第三章

一元函数积分学

拓展阅读

18 世纪：微积分的蓬勃发展

一元函数积分学由不定积分和定积分两部分组成．不定积分和定积分虽然由不同的问题引出，实际含义也各不相同，但却有着十分密切的联系．

第一节　不定积分

第二章讨论了函数的导数．例如，通过路程函数求瞬时速度，本质上就是求导数的问题．现在讨论其逆问题：已知速度函数，如何求路程函数？更一般地，已知导函数 $f'(x)$ 求 $f(x)$，即求导数的逆问题，这正是本节要讨论的函数的不定积分．

一、不定积分的概念与性质

1. 原函数与不定积分的定义

定义 3-1　如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，即对该区间内的任意 x，都有

$$F'(x)=f(x)$$

或

$$\mathrm{d}F(x)=f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则称函数 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**原函数**（primitive function）.

例如，因为 $(x^2)'=2x$，所以 x^2 是 $2x$ 的一个原函数．又因为 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数．

关于函数 $f(x)$ 的原函数，要解决以下 3 个问题：

（1）什么样的函数 $f(x)$ 存在原函数；

(2) 如果$f(x)$的原函数存在，是否具有唯一性；

(3) 如何求出$f(x)$的原函数.

下面不加证明地给出原函数的存在定理.

定理 3-1　若函数$f(x)$在某区间I上连续，则$f(x)$在该区间上必存在原函数.

如果函数$F(x)$是函数$f(x)$的一个原函数，即满足$F'(x)=f(x)$，那么显然有

$$(F(x)+C)'=f(x)\quad (C\text{ 为任意常数}),$$

即$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数. 因此，如果$f(x)$存在原函数，则必然存在无穷多个原函数.

更进一步，如果$\Phi(x)$和$F(x)$都是$f(x)$的原函数，则有

$$(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

由于导数恒为零的函数必为常数，因此

$$\Phi(x)-F(x)=C\quad (C\text{ 为某个常数}),$$

即

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

由此可得出以下结论：

定理 3-2　如果函数$f(x)$在某个区间内存在原函数$F(x)$，那么$f(x)$有无穷多个原函数，且$f(x)$的全部原函数可记为$F(x)+C$的形式，其中C为任意常数.

定义 3-2　在区间I上，函数$f(x)$的所有原函数（含任意常数项）称为$f(x)$的**不定积分**（indefinite integral），记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

其中，$\int$称为**积分号**（sign of integration），$f(x)$称为**被积函数**（integrand），$f(x)\mathrm{d}x$称为**被积表达式**（integrand expression），x称为**积分变量**（variable of integration）.

根据定义，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，那么$F(x)+C$就是$f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C. \tag{3-1}$$

其中，任意常数C称为**积分常数**（integral constant）.

由不定积分的定义可知，要求函数$f(x)$的不定积分，只需先求出$f(x)$的一个原函数$F(x)$，再加上任意常数C即可.

例 3-1　求不定积分：

(1) $\int 2x\,\mathrm{d}x=x^2+C$；

(2) $\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$.

不定积分的几何意义：

函数$f(x)$的原函数$F(x)$的图形称为$f(x)$的**积分曲线**（integral curve）. 由于$F'(x)=f(x)$，积分曲线上横坐标为x的点处的切线斜率等于$f(x)$，因此，把积分曲线沿y轴平移C个单位，即可得到另一条积分曲线. 当C取遍全体实数时，便得到一曲线族. 曲线族中所有曲线在横坐标相同的点处的切线相互平行（见图 3-1）.

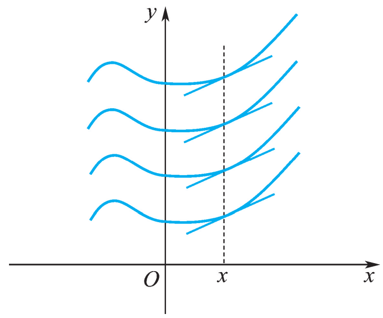


图 3-1

2. 不定积分的性质和基本积分公式

由不定积分的定义可得到下列性质：

性质 1 $\dfrac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$.

性质 2 $\int F'(x)dx = F(x)+C$ 或 $\int dF(x) = F(x)+C$.

性质 3 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k 是常数，$k\neq 0$).

性质 4 $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

由性质 1 和性质 2 可知，在不考虑积分常数 C 的情况下，积分号“$\int$”与导数符号“$\dfrac{d}{dx}$”（或微分号“d”）一起使用恰好互相抵消．这反映了求导和求不定积分两种运算的互逆关系，就像加法和减法运算、乘法和除法运算的互逆关系一样．因此，可从导数的基本公式推导出下列相应的基本积分公式：

(1) $\int kdx = kx+C$ (k 是常数).

特别地，$\int 0dx = C$，$\int dx = x+C$.

(2) $\int x^{\mu}dx = \dfrac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$ (常数 $\mu\neq -1$).

特别地，$\int xdx = \dfrac{1}{2}x^2+C$，$\int \dfrac{1}{x^2}dx = -\dfrac{1}{x}+C$，$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+C$.

(3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+C$.

(4) $\int e^x dx = e^x+C$.

(5) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$ ($a>0, a\neq 1$).

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

(8) $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$.

(9) $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.

(11) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$.

(12) $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$.

(13) $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

对公式（3）说明如下：当 $x>0$ 时，有 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$，故 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C$；当 $x<0$ 时，有 $[\ln(-x)]'=\frac{1}{x}$，故 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C$. 因此，不论 $x>0$ 还是 $x<0$，都有 $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.

以上 13 个基本积分公式是求不定积分的基础，必须牢记．

下面利用不定积分的性质和基本积分公式，通过对被积函数进行代数恒等变换或三角恒等变换后，直接用基本积分公式来求不定积分．这种求不定积分的方法称为**直接积分法**（immediate integration）.

例 3-2　求 $\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$.

解　被积函数为幂函数，直接利用基本积分公式可得

$$\int \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \int x^{-3}\mathrm{d}x = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$$
$$= -\frac{1}{2x^2}+C.$$

例 3-3　求 $\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x$.

解

$$\int \sqrt{x}(x^2-5)\mathrm{d}x = \int (x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x = \int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x - 5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

例 3-4　求 $\int \frac{(x-1)^2}{x^3}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{(x-1)^2}{x^3}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-2x+1}{x^3}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \ln|x| + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

例 3-5　求 $\int \cos^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}(x+\sin x)+C.$$

例 3-6　求 $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$.

解　$$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \tan x - x + C.$$

例 3-7　求 $\int \frac{4^x}{9^x}\,\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{4^x}{9^x}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{4}{9}\right)^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ln\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right)^x + C.$$

例 3-8　求 $\int(2^x\mathrm{e}^x - \cos x)\,\mathrm{d}x$.

解　$$\int(2^x\mathrm{e}^x - \cos x)\,\mathrm{d}x = \int(2\mathrm{e})^x\mathrm{d}x - \int\cos x\mathrm{d}x = \frac{(2\mathrm{e})^x}{1+\ln 2} - \sin x + C.$$

二、换元积分法

由于被积函数的复杂性，仅利用直接积分法所能计算的不定积分是非常有限的．本节将复合函数的微分法逆向运用于求不定积分，利用中间变量代换得到复合函数的积分法，称为**换元积分法**（integration by substitution），简称换元法．换元法又分为第一类换元法和第二类换元法．

1. 第一类换元法

定理 3-3　设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的一个原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C. \tag{3-2}$$

证　因为 $F'(u)=f(u)$，由复合函数微分法得

$$\frac{\mathrm{d}F[\varphi(x)]}{\mathrm{d}x} = F'(u)\varphi'(x) = f[\varphi(x)]\varphi'(x),$$

即 $F[\varphi(x)]$ 是 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的一个原函数．

根据定理 3-3，在求积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 时，若函数 $g(x)$ 可转化为 $g(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)$ 的形式，则求积分 $\int g(x)\mathrm{d}x$ 的过程如下：

$$\int g(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$
$$= \int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C = F[\varphi(x)] + C \quad (\text{其中 } u=\varphi(x)).$$

第一类换元法通过引入中间变量 $u=\varphi(x)$，将被积表达式凑成某一函数的微分形式，再应用基本积分公式求解，因此也称为**凑微分法**．

例 3-9　求 $\int \frac{1}{3-2x}\mathrm{d}x$.

