第 3 章　导数的应用

【立德树人】

认识从实践始，经过实践得到了理论的认识，还需再回到实践去.

——《毛泽东选集 · 实践论》

【单元导学】

第 2 章学习了导数和微分的概念，导数刻画了函数的一种局部特性，作为函数变化率的模型，在自然科学、工程技术及社会科学等领域已得到广泛应用. 本章首先介绍的微分中值定理是导数应用的理论基础，是联系函数与导数的一座桥梁. 进而研究利用导数求极限的方法——洛必达法则；利用导数讨论函数在某个区间上的整体性态，研究函数的单调性、极值、最值，函数曲线的凹凸性及拐点等.

【学习目标】

1. 理解罗尔定理、拉格朗日中值定理. 会用罗尔定理和拉格朗日中值定理解决相关问题.

2. 熟练掌握洛必达法则，会求 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^{∞}、0^0 及 ∞^0 型未定式的极限.

3. 掌握用导数判断函数单调性的方法，会判断函数的单调性，并会证明不等式.

4. 理解函数的极值的概念，并会求函数的极值.

5. 掌握函数的最大值和最小值的求法及其应用.

6. 理解曲线的凹凸性的概念，会求曲线的凹凸区间及拐点.

7. 会用 MATLAB 绘制函数图像，观察函数的特性.

8. 能用导数建立数学模型以解决工程及企业问题.

3.1　微分中值定理

微课

微分中值定理

3.1.1　罗尔定理

定理 3.1　如果函数 $y=f(x)$ 满足以下条件.

（1）在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

（2）在开区间 (a, b) 内可导.

（3）$f(a)=f(b)$.

那么，在区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0$$

这就是**罗尔（Rolle）定理**.

这个定理的几何解释如图 3.1 所示，如果连续曲线 $y=f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每点处都存在不垂直于 x 轴的切线，并且两个端点 A、B 处的纵坐标相等，即连接两个端点的直线 AB 平行于 x 轴，则在此曲线上至少存在一点 $C(\xi, f(\xi))$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 C 处的切线与 x 轴平行.

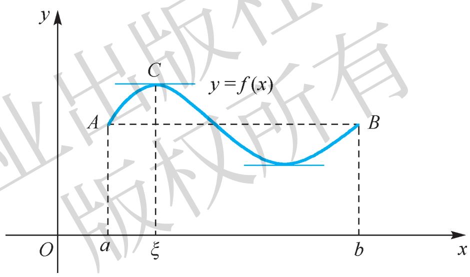


图 3.1

例 3.1　验证函数 $y=x^2-3x-4$ 在区间 $[-1, 4]$ 上满足罗尔定理，并求出相应的点 ξ.

解　函数 $y=x^2-3x-4$ 为初等函数，在闭区间 $[-1, 4]$ 上连续，且导数 $y'=2x-3$ 在开区间 $(-1, 4)$ 内存在，且 $f(-1)=f(4)=0$，因此函数 $y=x^2-3x-4$ 在区间 $[-1, 4]$ 上满足罗尔定理的 3 个条件. 故在开区间 $(-1, 4)$ 内一定存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

事实上，令 $f'(x)=2x-3=0$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$，且 $\dfrac{3}{2}\in(-1, 4)$，即 $\xi=\dfrac{3}{2}$ 使得

$$f'(\xi)=f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

3.1. 2　拉格朗日中值定理

定理 3.2　如果函数 $y=f(x)$ 满足以下条件.

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

（2）在开区间 (a,b) 内可导.

那么，在区间 (a,b) 内，至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.1}$$

微课

拉格朗日中值定理

也可以写为

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

这就是**拉格朗日（Lagrange）中值定理**. 在此定理中，如果区间$[a,b]$的两个端点处的函数值相等，就变成了罗尔定理. 也就是说，罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情况.

拉格朗日中值定理的几何解释如图 3.2 所示，若 $y=f(x)$ 是闭区间$[a,\ b]$上的连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$，连接点 $A(a,f(a))$ 和点 $B(b,f(b))$ 的弦 AB 的斜率为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，而弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上某点 $C(\xi,f(\xi))$ 的斜率为 $f'(\xi)$. 定理 3.2 的结论表明：在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少存在一点 $C(\xi,f(\xi))$，使得曲线在点 C 处的切线与曲线的两个端点的连线 AB 平行.

