特别地，$y=a^x$ 与 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称.

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x$（a 是常数，且 $a>0$，$a\neq 1$）的函数称为对数函数，其定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右方，且过（1，0）点，如图 1-14 所示.

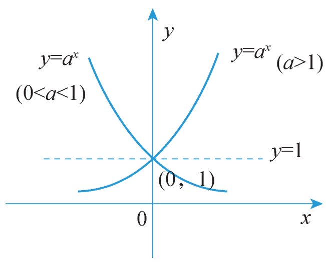

图 1-13　指数函数的图形

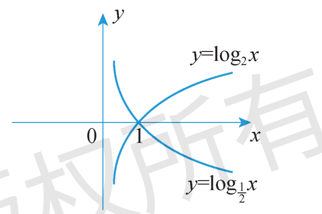

图 1-14　对数函数的图形

① 当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递增，且在（0，1）上为负，$(1,+\infty)$ 上为正.

② 当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调递减，且在（0，1）上为正，$(1,+\infty)$ 上为负.

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，函数记为 $y=\ln x$，称为自然对数函数.

4. 三角函数

三角函数主要有正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数.

① 正弦函数：$y=\sin x$，正弦函数的图形如图 1-15 所示.

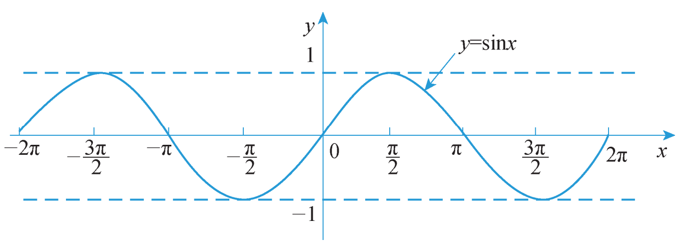

图 1-15　正弦函数的图形

② 余弦函数：$y=\cos x$，余弦函数的图形如图 1-16 所示.

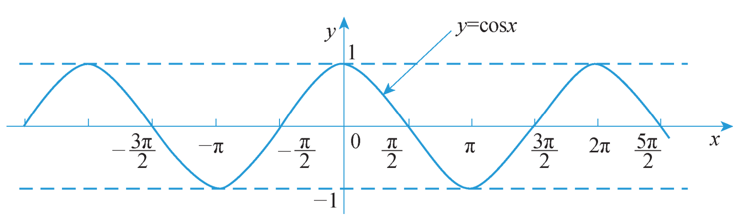

图 1-16　余弦函数的图形

③ 正切函数：$y=\tan x$，正切函数的图形如图 1-17 所示.

④ 余切函数：$y=\cot x$，余切函数的图形如图 1-18 所示.

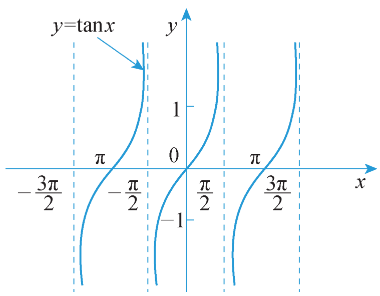

图 1-17　正切函数的图形

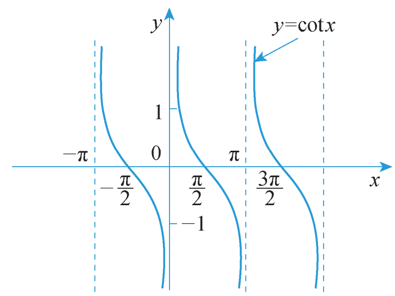

图 1-18　余切函数的图形

正弦函数和余弦函数均为周期为 2π 的周期函数，正切函数和余切函数均为周期为 π 的周期函数. 正弦函数、正切函数、余切函数都是奇函数，余弦函数为偶函数. 另外，还有两个函数：正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

三角函数的主要特性如表 1-2 所示.

表 1-2　三角函数的主要特性

特性	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
定义域	$x\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$	$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$	$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$
值域	$y\in[-1,1]$	$y\in[-1,1]$	$y\in\mathbf{R}$	$y\in\mathbf{R}$
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调递增区间	$\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$	$[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$	$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},\ k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$	—
单调递减区间	$\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right]$	$[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$	—	$(k\pi,\ k\pi+\pi)$

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，它们分别为反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数.

① 反正弦函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

② 反余弦函数：$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$.

③ 反正切函数：$y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

④ 反余切函数：$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[0,\pi]$.

$\arcsin x$ 和 $\arctan x$ 是单调递增的，$\arccos x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 是单调递减的.