解　令 $u=3-2x$，

$$\int \frac{1}{3-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{3-2x}(3-2x)'\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{3-2x}\mathrm{d}(3-2x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\ln|u|+C=-\frac{1}{2}\ln|3-2x|+C.$$

例 3-10　求 $\int \cos(2x+1)\mathrm{d}x$.

解　令 $u=2x+1$，

$$\int \cos(2x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \cos(2x+1)(2x+1)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C.$$

例 3-11　求 $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $u=1-x^2$，

$$\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}(x^2)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x^2$$

$$=-\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

熟练掌握后，可不必写出中间变量 u.

例 3-12　求 $\int \tan x\mathrm{d}x$.

解

$$\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x$$

$$=-\ln|\cos x|+C.$$

即

$$\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C.$$

类似地可以得到

$$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C.$$

由于观察角度不同，所得积分结果可能不同（仅相差一个常数），如例 3-13.

例 3-13　求 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$.

解 1　$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x=\int \sin x\mathrm{d}(\sin x)=\frac{\sin^2 x}{2}+C.$

解 2　$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x=-\int \cos x\mathrm{d}(\cos x)=-\frac{\cos^2 x}{2}+C.$

解 3　$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \sin 2x\mathrm{d}(2x)=-\frac{\cos 2x}{4}+C.$

例 3-14 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

即

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例 3-15 求 $\int \frac{1}{x^2+4x+13}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+2)^2+3^2}\mathrm{d}(x+2)$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C.$$

例 3-16 求 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

即

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

例 3-17 求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\mathrm{d}(x-1) = \arcsin(x-1) + C.$$

例 3-18 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}(x-a) - \int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}(x+a)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

即
$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

例 3-19　求 $\int \cos 3x\cos 2x dx$.

解
$$\int \cos 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx$$
$$= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C.$$

例 3-20　求 $\int \cos^2 x dx$.

解
$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2x dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d(2x)$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

例 3-21　求 $\int \cos^3 x dx$.

解
$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x)$$
$$= \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x)$$
$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

例 3-22　求 $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

解
$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

例 3-23　求 $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.

解
$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = -\int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$$

2. 第二类换元法

第一类换元法通过凑微分，将复杂积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ 转化为易于积分的 $\int f(u)du$ 形式．如果 $\int f(x)dx$ 不易直接计算，且被积函数不能分解为两部分的乘积形式，则还可以通过适当的变量代换 $x=\psi(t)$，将积分 $\int f(x)dx$ 转化为易于积分的 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$ 形式进行计算．这种方法称为第二类换元法．

定理 3-4　设 $x=\psi(t)$ 是单调的、可导的函数，且 $\psi'(t)\neq 0$. 若
$$\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt = G(t) + C,$$

则

$$\int f(x)\,dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,dt = G[\psi^{-1}(x)] + C. \tag{3-3}$$

其中，$t=\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

证 令 $t=\psi^{-1}(x)$，因为

$$\{G[\psi^{-1}(x)]\}' = G'(t)\frac{dt}{dx} = f[\psi(t)]\psi'(t)\frac{1}{\psi'(t)} = f[\psi(t)] = f(x).$$

所以，$G[\psi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，即

$$\int f(x)\,dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,dt = G[\psi^{-1}(x)] + C.$$

下面举例说明第二类换元法的应用.

例 3-24 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$.

解 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$，于是

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{1+t}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= 2t - 2\ln(1+t) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

例 3-25 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx$.

解 令 $t=\sqrt[3]{x+2}$，则 $x=t^3-2$，$dx=3t^2dt$，于是

$$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+2}}dx = \int \frac{3t^2}{1+t}dt = 3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 3\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\ln|t+1| + C$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x+2}+1\right| + C.$$

例 3-26 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

解 为了去掉被积函数中的根式 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t,\quad dx = a\cos t\,dt,$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt$$
$$= a^2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right) + C.$$

因为 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$，所以

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

例 3-27 求 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}\ (a>0)$.

解　设 $x = a\tan t\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int \cos t\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{a^2}\sin t + C.$$

为了把 $\sin t$ 转换为 x 的函数，根据 $\tan t = \dfrac{x}{a}$ 作辅助直角三角形（见图 3-2），得到

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

因此，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

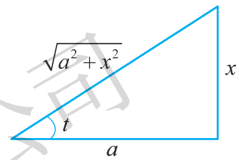


图 3-2

例 3-28　求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\mathrm{d}x(a > 0)$.

解　当 $x > a$ 时，设 $x = a\sec t\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\mathrm{d}x = a\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan t\mathrm{d}t = a\int \tan^2 t\mathrm{d}t$$
$$= a\int (\sec^2 t - 1)\mathrm{d}t = a\tan t - at + C.$$

利用图 3-3 所示的辅助直角三角形，可得

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

因此，

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - a^2} - a\arctan\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C.$$

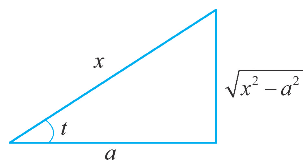


图 3-3

当 $x < -a$ 时，设 $x = -a\sec t\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$，结果相同.

从例 3-26 至例 3-28 可以看出：当被积函数含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$，$\sqrt{a^2 + x^2}$，$\sqrt{x^2 - a^2}$ 时，可利用三角函数的平方关系进行三角代换．还有一些被积函数含有二次根式且分母次数高于分子的不定积分，这时可以利用倒变换 $x = \dfrac{1}{t}$ 将积分化简．

例 3-29　求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}}(a > 0, x > 0)$.

解　设 $x = \dfrac{1}{t}$，则 $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$，因此，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - (at)^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(at)}{\sqrt{1 - (at)^2}}$$
$$= -\frac{1}{a}\arcsin at + C = -\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x} + C.$$

在本节的例题中，有几个积分结果是经常会遇到的，它们通常也被当作公式使用．因此，除了 13 个基本积分公式，再补充以下几个常用积分公式（其中常数 $a>0$）：

(14) $\int \tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$.

(15) $\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

(16) $\int \sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$.

(17) $\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

(18) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a}+C$.

(19) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$.

(20) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.

(21) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$.

(22) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$.

三、分部积分法

前面在复合函数求导法则的基础上得到了换元积分法．下面将利用两个函数乘积的求导公式推导出另一种求积分的基本方法——**分部积分法**（integration by parts）．

设函数 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 具有连续导数．那么，两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)'=u'v+uv',$$

移项得

$$uv'=(uv)'-u'v.$$

对上式两边求不定积分，得

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x, \tag{3-4}$$

或

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u. \tag{3-5}$$

式（3-4）和式（3-5）称为**分部积分公式**．

例 3-30　求 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　该积分用换元法不易求解，现试用分部积分法．应如何选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 呢？如果设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=\sin x$，代入分部积分公式（3−5），得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\sin x=x\sin x-\int\sin x\mathrm{d}x=x\sin x+\cos x+C.$$

如果设 $u=\cos x$，$\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x$，$v=\dfrac{x^2}{2}$，得

$$\int x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cos x-\int\frac{x^2}{2}\sin x\mathrm{d}x.$$

这时会发现积分变得更加复杂，更不容易求解，因此不可取．

由此可见，使用分部积分公式时，关键在于恰当地选取 u 和 $\mathrm{d}v$，一般应遵循下列原则：

（1）v 要容易求得；

（2）$\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 更容易计算．

例 3−31　求 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.\end{aligned}$$

从上述两个例子可以看出，如果被积函数是幂函数与指数函数的乘积，或幂函数与余（正）弦函数的乘积，则可以用分部积分法求积分．一般将幂函数看作 u，对指数函数或余（正）弦函数用凑微分的方法得到 v. 每使用一次分部积分公式便可使幂函数的次数降低一次，从而得到一个较简单的积分．

例 3−32　求 $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

解
$$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2=x^2\mathrm{e}^x-2\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

经过一次分部积分后，幂函数的次数降低一次，得到的积分 $\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 较原积分更简单．再使用一次分部积分公式可得

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x&=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\&=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C\\&=\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)+C.\end{aligned}$$

例 3−33　求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解
$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}x^2,$$

设 $u=\arctan x$，$\mathrm{d}x^2=\mathrm{d}v$，即 $v=x^2$，则

$$\begin{aligned}\int x\arctan x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.$$

熟练掌握后，可不用写出 u 和 v 的表达式 .