拉格朗日中值定理有以下两个推论.

推论 3.1 如果在区间(a,b)内，函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 恒等于零，那么在区间(a,b)内，函数 $y=f(x)$ 是一个常量.

推论 3.2 如果在区间(a,b)内，$f'(x)\equiv g'(x)$，则在区间(a,b)内，$f(x)$ 与 $g(x)$ 只相差一个常量，即

$$f(x)=g(x)+C \quad （C\text{ 为常量}）$$

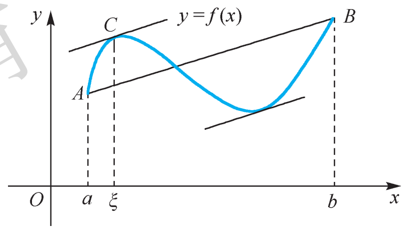


图 3.2

例 3.2 证明 $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

解 设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$x\in[-1,1]$. 因为

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0,\quad x\in(-1,1)$$

所以

$$f(x)\equiv C,\quad x\in(-1,1)$$

又由于

$$f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

即 $C=\dfrac{\pi}{2}$，因此

$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in[-1,1]$. 另外，$f(\pm 1)=\dfrac{\pi}{2}$，故

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad x\in[-1,1]$$

*3.1.3 柯西中值定理

定理 3.3 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足以下条件.

（1）在闭区间$[a,b]$上连续.

（2）在开区间(a,b)内可导.

（3）在区间(a,b)内，$g'(x)\neq 0$.

那么，在区间 (a,b) 内，至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{3.2}$$

这就是**柯西（Cauchy）中值定理**. 在此定理中，若 $g(x)=x$，则其就变成了拉格朗日中值定理，说明拉格朗日中值定理是柯西中值定理的特殊情况.

习　题　3.1

A 组

1. 验证函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 上满足罗尔定理，并求出 ξ 的值.

2. 验证函数 $y=\arctan x$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理，并求出 ξ 的值.

3. 证明下列恒等式：$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

B 组

1. 已知 $A(1,1)$、$B(3,-3)$ 是曲线 $y=2x-x^2$ 上的两点. 试求曲线上一点，使曲线在该点处的切线平行于弦 AB.

2. 在不求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数的情况下，说明方程 $f'(x)=0$ 至少有几个根，并指出它们所在的区间.

3.2　洛必达法则

微课

洛必达法则

在第 1 章求极限时，经常遇到形如当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的分子、分母都趋于零或都趋于无穷大的情况. 对于这种函数，是不能直接利用商的极限运算法则求其极限的. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}$ 可能存在也可能不存在. 通常把这类极限叫作未定式，分别简记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 下面介绍求这类极限的一种简便且重要的方法——洛必达法则.

1. $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

对于 $\frac{0}{0}$ 型的极限，有下面的法则.

法则 3.1　如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足以下条件.

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

（2）函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 的邻域内均可导，且 $g'(x)\neq 0$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）.

那么，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 3.3 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

解 当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，分子 $\cos x\to 0$，分母 $x-\dfrac{\pi}{2}\to 0$，此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{1}=-1$$

例 3.4 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$.

解 当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，分子、分母都趋于零，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-4(\pi-2x)}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\pi-2x}$$

而此极限仍为 $\dfrac{0}{0}$ 型，因此可以继续使用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\csc^2 x}{-2}=-\frac{1}{8}$$

例 3.5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\sin x}$.

解 当 $x\to 0$ 时，此极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型，因此可直接使用洛必达法则求极限，但比较麻烦，结合使用等价无穷小替换就比较简单.

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

注意 洛必达法则与等价无穷小替换结合使用能简化运算.

对于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的极限，有下面的法则.

法则 3.2 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足以下条件.

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

（2）函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 的邻域内均可导，且 $g'(x)\neq 0$.

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）.

那么，有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 3.6　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解　当 $x\to+\infty$ 时，分子、分母都趋于无穷，此极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0$$

例 3.7　求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$.

解　当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，此极限为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，由洛必达法则得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos 3x}{\cos x\sin 3x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=3$$

2. 其他类型的未定式

除 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 这两种类型的未定式外，还有其他类型的未定式，如 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、0^0、∞^0. 对此，可以通过简单的变形，先把它们化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再利用洛必达法则求极限.