【知识 1-5】复合函数

在实际问题中，我们经常会遇到由几个较简单的函数组合成较复杂的函数. 例如，由函数 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 可以组合成 $y=\sin^2 x$；又如，由函数 $y=\ln u$ 和 $u=\mathrm{e}^x$ 可以组合成 $y=\ln \mathrm{e}^x$，这种组合称为函数的复合.

【定义 1-4】复合函数

> 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，并且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数. 从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为复合函数，其中 u 叫作中间变量.

记作

$$\underbrace{y}_{\text{因变量}} = \underbrace{f}_{\text{外层函数}}[\underbrace{\varphi}_{\text{内层函数}}(\underbrace{x}_{\text{自变量}})]$$

例如，$y=\cos x^2$ 就是 $y=\cos u$ 和 $u=x^2$ 复合而成的.

复合函数也可以由两个以上的函数复合成一个函数. 例如，$y=\ln u$，$u=\sin v$ 及 $v=\sqrt{x}$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$；$y=\tan(\ln x)^2$ 就是 $y=\tan u$，$u=v^2$，$v=\ln x$ 复合成的.

正确分析复合函数的构成是相当重要的，它在很大程度上决定了以后是否能熟练掌握微积分的方法和技巧. 分解复合函数的方法是将复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数之间（或与常数）的和、差、积、商.

【知识 1-6】初等函数

我们把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合后所得到的，并能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\arccos\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}$，$y=x\ln \mathrm{e}^x-3x+2$，$y=\tan^3\dfrac{x^2+3}{2}$ 等都是初等函数. 在本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

【知识 1-7】分段函数

由于使用解析式表示的函数不一定总是用一个解析式子表示的，有时在定义域的不同区间上要用不同的式子来表示对应关系，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，称为分段函数.

下面列举几个常用的分段函数.

1. 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $M=[0, +\infty)$

绝对值函数的图形如图 1-19 所示.

2. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $M=\{-1, 0, 1\}$.

符号函数的图形如图 1-20 所示.

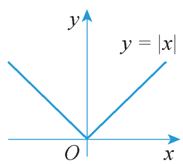

图 1-19　绝对值函数的图形

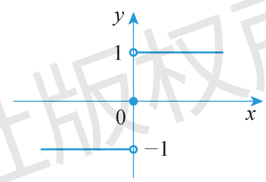

图 1-20　符号函数的图形

3. 单位阶跃函数

$$y=u(t)=\begin{cases} 1, & t\geqslant 0, \\ 0, & t<0. \end{cases}$$

单位阶跃函数是电学中的一个常用函数.

4. 取整函数

$y=[x]$，其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

例如，$\left[\frac{3}{5}\right]=0, \left[\sqrt{3}\right]=1, [\pi]=3, [-1]=-1, [-3.5]=-4$，把 x 看作变量，则函数 $y=[x]$的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $M=\mathbf{Z}$，其图形称为阶梯曲线，如图 1-21 所示. 在 x 为整数值处图形发生跳跃，跃度为 1，该函数称为取整函数.

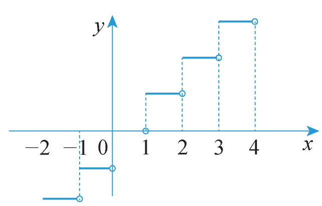

图 1-21　取整函数的图形

【知识 1-8】反函数

对于函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果将 y 当作自变量，x 当作因变量

（函数），则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫作函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $f(x)$ 叫作直接函数．反函数 $x=\varphi(y)$ 的定义域为 M，值域为 D．

由于习惯上采用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，因此，往往把函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$．事实上函数 $y=\varphi(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 表示的是同一函数，因为，表示函数关系的字母“φ”没变，仅自变量与因变量的字母变了，这没什么关系．所以说，若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，那么 $y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数，且后者较常用．

【验证实例 1-5】求函数 $y=ax+b$，$y=x^2$，$y=x^3$ 的反函数

解： 函数 $y=ax+b$，$y=x^2$，$y=x^3$ 的反函数分别为：

$$x=\frac{y-b}{a},\quad x=\pm\sqrt{y},\quad x=y^{\frac{1}{3}}$$

或分别为 $y=\dfrac{x-b}{a}$，$y=\pm\sqrt{x}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$．

若在同一坐标平面上绘制直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称．

指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记为 $y=\log_a x$（a 为常数，$a>0$，$a\neq 1$），称为对数函数，其定义域为 $(0,+\infty)$．

由前面反函数的概念知，$y=a^x$ 的图形和 $y=\log_a x$ 的图形是关于 $y=x$ 对称的，如图 1-22 所示．

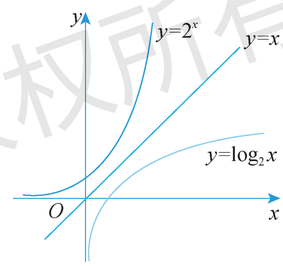

图 1-22　指数函数与对数函数的图形

问题解惑

【问题 1-1】如何判断两个函数是否相同?