例 3-34　求 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解
$$\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

例 3-35　求 $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\int x^2\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \ln x\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

可以看出，如果被积函数是幂函数和对数函数的乘积，或幂函数和反三角函数的乘积，则可以考虑用分部积分法求积分 . 一般将对数函数或反三角函数看作 u， 而将幂函数用凑微分的方法得到 $\mathrm{d}v$.

例 3-36　求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x$$

$$= \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x,$$

即
$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x,$$

移项得
$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C.$$

此例也是应用分部积分法的典型例子，被积函数是指数函数和余（正）弦函数的乘积时，两次使用分部积分公式可出现循环，再通过解方程的方法得到积分结果 .

例 3-37　求 $\int \sec^3x\mathrm{d}x$.

解
$$\int \sec^3x\mathrm{d}x = \int \sec x \cdot \sec^2x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}(\tan x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x \\
&= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x \\
&= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x \\
&= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

所以

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.$$

在求不定积分的过程中，有时必须联合使用换元法与分部积分法才能得出结果 .

例 3-38　求 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　当被积函数含有无理根式时，先用第二类换元法化去根式，再用分部积分法求解 .
令 $x = t^2$，则 $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. 于是

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = 2t\mathrm{e}^t - 2\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t \\
&= 2\mathrm{e}^t(t-1) + C = 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C.
\end{aligned}
$$

四、有理函数的积分

有理函数是指由两个多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的商所构成的函数，又称为有理分式，即

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m}.$$

其中，m 和 n 均为非负整数；$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 均为实数，且 $a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$. 当 $n < m$ 时，称有理函数为真分式；当 $n \geqslant m$ 时，称有理函数为假分式 .

我们知道，利用多项式除法总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式 . 例如

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 7x - 1}{x^2 - x + 2} = 3x + 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - x + 2}.$$

而多项式的积分可直接套用基本公式即可求出，因此要解决有理分式的积分问题，主要是解决真分式的积分问题 .

在求真分式的不定积分时，分母可分解为一次因式和二次质因式的乘积形式，即

$$Q(x) = b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\cdots(x^2 + rx + s)^{\mu},$$

其中，$p^2 - 4q < 0, \cdots, r^2 - 4s < 0$. 那么真分式可以分解为下列部分分式之和：

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = &\frac{A_1}{(x-a)^a} + \frac{A_2}{(x-a)^{a-1}} + \cdots + \frac{A_a}{(x-a)} + \cdots + \\
&\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)} + \cdots + \\
&\frac{K_1x + L_1}{(x^2 + px + q)^{\lambda}} + \frac{K_2x + L_2}{(x^2 + px + q)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{K_{\lambda}x + L_{\lambda}}{x^2 + px + q} + \cdots +
\end{aligned}
$$

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+rx+s)^{\mu}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{x^2+rx+s},$$

其中，A_i,B_i,K_i,L_i,M_i,N_i 均为待定常数，可以利用待定系数法确定．因此，求真分式的不定积分可分为两步：先将真分式分解为部分分式之和，再求其积分．下面通过举例说明．

例 3-39 求 $\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解 因为 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-3)(x-2)}$ 是真分式，所以必须将其分解为部分分式之和．令 $\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$，其中 A,B 为待定系数．等式两边同乘以 x^2-5x+6，得

$$x+3=(A+B)x+(-2A-3B).$$

上式为恒等式，比较恒等式两边同幂项的系数，得

$$\begin{cases}A+B=1,\\-2A-3B=3,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=6,\\B=-5.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{6}{x-3}-\frac{5}{x-2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\frac{6}{x-3}\mathrm{d}x-\int\frac{5}{x-2}\mathrm{d}x\\&=6\ln|x-3|-5\ln|x-2|+C.\end{aligned}$$

例 3-40 求 $\int\frac{1}{x^2(x-1)}\mathrm{d}x$.

解 令 $\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$，等式两边消去分母，得

$$1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2,$$

即

$$1=(A+C)x^2+(-A+B)x-B.$$

比较恒等式两边同幂项的系数，得

$$\begin{cases}A+C=0,\\-A+B=0,\\-B=1,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}A=-1,\\B=-1,\\C=1.\end{cases}$$

于是

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x$$
$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C.$$

例 3-41　求 $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $\frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2}$，等式两边消去分母，得

$$x^3+x^2+2 = (Ax+B)(x^2+2) + Cx + D,$$

即

$$x^3+x^2+2 = Ax^3 + Bx^2 + (2A+C)x + 2B + D.$$

比较恒等式两边同幂项的系数，得

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-2,\quad D=0.$$

于是

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{x^2+2}\mathrm{d}x - \int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2)}{x^2+2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} - \int \frac{\mathrm{d}(x^2+2)}{(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{x^2+2} + C.$$

一切有理函数的原函数均可表示为初等函数．但对于一般的初等函数而言，虽然在其定义区间内原函数一定存在，但其原函数却未必能用初等函数表示．例如，$\int \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$，$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$\int \sin x^2\mathrm{d}x$，$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$ 等这类积分被称为“积不出”的积分．

第二节　定　积　分

定积分是积分学中的另一个基本概念．在医药学领域具有广泛的应用．本节将从两个实例出发，引入定积分的概念，研究定积分的性质和计算方法，并应用定积分解决一些实际问题．

一、定积分的概念与性质

在给出定积分的概念之前，先看两个典型问题．

1. 曲边梯形的面积

如图 3-4 所示，设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负、连续．由直线 $x=a$，$x=b$，x 轴

及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形称为曲边梯形，其中曲线弧称为曲边．如何计算这个曲边梯形的面积?

在初等数学中，计算圆的面积所用的方法是用圆的内接正多边形的面积作为圆的面积的近似值，再无限逼近求出圆的面积．现在也用同样的思想来讨论曲边梯形的面积．由于曲边梯形有一条曲边，其“高度”是变化的，所以不能像矩形那样简单地用底乘以高来求面积．然而，由于曲边梯形的“高”在闭区间 $[a,b]$ 上是连续变化的，因此可以把闭区间 $[a,b]$ 分为多个小区间，相应地得到多个小曲边梯形．那么，小曲边梯形的“高”在每个小区间上变化很小，可以近似看作不变．这样，每个小曲边梯形的面积就可以用小矩形的面积替代，将这些小矩形的面积相加即可得到整个曲边梯形面积的近似值（见图 3-5)．区间分割越细，所得面积的误差就越小．因此，可将小矩形的面积和的极限作为曲边梯形的面积．