例 3.8　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^k\ln x$（$k>0$）.

解　此极限为 $0\cdot\infty$ 型，先将其化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，再利用洛必达法则，得

$$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^k}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{k}{x^{k+1}}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^k}{k}\right)=0$$

例 3.9　求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　此极限为 $\infty-\infty$ 型，先将其变形为

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

此时已化为 $\dfrac{0}{0}$ 型，再利用洛必达法则得

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$

例 3.10　求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解　此极限为 0^0 型，先将其变形为

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}$$

由例 3.8 可知

$$\lim_{x\to0^+}x^x=e^0=1$$

使用洛必达法则必须注意以下两点.

（1）洛必达法则只适用于$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，其他类型的未定式必须先化成这两种类型之一，再用该法则.

（2）洛必达法则的条件是充分的，但不是必要的，因此，该法则失效但极限仍有可能存在.

有些极限虽然是未定式，但使用洛必达法则无法计算出其极限值，这时应考虑使用其他方法. 例如，求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，两次使用洛必达法则后，又还原成原来的形式，因而洛必达法则对它失效，事实上

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

思考 3.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$可不可以用洛必达法则求得？为什么？

习　题　3.2

A 组

1. 判断下列极限计算是否正确.

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{1}=0$.　（　）

（2）$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-2}{1}=10$.　（　）

（3）$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-2x-4}{(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-2}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{6x}{2}=6$.　（　）

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=1$.　（　）

2. 用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　（3）$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$；　（5）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos 3x}{\ln\cos x}$；　（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$；

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}$；　（8）$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\ln x}$；　（9）$\lim\limits_{x\to0}x\cot x$.

B 组

1. 用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$；　（2）$\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x$；　（3）$\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

2. 证明下列极限存在，但不能用洛必达法则：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

3.3　函数的单调性与极值

3.3.1　函数的单调性

微课
函数的单调性

函数的单调性是函数的一个重要特性，它反映了函数在某个区间随自变量的增大而增大（或减小）的特征. 但是，利用单调性的定义讨论函数的单调性往往是比较困难的. 本节利用导数符号来研究函数的单调性.

由图 3.3 可以看出，当函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增时，其曲线上任一点的切线的倾斜角都是锐角，因此它们的斜率都是正的，由导数的几何意义可知，此时曲线上任一点的导数都是正值，即 $f'(x)>0$.

由图 3.4 可以看出，当函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减时，其曲线上任一点的切线的倾斜角都是钝角，因此它们的斜率都是负的，由导数的几何意义可知，此时曲线上任一点的导数都是负值，即 $f'(x)<0$.

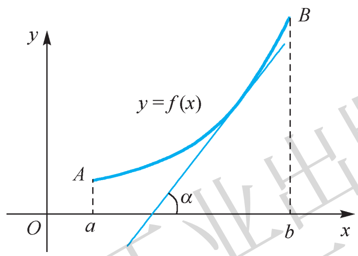


图 3.3

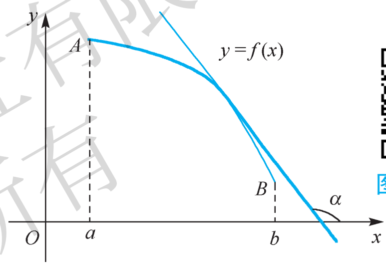


图 3.4

微课
图 3.3、3.4

定理 3.4　设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，则有以下结论.

（1）如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调递增.

（2）如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调递减.

思考 3.2　函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 内单调递增（递减）时，一定有在 (a,b) 内，$f'(x)>0$（$f'(x)<0$）吗？

注意　在区间内个别点处的导数等于零不影响函数的单调性. 例如，对于幂函数 $y=x^3$，其导数 $y=3x^2$ 在原点处为 0，但它在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的.

例 3.11　判断函数 $y=x+\mathrm{e}^x$ 的单调性.

解　函数 $y=x+\mathrm{e}^x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且有

$$y'=1+\mathrm{e}^x>0$$

因此，函数 $y=x+\mathrm{e}^x$ 在其定义域内是单调递增的.