定义域和对应法则是确定函数的两个关键要素，只要两个函数的定义域和对应法则都相同，那么，这两个函数就相同；如果定义域或对应法则有一个不相同，那么这两个函数就不相同．

判断两个函数是否相同，取决于函数的定义域和对应法则两个要素是否相同，如果两个函数的两个要素都相同，则两个函数表示的是同一个函数．

例如，函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=|x|$的定义域和对应法则都相同，所以它们是同一函数，只是表示形式不同而已．

但函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是同一函数，尽管对应法则相同，但它们的定义域不同．

例如，函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$，因为 $f(x)$的定义域为（$-\infty$，0）$\cup$(0，$+\infty$)，而 $g(x)$的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），所以 $f(x)$与 $g(x)$是不同的函数．

【问题 1-2】任何两个函数都可以复合成一个函数吗?

并非任何两个函数都可以复合成一个函数，例如，$y=\arccos u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合

成一个函数，因为对于 $u=2+x^2$ 中的任何 u 值，都不能使 $y=\arccos u$ 有意义.

再例如，$y=\sqrt{u}$ 和 $u=-1-x^2$ 也不能复合成一个函数.

【问题 1-3】分段函数是否一定为初等函数?

分段函数不一定是初等函数，例如，取整函数不是初等函数，符号函数也不是初等函数．以下函数是分段函数，但不是初等函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

因为它不可以由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合得到.

但是以下分段函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

可以表示为 $f(x)=\sqrt{x^2}$，它可以看作是 $f(x)=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 函数复合而成的复合函数，因此它是初等函数.

【问题 1-4】单值函数和多值函数都有反函数吗?

只有单值函数才具有反函数，即使 $y=f(x)$ 为单值函数，其反函数却未必是单值函数.

方法探析

【方法 1-1】求函数定义域的方法

对于由实际问题得到的函数，其定义域应该由问题的具体条件来确定．例如，求圆面积的函数 $S=\pi r^2$ 中，自变量 r 是圆的半径，故此函数的定义域就是 $(0，+\infty)$．求销售收入的函数 $R=px$，自变量 x 表示销售数，故此函数的定义域是全体自然数.

若函数只由解析式子给出，而不考虑函数的实际意义，这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的一切实数值．应注意，对于实际应用问题，除了要根据解析式本身来确定自变量的取值范围以外，还要考虑变量的实际意义.

函数的定义域一般使用区间或集合表示，如果函数由若干部分组合而成，则该函数的定义域为各组成部分定义域的交集.

求函数定义域时，通常要考虑以下几方面：

① 分式的分母不为零.

② 偶次根式中被开方式大于或等于 0.

③ 对数函数的真数大于零，底数大于 0 且不等于 1.

④ 正切符号下的式子不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ （$k\in\mathbf{Z}$）.

⑤ 余切符号下的式子不等于 $k\pi$ （$k\in\mathbf{Z}$）.

⑥ 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值小于或等于 1.

【方法 1-1-1】求函数表达式中包含分母的函数定义域

【方法实例 1-1】求函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域

解：对于函数 $y=\frac{1}{x}$，由于分母不能为零，即 $x\neq0$，所以其定义域为 $D=(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$.

【方法实例 1-2】求函数 $y=\frac{3x}{x^2-2x}$ 的定义域

解：要使函数 $y=\frac{3x}{x^2-2x}$ 有意义，由于分母不能为零，必须使 $x^2-2x\neq0$，即 $x\neq2$ 且 $x\neq0$，所以该函数的定义域为（$-\infty$，0）∪（0，2）∪（2，$+\infty$）.

【方法 1-1-2】求函数表达式中包含偶次根式的函数定义域

【方法实例 1-3】求函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域

解：对于函数 $y=\sqrt{9-x^2}$，由于偶次根式中被开方式不能小于零，即 $9-x^2\geqslant0$，所以其定义域为 $D=[-3，+3]$.

【方法 1-1-3】求函数表达式中包含分母和偶次根式的函数定义域

【方法实例 1-4】求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ 的定义域

解：对于函数 $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$，由于该函数同时要满足分母不为零和偶次根式中被开方式大于或等于 0，即 $\begin{cases}\sqrt{9-x^2}\neq0,\\ 9-x^2\geqslant0,\end{cases}$ 所以其定义域为（-3，$+3$）.

【方法实例 1-5】求函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{x}{x+1}$ 的定义域

解：要使函数 $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{x}{x+1}$ 有意义，则应同时满足分母不为零和偶次根式中被开方式大于或等于 0，即必须使 $\begin{cases}4-x^2\geqslant0,\\ x+1\neq0\end{cases}$ 成立，即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant2,\\ x\neq-1.\end{cases}$

这两个不等式的公共解为 $-2\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\neq-1$.