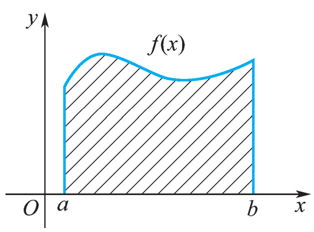


图 3-4

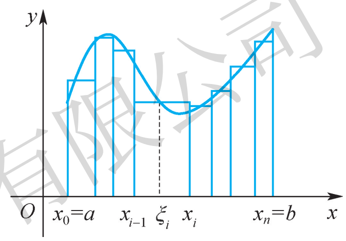


图 3-5

按上述分析，求曲边梯形的面积可归结为下列步骤．

(1) 分割：将曲边梯形分割成多个小曲边梯形．

在区间 $[a,b]$ 中任意插入若干分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\cdots,[x_{n-1},x_n]$， 它们的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$. 经过每一个分点作平行于 y 轴的直线，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，其面积记为 $\Delta A_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 近似替代：用小矩形面积近似替代小曲边梯形的面积．

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 ξ_i， 用以 $[x_{i-1},x_i]$ 为底、$f(\xi_i)$ 为高的小矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似替代小曲边梯形的面积 $\Delta A_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(3) 求和：求所有小矩形面积之和．

把 n 个小矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值，即

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4) 取极限：求上述和式的极限．

记 $\lambda=\max\{\Delta x_i\}$， 当 $\lambda\to0$ 时．求上述和式的极限，则曲边梯形的面积为

$$A=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设有一质点做变速直线运动．已知速度 $v=v(t)$ 为时间间隔 $[T_1,T_2]$ 上 t 的连续函数，且 $v(t)\geqslant0$， 计算在这段时间内该质点所经过的路程 s.

由于质点做变速直线运动，即速度随时间而变化，所以不能用匀速直线运动的路程公式来计算，即

$$路程 = 速度 \times 时间$$

但因为速度函数是连续的，在很短的一段时间内速度变化很小，可近似为匀速．因此，也可仿照上一问题的思路，即用先求路程的近似值，再取极限的方法来求出路程的准确值．具体步骤如下．

（1）分割：在时间间隔 $[T_1,T_2]$ 内任意插入若干分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把 $[T_1,T_2]$ 分成 n 个小段 $[t_0,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_{n-1},t_n]$，各小段时间的长度依次为 $\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}$，相应地，在各小段时间内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n.$$

（2）近似代替：在时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一个时刻 $\tau_i(t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i)$，以 τ_i 时刻的速度 $v(\tau_i)$ 来替代 $[t_{i-1},t_i]$ 上各个时刻的速度，得到部分路程 Δs_i 的近似值，即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i)\Delta t_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

（3）求和：n 个小段部分路程的近似值之和即为所求变速直线运动路程 s 的近似值，即

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

（4）取极限：记 $\lambda = \max\{\Delta t_i\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，取上述和式的极限，可得变速直线运动的路程，即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i.$$

3. 定积分的定义

上述两个问题分别是几何和物理问题，其意义不同，但解决问题的方法和步骤完全一致，均采用分割、近似替代、求和、取极限的步骤．若不考虑问题的具体意义，而对其在数量关系上共同的本质与特性加以概括，便得到定积分的定义．

定义 3-3　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n],$$

各小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，对函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 求和，即

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

令 $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$，如果不论对 $[a,b]$ 如何分割，也不论在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上如何选取点 ξ_i，只要当 $\lambda \to 0$ 时，s 总趋于确定的极限 I，我们称极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**定积分**（definite integral），记作 $\int_a^b f(x)\,dx$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{3-6}$$

其中，$f(x)$ 称为**被积函数**（integrand），$f(x)\mathrm{d}x$ 称为**被积表达式**（integrand expression），x 称为**积分变量**（variable of integration），a 称为**积分下限**（lower limit of integration），b 称为**积分上限**（upper limit of integration），$[a,b]$ 称为**积分区间**（interval of integration）.

根据定积分的定义，本节最初讨论的两个具体问题都可以用定积分来表示 .

（1） 曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a$， $x=b$ 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，即 $A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

（2） 变速直线运动的物体从时刻 T_1 到时刻 T_2 这段时间内所经过的路程 s 为其速度函数 $v(x)$ 在区间 $[T_1,T_2]$ 上的定积分，即 $s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.

由定积分的定义可知，定积分表示一个数，它的大小仅与被积函数和积分区间有关，而与积分变量的记号无关，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上**可积** . 那么函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足什么条件时，才称得上在区间 $[a,b]$ 上可积？下面仅给出两个充分条件，证明从略 .

定理 3-5 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积 .

定理 3-6 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积 .

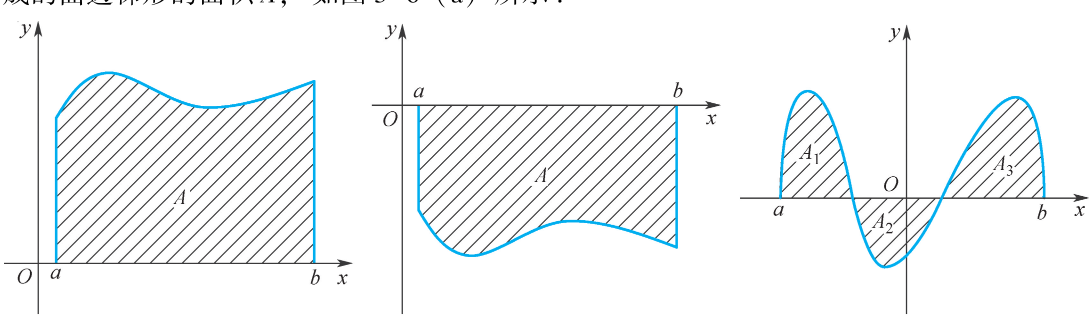
在定积分的定义中，假设 $a<b$， 为了应用方便，还规定：

（1） 当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$；

（2） 当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

4. 定积分的几何意义

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$， $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A， 如图 3-6（a） 所示 .



(a) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$　　(b) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$　　(c) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$

图 3-6

当 $f(x)\leqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$ 和直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形面积 A 的负值，如图 3-6（b）所示．

当 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上既取得正值又取得负值时，其图形的某些部分位于 x 轴上方，而其他部分位于 x 轴下方．此时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示介于 x 轴、曲线 $f(x)$ 及两条直线 $x=a$，$x=b$ 之间的各部分面积的代数和，如图 3-6（c）所示．

5. 定积分的性质

下面讨论定积分的一些基本性质，它们对定积分的计算和应用非常重要．在下列性质中，假定函数的定积分均存在．

性质 1　被积函数的常数因子 k 可以提到积分号外面，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i = k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 2　两个（或有限个）函数的代数和的定积分等于它们的定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

性质 3　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，则

$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a.$$

性质 4　若把区间 $[a,b]$ 分为 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 两部分，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

该性质表明定积分对于积分区间具有可加性．事实上，对任意实数 a，b，c，总有等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

成立．例如，当 $a<b<c$ 时，由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 5　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0\quad (a<b).$$

推论 1　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a < b).$$

这是因为 $g(x) - f(x) \geqslant 0$，从而

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [g(x) - f(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x (a < b).$

这是因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质 6　设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \quad (a < b).$$

这是因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，由性质 5 的推论 1 可得

$$\int_a^b m\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\mathrm{d}x.$$

再由性质 3 得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

性质 7（积分中值定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{3-7}$$

该式称为积分中值公式，又可写作

$$f(\xi) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{3-8}$$

设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，由性质 6 可得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

各部分除以 $(b-a)$，得

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

这表明 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 介于最大值 M 与最小值 m 之间，根据闭区间上连续函数的介值定理，在区间 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

等式两边乘以 $(b-a)$，得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

积分中值公式（3-7）的几何意义：在区间 $[a,b]$ 上总能找到一点 ξ，使得以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边、高为 $f(\xi)$ 的矩形的面积（见图 3-7）.

由于 $f(\xi)=\dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，因此也称 $f(\xi)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值. 如图 3-7 所示，把 $f(\xi)$ 看作图中曲边梯形的平均高度.

对于以速度 $v=v(t)$ 做变速直线运动的物体，有

$$v(\xi)=\frac{1}{T_2-T_1}\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t,$$

$v(\xi)$ 即为物体在 $[T_1,T_2]$ 时间段内的平均速度.