由定理 3.4 可知，要讨论一个复杂函数的单调性，需要先求出该函数的导数，再判别导数的符号. 为此，需要对 $f'(x)$ 大于零和小于零的区间进行划分，当导数连续时，$f'(x)$ 大于零和小于零的分界点为 $f'(x)=0$ 的点，我们把这样的点称为驻点. 另外，使 $f'(x)$ 不存在的点，即不可导点也可能是 $f'(x)$ 大于零和小于零的分界点，我们把这样的点称为尖点.

由此，给出判断函数的单调性的步骤.

（1）确定函数的定义域.

（2）求函数的导数 $f'(x)$.

（3）求出函数 $f(x)$ 在其定义域内的全部驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点（不可导点）.

（4）用所有驻点和不可导点把定义域分成若干区间，列表考察每个区间内 $f'(x)$ 的符号，从而确定函数的单调性.

例 3.12 确定函数 $y=x^3-3x^2-9x+5$ 的单调区间.

解 函数 $y=x^3-3x^2-9x+5$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对它求导得

$$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

令 $y'=0$，得

$$x=-1,\quad x=3$$

它们将定义域分为几个区间，分别考察导数 y' 在各区间内的符号就可以判断出函数的单调区间. 为了更清楚，列表如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

从表中看得很清楚，函数的单调递增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[3,+\infty)$，函数的单调递减区间为 $[-1,3]$.

还应该注意到，导数不存在的点也可能成为单调递增区间和单调递减区间的分界点，看下面的例子.

例 3.13 判断函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 的单调性.

解 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

显然，当 $x=0$ 时，$f'(x)$ 不存在.

由 $x=0$ 将定义域分成小区间，列表考察 $f'(x)$ 的符号：

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ +\infty)$
$f'(x)$	−	不存在	+
$f(x)$	↘		↗

因此，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

微课

函数的极值

3.3.2 函数的极值

1. 极值的概念

如图 3.5 所示，函数在点 x_1 处的函数值比它左右近旁的函数值都大，而在点 x_2 处的函数值比它左右近旁的函数值都小，对于这种特殊的点和它对应的函数值，给出如下定义.

定义 3.1 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，x_0 是 (a,b) 内的一个点.

（1）如果对于点 x_0 近旁的任一点 $x\,(x\neq x_0)$，都有 $f(x)<f(x_0)$，那么称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$

的一个**极大值**，点 x_0 称为 $f(x)$ 的一个**极大值点**.

（2）如果对于点 x_0 近旁的任一点 x（$x \neq x_0$），都有 $f(x) > f(x_0)$，那么称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个**极小值**，点 x_0 称为 $f(x)$ 的一个**极小值点**.

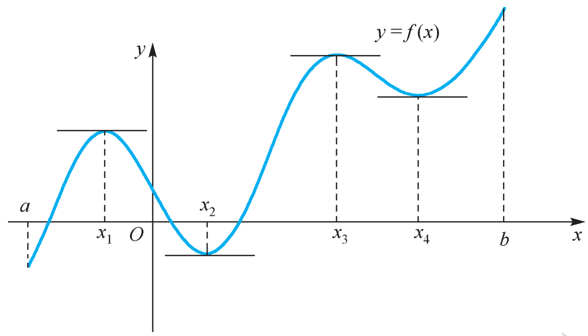


图 3.5

函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**，极大值点与极小值点统称为函数的**极值点**.

例如，图 3.5 中的 x_1 和 x_3 是函数 $f(x)$ 的极大值点，$f(x_1)$ 和 $f(x_3)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值；x_2 和 x_4 是函数 $f(x)$ 的极小值点，$f(x_2)$ 和 $f(x_4)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

注意　（1）极值只是一个局部概念，它仅与极值点邻近的函数值比较而言较大或较小，而不是在整个区间上的最大值或最小值. 函数的极值点一定出现在区间内部，在区间的端点处不能取得极值.

（2）函数的极大值与极小值可能有很多个，极大值不一定比极小值大，极小值不一定比极大值小.

（3）函数的极值可能取在导数不存在的点上.

2. 函数极值的判定

从图 3.5 中可以看出，曲线在点 x_1、x_2、x_3、x_4 处取得极值，这些点处的切线都是水平的，即在极值点处，函数 $f(x)$ 的导数等于零. 对此，给出函数存在极值的必要条件.