所以该函数的定义域为 $[-2，-1)\cup(-1，2]$.

【方法 1-1-4】求函数表达式中包含两条以上规则的函数定义域

【方法实例 1-6】求函数 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{(x-1)\ln(x+3)}$ 的定义域

解：要使函数 $y=\frac{\sqrt{x-2}}{(x-1)\ln(x+3)}$ 有意义，则该函数应同时满足 a. 分式的分母不为零；

b. 偶次根式中被开方式大于或等于 0；c. 对数的真数大于零，

即必须使 $\begin{cases} x-2\geqslant 0, \\ x-1\neq 0, \\ \ln(x+3)\neq 0, \\ x+3>0 \end{cases}$ 成立，即 $\begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\neq 1, \\ x\neq -2, \\ x>-3, \end{cases}$

所以该函数的定义域为[2，+∞).

【方法实例 1-7】求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域

解：要使函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 有意义，则该函数应同时满足 a. 分式的分母不为零；b. 偶次根式中被开方式大于或等于 0；c. 反正弦符号下的式子的绝对值小于或等于 1，

即必须使 $\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1, \\ 25-x^2>0 \end{cases}$ 成立，即 $\begin{cases} -4\leqslant x\leqslant 6, \\ -5<x<5, \end{cases}$ 也就是 $-4\leqslant x<5$，

所以该函数的定义域为 $D=[-4，5)$.

【方法 1-2】求函数值的方法

【方法 1-2-1】将常量值直接代入函数表达式

【方法实例 1-8】已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$，求 $f(3)$.

解：因为 $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$，所以 $f(3)=\dfrac{3+1}{3+5}=\dfrac{1}{2}$.

【方法 1-2-2】将包含变量的表达式替换函数表达式中的变量

【方法实例 1-9】已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解：因为 $f(x)=\dfrac{x+1}{x+5}$，所以 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{\dfrac{1}{x}+5}=\dfrac{x+1}{5x+1}$.

【方法实例 1-10】已知 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\lg x$，求 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$，$f(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$

解：因为 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\lg x$，

所以 $f(\varphi(x))=(\lg x)^2=\lg^2 x$，

$\varphi(f(x))=\lg x^2$，

$f(f(x))=(x^2)^2=x^4$，

$\varphi(\varphi(x))=\lg(\lg x)$.

【方法 1-2-3】先凑因式，然后替换自变量表达式

【方法实例 1-11】已知 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$和 $f(x-1)$

解：因为 $f(x+1)=x^2+3x+5=(x+1)^2+(x+1)+3$，所以 $f(x)=x^2+x+3$，

$$F(x-1)=(x-1)^2+(x-1)+3=x^2-2x+1+x-1+3=x^2-x+3.$$

【方法 1-3】将基本初等函数组合为复合函数的方法

在实际问题中，经常将几个较简单的函数组合成较复杂的函数，设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$，将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$，即为所求的复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

【方法实例 1-12】将以下基本初等函数组合为复合函数：$y=u^3$，$u=\sin x$

解：$y=u^3$，$u=\sin x$ 组合为复合函数 $y=\sin^3 x$.

【方法实例 1-13】将以下基本初等函数组合为复合函数：$y=\ln u$，$u=3^v$，$v=\dfrac{1}{x}$

解：$y=\ln u$，$u=3^v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 组合为复合函数 $y=\ln 3^{\frac{1}{x}}$.

【方法 1-4】分解复合函数为基本初等函数的方法

在实际问题中，有时也需要将复合函数分解为基本初等函数，分解复合函数的方法是将复合函数分解成基本初等函数或基本初等函数之间（或与常数）的和、差、积、商.

【方法实例 1-14】将复合函数 $y=\sin 2^x$ 分解为基本初等函数

解：$y=\sin 2^x$ 是由 $y=\sin u$，$u=2^x$ 复合而成的.

【方法实例 1-15】将复合函数 $y=\ln\cos 3x$ 分解为基本初等函数

解：$y=\ln\cos 3x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=3x$ 复合而成的.

【方法实例 1-16】将复合函数 $y=\cos^2(3x+1)$ 分解为基本初等函数

解：$y=\cos^2(3x+1)$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x+1$ 复合而成的.

【方法实例 1-17】将复合函数 $y=a^{\ln\sqrt{1+2x}}$ 分解为基本初等函数

解：$y=a^{\ln\sqrt{1+2x}}$ 是由 $y=a^u$，$u=\ln v$，$v=\sqrt{t}$，$t=1+2x$ 复合而成的.