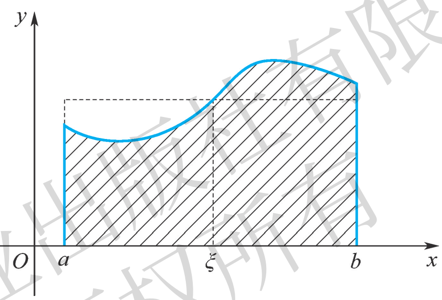


图 3-7

二、微积分基本公式

1. 积分上限函数

如果函数 $f(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么定积分 $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ 一定存在，且其值仅与被积函数 $f(t)$ 和积分区间 $[a,b]$ 有关. 设 x 为 $[a,b]$ 上的任意一点，由于 $f(t)$ 在区间 $[a,x]$ 上仍然连续，因此定积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 也一定存在. 此时，x 既是定积分的上限，也是一个变量，所以该定积分是积分上限 x 的函数，记作

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

该函数称为**积分上限函数**（function of integral upper limit），其定义域为区间 $[a,b]$. 该函数具有以下重要性质.

定理 3-7　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b).\tag{3-9}$$

证 对 $x\in[a,b]$，取增量 Δx 使 $x+\Delta x\in[a,b]$，则有

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由积分中值定理得

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x\quad(\xi\text{ 介于 }x\text{ 与 }x+\Delta x\text{ 之间}).$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$. 因为 $f(x)$ 为连续函数，所以

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$

该定理表明，区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的原函数一定存在，且积分上限函数 $\Phi(x)$ 就是被积函数 $f(x)$ 的一个原函数．这揭示了定积分和不定积分的内在联系．

例 3-42 求 $\int_1^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ 的导数．

解 由式（3-9）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{1+x^2}.$$

例 3-43 求 $\int_1^{2x}te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的导数．

解 设 $\Phi(x)=\int_1^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\Phi(2x)=\int_1^{2x}te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. 根据式（3-9）和复合函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{2x}te^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(2x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Phi(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=ue^{-u^2}\cdot 2=4x\cdot\mathrm{e}^{-4x^2}.$$

其中，$u=2x$.

例 3-44 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin^3t\,\mathrm{d}t}{x^4}$.

解 此题属 “$\dfrac{0}{0}$” 型不定式的极限，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\sin^3t\,\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3x}{4x^3}=\frac{1}{4}.$$

2. 牛顿-莱布尼茨公式

定理 3-8 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)\big|_a^b=F(b)-F(a).\tag{3-10}$$

证　已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，根据定理 3-7，积分上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数．因此存在常数 C，使得

$$F(x)-\Phi(x)=C\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

当 $x=a$ 时，$F(a)-\Phi(a)=C$，而 $\Phi(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$，所以 $C=F(a)$；

当 $x=b$ 时，$F(b)-\Phi(b)=C=F(a)$，所以 $\Phi(b)=F(b)-F(a)$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

此公式称为**牛顿-莱布尼茨公式**（Newton-Leibniz formula），也称为微积分基本公式．它进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系．

例 3-45　计算 $\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2=\frac{1}{2}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 0^2=2.$$

例 3-46　计算 $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{-1}^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^1=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.$$

例 3-47　计算 $\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

解
$$\int_0^1 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x=\ln(x+2)\Big|_0^1=\ln\frac{3}{2}.$$

三、定积分的换元积分法和分部积分法

由牛顿-莱布尼茨公式可知，求定积分的关键是求出被积函数的原函数．因此，与不定积分类似，求定积分的方法也有换元积分法和分部积分法两种．

1. 换元积分法

定理 3-9　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上单调且具有连续导数，其中 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$. 当 t 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上变化时，$\varphi(t)$ 的值不超出 $[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3-11}$$

式（3-11）称为定积分的换元积分公式．

注意： 用换元法求定积分时，换元过程与不定积分的第二类换元法相同，但换元时必须同时换积分限；另外，求出新被积函数的原函数后，无须回代变量，直接用新变量的积分限计算即可．

例 3-48　计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$.

解　设 $x = a\sin t$，则 $dx = a\cos t\,dt$. 当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=a$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$. 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\cos t\,dt \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi a^2.\end{aligned}$$

注意到，定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 的几何意义是以坐标原点为圆心、以 a 为半径的圆落在第一象限部分的面积，因此，该积分值也可以根据定积分的几何意义直接求得.

例 3-49　计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

解　设 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$dx=t\,dt$. 当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=3$. 于是有

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\,dx &= \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3+3t\right]\Bigg|_1^3 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{27}{3}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+3\right)\right] \\ &= \frac{22}{3}.\end{aligned}$$

例 3-50　计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\,dx$.

解　先用凑微分法求得原函数，再用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\,dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,d(\cos x) = -\left[\frac{1}{6}\cos^6 x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{6}\cos^6\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6}\cos^6 0 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

也可使用换元积分公式（3-11），设 $t=\cos x$，则 $dt=-\sin x\,dx$. 当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$. 于是有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x\,dx = -\int_1^0 t^5\,dt = -\frac{t^6}{6}\Bigg|_1^0 = \frac{1}{6}.$$

此例中，前一种解法直接求得 $\cos^5 x\sin x$ 的原函数，定积分的积分变量始终为 x，所以积分限不变；而后一种解法使用定积分的变量代换法，积分变量由 x 变为 t，所以积分限也要相应地变化.

例 3-51　证明：若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则

（1）当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$；

（2）当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证　因为
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
而
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x,$$
所以
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $f(x)$ 为奇函数时，有 $f(-x) = -f(x)$，所以 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$；

当 $f(x)$ 为偶函数时，有 $f(-x) = f(x)$，所以 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

例 3-52　若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，试证明：$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

对积分 $\int_{T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x$，设 $x = u + T$，则
$$\int_{T}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$
从而
$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

2. 分部积分法

与不定积分的分部积分法类似，设函数 $u(x)$，$v(x)$ 分别在区间 $[a,b]$ 上具有连续的导数 $u'(x)$，$v'(x)$，对等式
$$(uv)' = u'v + uv'$$
两边在区间 $[a,b]$ 上积分，得
$$uv\big|_a^b = \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x,$$
即
$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\big|_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x, \tag{3-12}$$
或
$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u. \tag{3-13}$$

以上两式就是定积分的分部积分公式，其运用原则与不定积分的分部积分法相同 .

例 3-53　计算 $\int_1^{e} \ln x\mathrm{d}x$.

解
$$\int_1^{e} \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^{e} - \int_1^{e} x\mathrm{d}(\ln x)$$
$$= e - \int_1^{e}\mathrm{d}x = 1.$$

例 3-54　计算 $\int_{-1}^{0} x e^{-x}\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{-1}^{0} x e^{-x}\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x\mathrm{d}e^{-x} = -xe^{-x}\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}\mathrm{d}x$$
$$= -xe^{-x}\Big|_{-1}^{0} - e^{-x}\Big|_{-1}^{0} = -1.$$

例 3-55　在药物动力学中，药物从患者尿液中排出速率的数学模型为 $r(t)=te^{-kt}$，其中，t 为时间变量，k 为常数．求在时间间隔 $[0,T]$ 内排出的药量．

解　在时间间隔 $[0,T]$ 内排出的药量为
$$\int_0^T r(t)\mathrm{d}t = \int_0^T te^{-kt}\mathrm{d}t = -\frac{1}{k}\int_0^T t\mathrm{d}e^{-kt} = -\frac{1}{k}te^{-kt}\Big|_0^T + \frac{1}{k}\int_0^T e^{-kt}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{k}Te^{-kT} - \frac{1}{k^2}e^{-kt}\Big|_0^T = \frac{1}{k^2} - e^{-kT}\left(\frac{T}{k}+\frac{1}{k^2}\right).$$

四、反常积分

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 要求满足两个基本条件：①积分区间 $[a,b]$ 有限；②被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界．但在实际问题中，还会遇到不满足上述两个条件的情形，因此，有必要将定积分的概念推广到积分区间无限和被积函数无界这两种情形，此时的定积分称为**反常积分**（improper integral）或**广义积分**．

1. 无穷区间的反常积分

定义 3-4　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $b>a$. 如果极限
$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{3-14}$$
存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 同时，称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在或收敛．如果上述极限不存在，则函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 无意义，习惯上称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．此时 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不再表示数值．

类似地，定义函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分为
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{3-15}$$
函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的反常积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3-16}$$

如果式（3-16）右边的两个反常积分都存在，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在；如果其中有一个反常积分发散，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散 .

上述反常积分统称为无穷区间的反常积分 .

例 3-56　计算反常积分 $\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{0}^{b}$$
$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\mathrm{e}^{-b^2}-1) = \frac{1}{2}.$$

例 3-57　计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\arctan b - \lim_{a\to-\infty}\arctan a$$
$$= \frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

例 3-58　讨论反常积分 $\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x\,(a>0)$ 的敛散性 .

解　当 $p=1$ 时，
$$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_{a}^{b}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a) = +\infty;$$

当 $p<1$ 时，
$$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{a}^{b}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}b^{1-p}-\frac{1}{1-p}a^{1-p}\right)\Big|_{a}^{b}$$
$$= +\infty;$$

当 $p>1$ 时，
$$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{a}^{b}$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}b^{1-p}-\frac{1}{1-p}a^{1-p}\right)\Big|_{a}^{b}$$
$$= \frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

因此，当 $p>1$ 时，此反常积分收敛，其值为 $\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$；当 $p\leqslant 1$ 时，此反常积分发散．

例 3-59 在例 3-55 中，求患者的排药总量，即求 $r(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的反常积分．

解 $$\int_0^{+\infty} r(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T t\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t=\lim_{T\to+\infty}\left[\frac{1}{k^2}-\mathrm{e}^{-kT}\left(\frac{T}{k}+\frac{1}{k^2}\right)\right]=\frac{1}{k^2}.$$

2. 无界函数的反常积分

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则称 $x=a$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点或瑕点．

定义 3-5 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点．如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3-17}$$

存在，则称此极限为无界函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上的反常积分，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

此时也称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；否则，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散．

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，$x=b$ 为 $f(x)$ 的瑕点，定义无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3-18}$$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，$x=c$ 为 $f(x)$ 的瑕点，定义无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的反常积分为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3-19}$$

如果式（3-19）右边的两个反常积分都存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；否则，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散．

无界函数的反常积分也称为瑕积分．

例 3-60 计算反常积分 $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$，所以 $x=1$ 为瑕点，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x&=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to0^+}[\arcsin(1-\varepsilon)-0]\\&=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例 3-61 计算 $\int_{-1}^8 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性．

解　函数 $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 在区间 $[-1,8]$ 上除 $x=0$ 外连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$. 所以

$$\int_{-1}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{0+\varepsilon_2}^{8}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x.$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]\Bigg|_{\varepsilon_2}^{8}=\frac{9}{2}.$$

可以看出，无界函数的反常积分的符号与定积分无区别，很容易混淆. 例如，对于积分 $\int_0^{\pi}\tan x\mathrm{d}x$，被积函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处无界，应按反常积分来计算，如果按普通定积分来计算，则会得出错误的结果. 所以，计算积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时，应先检查被积函数在积分区间上是否有界，判断是普通定积分还是反常积分，再进行计算.

第三节　定积分的应用

定积分理论源于实践，又在实践中具有广泛的应用. 本节从定积分解决实际问题的微元法入手，介绍定积分在几何学、物理学和医学中的应用.

一、微元法

在定积分定义中，将所求的量 F（如曲边梯形的面积、变速直线运动的路程等）分解为局部量 ΔF_i，用相应的小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上某点 ξ_i 的函数值 $f(\xi_i)$ 与区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似替代 ΔF_i，再通过求和与取极限，将所求的量 F 表示为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分，即

$$F=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

在实际应用中，通常将上述 4 个步骤简化为以下 2 个步骤.

（1）求微元（分割和近似替代）：求出所求量 F 的微元.

在 $[a,b]$ 内的任意一个小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上，求出 F 的局部量 ΔF 的近似值 $\Delta F\approx f(x)\mathrm{d}x$，称 $f(x)\mathrm{d}x$ 为所求量 F 的微元（微分），记作 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$.

（2）求积分（求和与求极限）：将 F 的微元从 a 无限累加到 b，便得到所求量 F，即

$$F=\int_a^b \mathrm{d}F(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这种方法称为**微元法**，又称**元素法**. 下面用微元法来讨论平面图形面积和旋转体体积的计算问题.

二、平面图形的面积

求由曲线 $y=f(x)$，$y=g(x)\,(f(x)\geqslant g(x))$ 及直线 $x=a$，$x=b\,(a<b)$ 所围成的平面图形的面积 A（见图 3-8）.

当 $g(x)=0$ 时，A 为曲边梯形的面积，即 $A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

对于一般的 $g(x)$，我们用微元法求 A. 首先在 $[a,b]$ 内任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，对应的小曲边梯形面积近似等于高为 $[f(x)-g(x)]$、底为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形面积，所以面积微元为 $\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$，故平面图形的面积为

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x. \tag{3-20}$$

类似地，对由左右曲线 $x=\varphi(y)$，$x=\psi(y)\,(\varphi(y)\geqslant\psi(y))$ 及直线 $y=c$，$y=d\,(c<d)$ 所围成的平面图形的面积 A（见图 3-9），有

$$A=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]\,\mathrm{d}y. \tag{3-21}$$

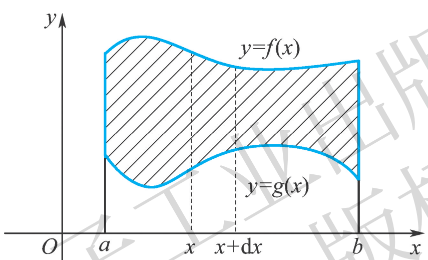


图 3-8

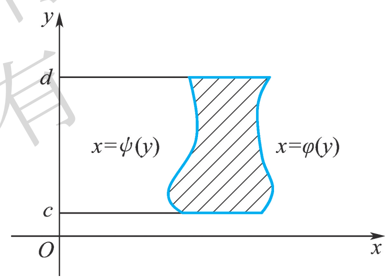


图 3-9

例 3-62　求由抛物线 $y=4-x^2$ 和直线 $y=3x$ 所围成的图形的面积.

解　画出草图（见图 3-10）. 为便于计算，需要合理地选择积分变量. 由图形可知，选 x 为积分变量较为合适.

为了确定积分限，先求出抛物线 $y=4-x^2$ 与直线 $y=3x$ 的交点，即解方程组 $\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=3x, \end{cases}$ 得到交点为 $A(-4,-12)$，$B(1,3)$. 因此，x 的积分上、下限分别为 1 和 -4. 面积微元为 $\mathrm{d}A=[(4-x^2)-3x]\mathrm{d}x$，于是所求图形的面积为

$$A=\int_{-4}^{1}[(4-x^2)-3x]\,\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\bigg|_{-4}^{1}=\frac{125}{6}.$$

例 3-63　求由抛物线 $y^2=2x$ 和直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解　画出草图（见图 3-11）. 选 y 为积分变量，解方程组 $\begin{cases} y^2=2x, \\ y=x-4, \end{cases}$ 得到交点 $A(2,-2)$，$B(8,4)$. 于是所求面积为

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\bigg|_{-2}^{4}=18.$$

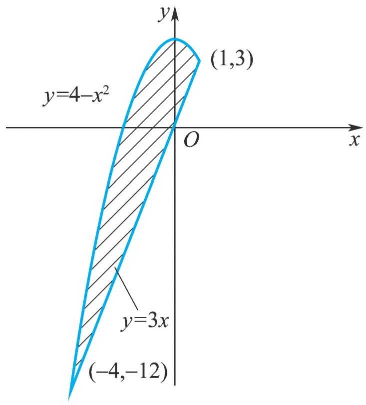


图 3-10

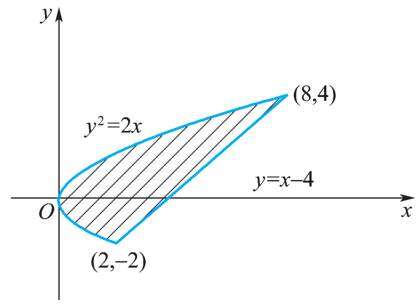


图 3-11

例 3-64　求由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形的面积.