【方法 1-5】求反函数的方法

求函数 $y=f(x)$的反函数的方法如下：

a. 从 $y=f(x)$中解出 $x=f^{-1}(y)$；

b. 将 x 和 y 交换，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

【方法实例 1-18】求函数 $y=3x-5$ 的反函数

解：函数 $y=3x-5$ 的反函数 $y=\dfrac{x+5}{3}$.

【方法实例1-19】求函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$（$bc-ad\neq 0$）的反函数

解：函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$.

自主训练

本模块的自主训练题包括基本训练和提升训练两个层次，未标注*的为基本训练题，标注*的为提升训练题.

【训练实例1-1】求下列函数的定义域

（1）$y=\sqrt{5-x}$　　（2）$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

（3）$y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$　　（4）$y=\sqrt{x+2}+\ln(1-x)$

*（5）$y=\dfrac{x}{\tan x}$

【提示】：a. 分式的分母不为零；b. 正切符号下的式子不等于 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）.

*（6）$y=\lg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

【提示】：a. 分式的分母不为零；b. 偶次根式中被开方式大于或等于0；c. 对数的真数大于零.

*（7）$y=\arcsin\sqrt{5x}$

【提示】：a. 偶次根式中被开方式大于或等于0；b. 反正弦符号下的式子的绝对值小于或等于1.

*（8）$y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\ln(2+x)}$

【提示】：a. 分式的分母不为零；b. 偶次根式中被开方式大于或等于 0；c. 对数的真数大于零.

【训练实例1-2】判断下列函数的奇偶性

（1）$f(x)=2x^2-5\cos x$　　（2）$f(x)=\sin x-\cos x$

*（3）$f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$　　*（4）$f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2+1})$

【训练实例1-3】指出下列函数的复合过程

（1）$y=\sqrt[3]{2x-1}$　　（2）$y=\mathrm{e}^{-x}$

（3）$y=\cos^2(2x+1)$　　*（4）$y=\arccos(1-x^2)$

*（5）$y=\ln\tan 3x$　　*（6）$y=\ln\ln\ln^4 x$

【训练实例 1-4】写出下列函数的复合函数

（1）$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{x+1}{2}$　　（2）$y=\sin u$，$u=x^2$

*（3）$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$　　*（4）$y=1+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

【训练实例 1-5】求下列函数的反函数

（1）$y=\sqrt[3]{2x-1}$　　（2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$

应用求解

【日常应用】

【应用实例 1-1】使用函数解析式表示自由落体运动方程

【实例描述】

在自由落体运动中，物体下落的距离 s 随下落时间 t 的变化而变化，使用函数关系式描述下落距离 s 与时间 t 之间的依赖关系.

【实例求解】

在物体的自由落体运动中，从开始下落时算起，经过的时间设为 t，在这段时间内物体的下落距离为 s，如果不计空气阻力，那么 s 与 t 之间的依赖关系可以使用以下函数关系式表示：

$s=\dfrac{1}{2}gt^2$（其中 g 为重力加速度，是一个常量），

该函数的定义域为 $D=[0，+\infty)$.

如果物体在 $t=0$ 时从高度为 h_0 处自由落下，时间 t 的范围为 0 至 $\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$，其定义域为$\left[0，\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}\right]$，值域 $M=[0，h_0]$.

【经济应用】

【应用实例 1-2】使用函数解析式描述常见的经济函数

【实例描述】

经济活动中往往会涉及许多经济量，这些量之间存在着各种相关的关系，这些关系用数学模型进行描述，就形成了各种经济函数.

（1）使用函数解析式描述需求函数与供给函数

假设某商品的供给函数和需求函数分别是 $Q_{\mathrm{d}}=25p-10$ 和 $Q_{\mathrm{s}}=200-5p$ ，求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

（2）使用函数解析式描述成本函数、收入函数与利润函数

美的电器公司生产一种新产品，根据市场调查得出需求函数为

$$Q(p)=-900p+45000\ .$$

该公司生产该产品的固定成本是 270000 元，而单位的可变成本是 10 元，为获得最大利润，出厂价格应为多少？

【实例求解】

1. 需求函数与供给函数

（1）需求函数

市场上消费者对某种商品的需求量除了与该商品的价格有关外，还与消费者的收入、待用商品的价格、消费者的人数等有关．现在我们只考虑商品的需求量与价格的关系，而将其他各种量看作常量，这样，商品的需求量 Q 就是价格 P 的函数，称为需求函数，记作 $Q=Q(p)$.

一般来说，当商品的价格增加时，商品的需求量将会减少，因此，通常需求函数是单调递减函数.

常见的需求函数有线性需求函数、二次曲线需求函数、指数需求函数.