解　如图 3-12 所示，由椭圆的对称性可知，整个椭圆的面积等于其在第一象限部分面积的 4 倍，于是

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x\ =\ a\sin t} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 t\mathrm{d}t \\
&= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t \\
&= 2ab\cdot\frac{\pi}{2} = ab\pi.
\end{aligned}
$$

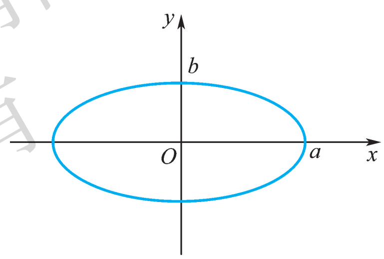


图 3-12

当 $a=b$ 时，上式即为圆的面积公式.

三、旋转体体积

旋转体是由一平面图形绕该平面内的一条直线（称为旋转轴）旋转一周而成的立体图形．例如，圆柱、圆锥、圆台、球体都是旋转体．在医学实验中，许多容器的形状都属于旋转体.

下面讨论由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V（见图 3-13）.

运用微元法，在 $[a,b]$ 内任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，对应的小薄片（旋转体）的体积 ΔV 近似等于以 $f(x)$ 为底半径、$\mathrm{d}x$ 为高的圆柱体体积，所以体积微元为 $\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x$，故旋转体的体积为

$$
V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{3-22}
$$

类似地，对于由曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d(c<d)$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积，有

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\,\mathrm{d}y. \tag{3-23}$$

例 3-65　求由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积 .

解　该旋转体可以看作由半个椭圆

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成的椭球体（见图 3-14）.

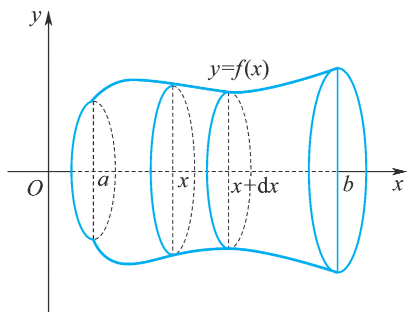


图 3-13

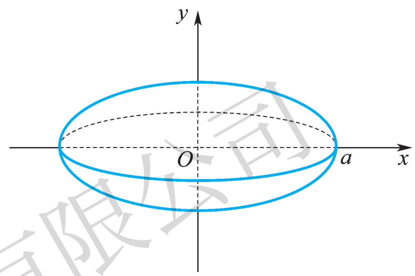


图 3-14

由式（3-22）可知，所求旋转椭球体的体积为

$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

当 $a=b=R$ 时，上式即为半径为 R 的球体的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

例 3-66　求由曲线 $x^2+(y-b)^2=a^2(0<a\leqslant b)$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 .

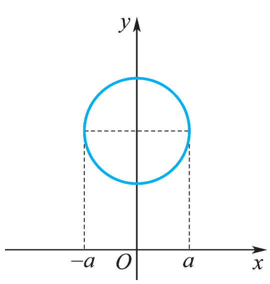


图 3-15

解　如图 3-15 所示，旋转体的体积等于由上半圆和下半圆分别与直线 $x=-a$，$x=a$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的两个旋转体体积之差 . 由式（3-22）得

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})^2\mathrm{d}x-\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_{-a}^{a}4b\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi^2a^2b.$$

四、变力沿直线所做的功

由物理学知识可知，如果物体在与运动方向一致的恒力 F 作用下做直线运动，当物

体移动了距离 s 时，力 F 对物体所做的功为

$$W = Fs.$$

如果物体所受的力是变化的，即为变力沿直线做功的问题，则可以用定积分计算．

例 3-67　有一圆柱形贮水桶，高为 5 m，底圆半径为 3 m，桶内盛满了水．试问要把桶内的水全部吸出需做多少功．（已知水的密度为 1000 kg/m^3，重力加速度取 9.8 m/s^2.）

解　取深度 x 为积分变量，其变化区间为 $[0,5]$．任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，对应的薄层水的高度为 $\mathrm{d}x$．由于水的密度为 1 000 kg/m^3，该薄层水的重力为 $9.8\times 1\,000\pi\times 3^2\mathrm{d}x(\mathrm{N})$．将该薄层水吸出桶外所需做的功近似为

$$\mathrm{d}W = 88\,200\pi x\mathrm{d}x(\mathrm{J}),$$

即功的微元．于是所求的功为

$$W=\int_0^5 88\,200\pi x\mathrm{d}x = 88\,200\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^5 = 1\,102\,500\pi(\mathrm{J}) = 1\,102.5\pi(\mathrm{kJ}).$$

五、定积分在医学中的应用

在医学领域中，有许多问题涉及量的累加性，这类问题一般可以利用定积分来求解．下面通过具体实例介绍定积分在医学中的应用．

例 3-68　单位时间内血管稳定流动中的血液流量．

把一段血管设想为一根圆管．血液与其他流体类似，具有内摩擦，其大小由黏度（记作 μ）表征．此外，血液在管壁处也有摩擦，血液在管壁处的流速为零，越靠近管中心流速越大，在管中心处的流速达到最大值．在一段长为 L、横截面半径为 R 的血管中，距离中心轴为 r 处的血液流速为

$$V(r)=\frac{P}{4\mu L}(R^2-r^2),$$

其中，P 为血管两端的压力差．试求单位时间内通过血管的血液流量．

解　在横截面上取一内径为 r、外径为 $r+\mathrm{d}r$ 的小圆环，如图 3-16 所示，其面积为

$$\Delta S = \pi(r+\mathrm{d}r)^2-\pi r^2 = 2\pi r\mathrm{d}r+\pi(\mathrm{d}r)^2\approx 2\pi r\mathrm{d}r.$$

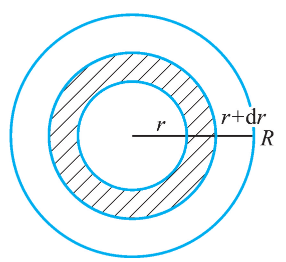


图 3-16

由于血管中某点处血液的流速仅与 r 有关，可以认为在该小圆环上血液的流速近似相等．所以在单位时间内通过该小圆环的血液流量近似为血液的流速与小圆环面积的乘积，即

$$\Delta Q\approx \mathrm{d}Q = V(r)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\pi P}{2\mu L}(R^2-r^2)r\mathrm{d}r.$$

于是

$$\begin{aligned}Q&=\int_0^R\mathrm{d}Q=\int_0^R\frac{\pi P}{2\mu L}(R^2-r^2)r\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi P}{2\mu L}\int_0^R(R^2r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{\pi P}{2\mu L}\left.\left(\frac{1}{2}R^2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\right|_0^R\\&=\frac{\pi PR^4}{8\mu L}.\end{aligned}$$

例 3-69 血液中胰岛素的平均浓度．

在临床实验中，先让患者禁食（以降低体内的血糖水平），然后通过注射给予大剂量葡萄糖．经实验测定，血液中胰岛素浓度 $C(t)$（单位/mL）满足函数关系

$$C(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5, \\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, & t>5. \end{cases}$$

其中，$k=\dfrac{1}{20}\ln 2$，时间 t 的单位为 min. 求注射 1 h 内血液中胰岛素的平均浓度．

解 由定积分的几何意义可知，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值为

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此，有

$$\begin{aligned}\overline{C(t)} &= \frac{1}{60}\int_0^{60} C(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{60}\left[\int_0^5 t(10-t)\,\mathrm{d}t+\int_5^{60}25\mathrm{e}^{-k(t-5)}\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{60}\left(5t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_0^5+\frac{25}{60}\left(-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-k(t-5)}\right)\Bigg|_5^{60} \\ &= \frac{1}{60}\left(125-\frac{125}{3}\right)-\frac{5}{12k}(\mathrm{e}^{-55k}-1)\approx 11.63 \text{ 单位/mL}.\end{aligned}$$

例 3-70 血药浓度-时间曲线下的面积．

药物在人体血液中的浓度是随时间变化而变化的，即血药浓度 C 是时间 t 的函数，$C=C(t)$. 血药浓度-时间曲线下的总面积记作 AUC（Area Under the Curve），它能反映人体对药物最终的吸收程度．因此，在药物动力学研究中，需要计算 AUC. 设静脉注射某药物后，血药浓度 $C(t)=C_0\mathrm{e}^{-kt}$，其中 C_0 为初始血药浓度，k 为常数（$k>0$），表示药物的消除速率，试计算 AUC.

解
$$\mathrm{AUC}=\int_0^{+\infty}C_0\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t=\lim_{b\to+\infty}C_0\left(-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kt}\right)\Bigg|_0^b=\frac{C_0}{k}.$$

例 3-71 镭针的辐射强度．

由物理学可知，某点处的辐射强度与放射源的质量 m 成正比，与该点到放射源的距离 r 的平方成反比．比例系数 $k=\dfrac{E}{4\pi}$，其中 E 为单位质量的放射源单位时间的辐射能量．

设用于放射治疗的镭针质量分布均匀，线密度为 ρ，长为 L. 将照射部位置于镭针 AB 延长线上距 A 为 l 的点 P 处．照射部位受镭针 AB 辐射的总强度 I 为多少?

解 在 AB 上任取一小段 $[r,r+\mathrm{d}r]$，该小段对 P 点的辐射强度，即辐射强度的微元为

$$\mathrm{d}I=k\frac{\rho\,\mathrm{d}r}{r^2}.$$

因此，照射部位受镭针 AB 辐射的总强度为

$$I=\int_l^{l+L}k\frac{\rho\,\mathrm{d}r}{r^2}=-\frac{k\rho}{r}\Bigg|_l^{l+L}=\frac{E\rho L}{4\pi l(l+L)}.$$

习　题　三

1. 用直接积分法求下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3x}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int (\mathrm{e}^x-3\sin x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int \left(\mathrm{e}^{x+1}+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{x^3+1}{x+1}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int \frac{2x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int (3^x+2^x)^2\mathrm{d}x$;　　(10) $\int 3^{2x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(11) $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;　　(12) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \left(\sin x-\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$;　　(14) $\int \cot^2 x\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$;　　(16) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(17) $\int \mathrm{e}^x\left(2-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$;　　(18) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

2. 用换元法求下列不定积分：

(1) $\int (2x-1)^5\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{x}{(2x^2-5)^6}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{9x^2+4}$;

(7) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$;　　(8) $\int \frac{1}{1-4x^2}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(10) $\int \frac{1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int (\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2\mathrm{d}x$;　　(12) $\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}\mathrm{d}x$;　　(14) $\int \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;　　(16) $\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$;

(17) $\int \sin 7x \sin 5x \mathrm{d}x$;

(18) $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

(19) $\int \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(20) $\int \dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$;

(21) $\int \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(22) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x$;

(23) $\int \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(24) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$;

(25) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(26) $\int \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(27) $\int \dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;

(28) $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

3. 用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int x\cos x\mathrm{d}x$;

(2) $\int (3x^2+x)\cos x\mathrm{d}x$;

(3) $\int \ln x\mathrm{d}x$;

(4) $\int \arccos x\mathrm{d}x$;

(5) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$;

(6) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$;

(7) $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(8) $\int xa^x\mathrm{d}x$;

(9) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$;

(10) $\int x^2\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x$;

(11) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x$;

(12) $\int \cos x\ln(\sin x)\mathrm{d}x$;

(13) $\int \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(14) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$;

(15) $\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

(16) $\int \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$;

(17) $\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x$;

(18) $\int xf'(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)$ 有原函数 $\dfrac{\cos x}{x}$.

4. 求下列有理函数的不定积分:

(1) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-2)}$;

(2) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$;

(3) $\int \dfrac{x+5}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \dfrac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \dfrac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$;

(6) $\int \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{dx}{x^4-16}$;　(8) $\int \frac{1}{2x^3+x^2+2x+1}dx$;

(9) $\int \frac{dx}{x(x-1)^2}$;　(10) $\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx$.

5. 求下列变限积分函数的导数：

(1) $\int_0^x t^2\cos t\,dt$;　(2) $\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$;

(3) $\int_{-x^2}^0 te^t dt$;　(4) $\int_x^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

6. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t^2 dt}{x}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x e^2 dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

7. 求函数 $\int_0^x\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)dt$ 的单调区间 .

8. 求函数 $\int_0^x te^{-t^2}dt$ 的极值，并说明是极大值还是极小值 .

9. 求函数 $\int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt$ 的图形的拐点 .

10. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-1}^1 e^{-2x}dx$;　(2) $\int_0^1\frac{dx}{(2x+1)^2}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$;　(4) $\int_{-1}^1\frac{2x-1}{x+2}dx$;

(5) $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$;　(6) $\int_0^2|1-x|dx$;

(7) $\int_0^{2\pi}|\cos x|dx$;　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$;

(9) $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$;　(10) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$;

(11) $\int_1^4\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;　(12) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(13) $\int_{-1}^1\sqrt{x^2-x^4}\,dx$;　(14) $\int_{-1}^1\frac{x\sin^2 x}{1+x^2}dx$;

(15) $\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx$;　(16) $\int_0^1 xe^{-x}dx$;

(17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx$;　(18) $\int_0^2 x\arctan x\,dx$;

(19) $\int_0^{2\pi}x^2\cos x\,dx$;　(20) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|dx$.

11. 已知$f(\pi)=1$，且$\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=3$，其中$f''(x)$连续，求$f(0)$.

12. 求下列反常积分：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^2\frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1\sqrt{x}\ln x\mathrm{d}x$；

(8) $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

13. 求由曲线$y^2=x$和$x^2=y$所围成的图形面积.

14. 求由曲线$y=e^x$和$y=e^{-x}$及直线$x=1$所围成的图形面积.

15. 求由曲线$y=3-|x^2-1|$与x轴所围成的图形面积.

16. 求由曲线$y=-x^2+4x-3$及其在点$(0,-3)$和点$(3,0)$处的切线所围成的图形面积.

17. 求由曲线$y=x^2$、直线$x=2$及x轴所围成的图形绕x轴旋转产生的旋转体体积.

18. 求由曲线$y=x^2$和$x=y^2$所围成的图形绕y轴旋转产生的旋转体体积.

19. 求由曲线$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi)$与$x$轴所围成的图形分别绕$x$轴和$y$轴旋转产生的旋转体体积.

20. 口服药物被吸收进入血液系统的药量称为有效药量. 设某种药物的吸收速率为

$$r(t)=0.01t(t-6)^2\quad(0\leqslant t\leqslant 6),$$

求该药物的有效药量.

21. 已知某化学反应的速度$V(t)=ake^{-kt}$，其中a, k为常数. 求在$[0,T]$这段时间的平均反应速度.

22. 设口服某药物后体内的血药浓度与时间的关系为

$$C(t)=\alpha(e^{-kt}-e^{-k_0t}),$$

其中, α, k, k_0为正常数，试求曲线$C(t)$下的总面积AUC.