① 线性需求函数：$Q=a-bp$ （$a>0$，$b>0$；a，b 都是常数）.

② 二次曲线需求函数：$Q=a-bp-cp^2$ ($a>0$，$b>0$，$c>0$；a，b，c 都是常数).

③ 指数需求函数：$Q=a\mathrm{e}^{-bp}$ ($a>0$，$b>0$；a，b 都是常数).

（2）供给函数

市场上影响供给量的主要因素也是商品的价格，因此，商品的供给量 Q 也是价格的函数，称为供给函数，记作 $Q=\varphi(p)$.

一般地，商品的供给量随价格的上升而增加，随价格的下降而减少，因此，供给函数是单调递增函数.

常见的供给函数有：

$Q=ap-b$ ($a>0$，$b>0$；a，b 都是常数)；

$Q=\dfrac{ap+b}{mP+n}$ ($a>0$，$b>0$，$m>0$，$an>bm$) .

（3）市场均衡

对一种商品而言，如果需求量等于供给量，则这种商品就达到了市场均衡. 假设 Q_{d}，Q_{s} 分别表示需求函数和供给函数，以线性需求函数和线性供给函数为例，令 $Q_{\mathrm{d}}=Q_{\mathrm{s}}$ ，

即 $a-bp=cp-d$ ，得 $p=\dfrac{a+d}{b+c}=p_0$.

这个价格 p_0 称为该商品的市场均衡价格，而 $Q_{\mathrm{d}}=Q_{\mathrm{s}}=Q_0$ 称为该商品的市场均衡数量.

（4）求解给定条件下的市场均衡价格和市场均衡数量

由均衡条件 $Q_d = Q_s$，得 $25p - 10 = 200 - 5p$，$30p = 210$，$p = 7$，

从而 $Q_0 = 25p - 10 = 165$，

即市场均衡价格为 7，市场均衡数量为 165.

2. 成本函数、收入函数与利润函数

（1）成本函数

产品成本是指以货币形式表现的企业生产和销售产品的全部费用支出，产品成本可分为固定成本和可变成本两部分．成本函数表示费用总额与产量（或销售量）之间的相与关系，固定成本（常用 C_1 表示）是尚未生产产品时的支出，在一定限度内是不随产量变动的费用．例如，厂房费用、机器折旧费用、一般管理费用、管理人员工资等．可变成本（常用 C_2 表示）是随产品变动而变动的费用，例如，原材料、燃料和动力费用、生产工人的工资等.

以 x 表示产量，C 表示总成本，则 C 与 x 之间的函数关系称为总成本函数，记作

$$C = C(x) = C_1 + C_2,\quad x \geqslant 0.$$

平均成本是平均每个单位产品的成本，平均成本记作 $\overline{C(x)} = \dfrac{C(x)}{x}\ (x > 0)$.

（2）收入函数

销售某产品的收入 R 等于产品的单位价格 p 与销售量 x 的乘积，即 $R = px$，称其为收入函数.

（3）利润函数

销售利润 L 等于收入 R 减去成本 C，即 $L = R - C$，称为利润函数.

（4）盈亏平衡

当 $L = R - C > 0$ 时，生产者盈利；

当 $L = R - C < 0$ 时，生产者亏本；

当 $L = R - C = 0$ 时，生产者盈亏平衡，使 $L(x) = 0$的点x_0 称为盈亏平衡点，也称为保本点.

（5）在要求利润最大化前提下求产品的出厂价格

以 Q 表示产量，C 表示成本，p 表示价格，则有 $C(Q) = 10Q + 270000$，

而需求函数为 $Q(p) = -900p + 45000$，

代入得 $C(p) = -9000p + 720000$，

收入函数为 $R(p) = pQ = p(-900p + 45000) = -900p^2 + 45000p$，

利润函数为
$$\begin{aligned}L(P) &= R(p) - C(p) = (-900p^2 + 45000p) - (-9000p + 720000)\\ &= -900(p-30)^2 + 90000.\end{aligned}$$

由于利润函数是一个二次函数，容易求得：当价格 p=30 元时，利润 L=90000 元为最大利润，在此价格下，可望销售量为 Q=−900×30+45000=18000（单位）.

【应用实例 1-3】建立酒店总利润与房间定价之间的函数关系

【实例描述】

新天地酒店有 200 间客房，如果每间客房定价不超过 180 元，则可以全部出租．若每间定价高出 10 元，则会少出租 4 间．设房间出租后的服务费成本为 50 元/间，试建立酒店总利润与房间定价之间的函数关系．

【实例求解】

设酒店每间客房定价为 x 元，酒店总利润为 y 元．

① 若 $x\leqslant 180$ 元，则可出租 200 间，每间利润为 $x-50$，酒店总利润为 $200(x-50)$元．

② 若 $x>180$ 元，则每高出 10 元，房间少出租 4 间，实际出租了 $\left[200-\dfrac{4(x-180)}{10}\right]$ 间，每间利润为 $x-50$，总利润为$(x-50)\left[200-\dfrac{4(x-180)}{10}\right]$．

所以，酒店总利润与房间定价之间的函数关系为

$$y=\begin{cases}200(x-50), & 0\leqslant x\leqslant 180,\\ (x-50)\left[200-\dfrac{2(x-180)}{5}\right], & 180<x\leqslant 680.\end{cases}$$

【电类应用】

【应用实例 1-4】使用函数描述电路中电流 I 与电阻 R 之间的关系

【实例描述】

对于如图 1-23 所示的简单照明电路，电压 U 保持不变，通常为 220V，使用函数关系式描述电流 I 与电阻 R 之间的关系．

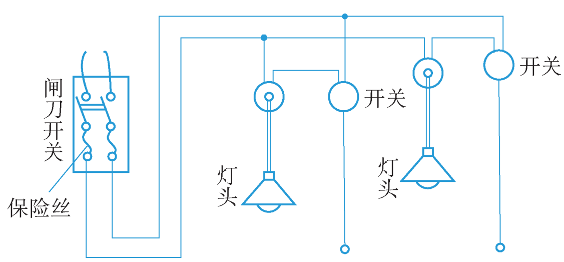

图 1-23　简单照明电路示意图

【实例求解】

由电学中的欧姆定律可知，在同一电路中，导体中的电流跟导体两端的电压成正比，跟导体的电阻成反比．

根据欧姆定律可得描述电流 I 与电阻 R 之间关系的表达式为 $I=\dfrac{U}{R}$．

公式中的 I 表示电流，其单位是安培（A），U 表示电压，单位是伏特（V），R 表示电阻，单位是欧姆（Ω）.

如果照明电路的电压为 220V，则电路中用电器的电阻 R 越大，电路的电流 I 越小.

【机类应用】

【应用实例 1-5】使用函数解析式描述曲柄连杆机构中滑块的运动规律

【实例描述】

油泵的曲柄连杆机构示意图如图 1-24 所示，图中 AB 为曲柄，BC 为连杆，曲柄为主动轮，曲柄 AB 转动时，连杆 BC 带动滑块做往复直线运动，即将圆周运动转化为直线运动. 设曲柄长度为 r，其转动的角速度为 ω，连杆长度为 l，求滑块的运动规律，其中 r、ω、l 均为常数.

【实例求解】

图 1-24 所示的曲柄连杆机构示意图使用三角形表示如图 1-25 所示，从 B 点作垂直线，该垂直线与边 AC 相交于 D 点，在该三角形中，$AB=r$，$BC=l$，由于曲柄角速度为 ω，所以 $\angle BAD=\omega t$.

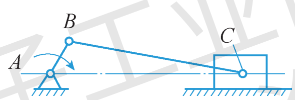

图 1-24　曲柄连杆机构示意图

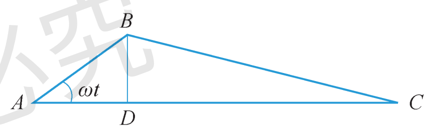

图 1-25　曲柄连杆机构构成的三角形

由此可计算出 $AD=r\cos\omega t$， $BD=r\sin\omega t$.

在直角三角形 BDC 中，$DC=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$

所以，滑块的运动规律描述如下：

a. 一般情况下，$AC=AD+DC==r\cos\omega t+\sqrt{l^2-r^2\sin^2\omega t}$;

b. 特殊情况下，当曲柄 AB 与连杆 BC 拉直重合时，$AC=AB+BC=r+l$，当曲柄 AB 与连杆 BC 重叠重合时，$AC=BC-AB=l-r$.

应用拓展

【应用实例 1-6】建立鱼缸制作总费用与其底面边长的函数关系式

【应用实例 1-7】建立商品总费用与进货批量之间的函数关系式

【应用实例 1-8】建立闭合电路中电功率与电阻之间的函数关系式

【应用实例 1-9】建立导杆机构运动规律的函数关系式

扫描二维码，浏览电子活页 1-1，完成本模块拓展应用题的求解.

电子活页 1-1

模块小结

1. 基本知识

（1）函数概念

设有两个变量 x 和 y，当变量 x 在一个给定的非空数集 D 内任意取某一个数值时，按照一定的对应法则 f，变量 y 总有唯一确定的数值与之对应，则称为变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$.

（2）函数的定义域

使函数 $y=f(x)$有意义的自变量 x 的取值范围，即集合 D.

（3）函数值

与自变量 x_0 对应的函数值 y_0 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

（4）函数的三要素

指函数的定义域、对应法则、值域.

（5）函数的基本性质

单调性、奇偶性、周期性和有界性.

（6）复合函数

由两个或两个以上的函数通过中间变量复合而成的函数.

（7）基本初等函数

主要包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

（8）初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而成的函数，一般用一个解析式表示.

（9）分段函数

两个变量之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表示.

（10）常用经济函数

主要包括需求函数、供给函数、成本函数、收入函数、利润函数等.

2. 基本方法

求函数定义域的基本方法如下.

第 1 步：识别函数中的基本元素——自变量（通常表示为 x），其他数学元素，例如，常数、指数、对数、三角函数等.

第 2 步：分析函数中的限制条件.

分析函数中的限制条件的思维导图如图 1-26 所示.

① 一看是否有“分式”，如果有分式，根据“分式的分母不为零”的规则写出不等式.

② 二看是否有“偶次根式”，如果有偶次根式，根据“偶次根式中被开方式大于或等于零”的规则写出不等式.

③ 三看是否有“对数函数”，如果有对数函数，根据“对数函数的真数大于零，底数大于零且不等于 1”的规则写出不等式.

④ 四看是否有“正切函数”，如果有正切函数，根据“正切符号下的式子不等于 $k\pi+$

$\frac{\pi}{2}$（$k\in\mathbf{Z}$）”的规则写出不等式.

⑤ 五看是否有“余切函数”，如果有余切函数，根据“余切符号下的式子不等于 $k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）”的规则写出不等式.

⑥ 六看是否有“反正弦函数”或“反余弦函数”，如果有“反正弦函数”或“反余弦函数”，根据“反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值小于或等于 1”的规则写出不等式.

对于复合函数，需要分析各部分的限制条件.

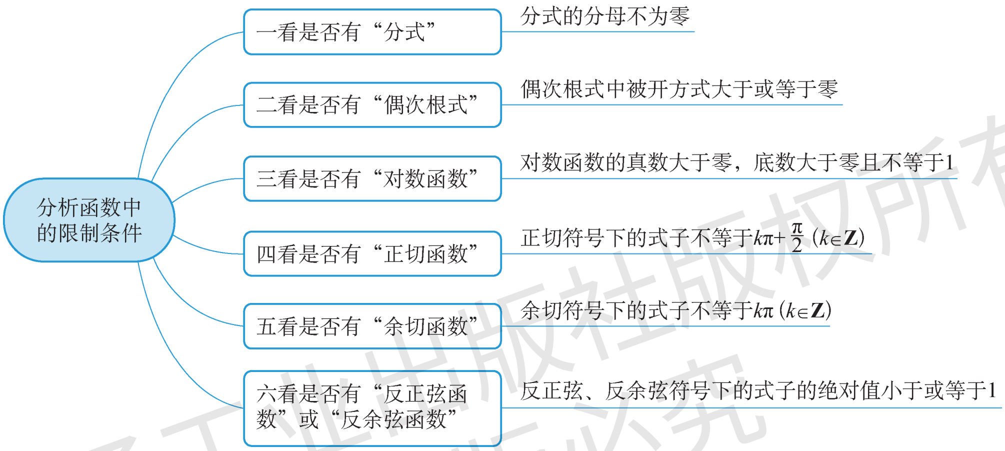

图 1-26　分析函数中的限制条件的思维导图

第 3 步：联立不等式并求解不等式或不等式组.

根据相应的限制条件，列出不等式或不等式组；解这些不等式或不等式组，得到 x 的取值范围.

第 4 步：确定定义域.

将解出的 x 的取值范围转化为定义域的形式.

如果定义域是离散的，则须要明确列出所有可能的 x 值.

如果定义域是连续的，则使用区间方式表示函数定义域.

第 5 步：检查定义域.

将定义域中的元素代入原函数，确保函数有意义. 如果有必要，则可以使用图形进行验证.

注意，对于分段函数，需要分别求出每一段的定义域，然后取并集.

【验证实例 1-6】求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

① 识别函数中的基本元素：自变量 x，常数 1，根式 $\sqrt{x-1}$.

② 分析函数中的限制条件：由于是分母为根式的函数，须要满足两个条件：分母不为 0（但这里显然不会为 0），被开方数为非负数.

③ 解不等式：$x-1>0$.

④ 确定定义域：解不等式得 $x>1$，所以定义域为$(1，+\infty)$.

⑤ 检查定义域：将 $x>1$ 代入原函数，函数有意义.

模块考核

扫描二维码，浏览电子活页 1-2，完成本模块的在线考核.

扫描二维码，浏览电子活页 1-3，查看本模块考核试题的答案.

电子活页 1-2　　电子活页 1-3