定理 3.5（**必要条件**）　如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导且取得极值，那么 $f'(x_0) = 0$.

定理 3.5 说明，可导函数的极值点必定是它的驻点，但是，函数的驻点不一定是它的极值点. 例如，点 $x = 0$ 是函数 $y = x^3$ 的驻点，但不是极值点. 因此定理 3.5 还不能解决所有求函数极值的问题. 但是，定理 3.5 提供了寻求可导函数极值点的范围，即从驻点中寻找. 还要指出的是，连续但不可导点也可能是极值点. 例如，对于 $f(x) = |x|$，它在点 $x = 0$ 处连续，但不可导，而点 $x = 0$ 是该函数的极小值点.

要判断驻点是否是极值点，有如下定理.

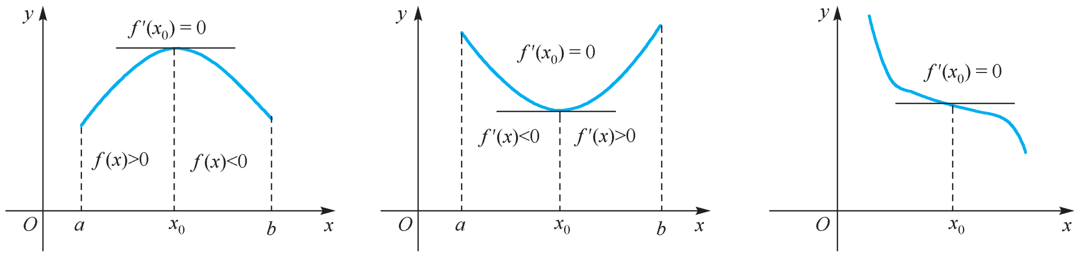
定理 3.6（**第一充分条件**）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近旁可导，且 $f'(x_0) = 0$.

（1）如果当 $x < x_0$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > x_0$ 时，$f'(x) < 0$，那么 x_0 是极大值点，$f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值.

（2）如果当 $x < x_0$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x > x_0$ 时，$f'(x) > 0$，那么 x_0 是极小值点，$f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值.

（3）如果在点 x_0 的左、右两侧，$f'(x)$ 同号，那么 x_0 不是极值点，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有极值.

图 3.6 分别显示了以上 3 种情形.



（a） （b） （c）

图 3.6

根据定理 3.5 和定理 3.6，可得到求函数 $f(x)$ 的极值点和极值的步骤如下.

（1）确定函数的定义域.

（2）求出函数的导数 $f'(x)$.

（3）求出函数 $f(x)$ 在其定义域内的全部驻点和不可导点.

（4）用所有驻点和不可导点把定义域分成若干区间，考察每个区间内 $f'(x)$ 的符号.

（5）由驻点和不可导点左、右邻近区间导数的符号确定该点是否为极值点；如果是极值点，就进一步确定是极大值点还是极小值点，并求极值.

例 3.14 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.

解 （1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）$y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$.

（3）令 $f'(x)=0$，得驻点

$$x_1=-1,\quad x_2=3$$

（4）列表考察：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值 10	↘	极小值 −22	↗

因此，函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=10$，极小值为 $f(3)=-22$.

例 3.15 求函数 $f(x)=(x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 （1）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）$f'(x)=3(x^2-1)^2\cdot 2x=6x(x+1)^2(x-1)^2$.

（3）令 $f'(x)=0$，得驻点

$$x_1=-1,\quad x_2=0,\quad x_3=1$$

（4）列表考察：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘		↘	极小值 0	↗		↗

可见，函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$，驻点 $x_1=-1$ 和 $x_3=1$ 不是极值点.

例 3.16 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{(2x-x^2)^2}$ 的极值.

解　（1）函数的定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$.

（2）$f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{(2-2x)}{\sqrt[3]{2x-x^2}}=\dfrac{4}{3}\dfrac{(1-x)}{\sqrt[3]{2x-x^2}}$.

（3）令 $f'(x)=0$，得驻点

$$x=1$$

又有函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 和 $x=2$ 处的导数都不存在.

（4）用 $x=0$、$x=1$ 和 $x=2$ 这 3 个点将定义域分为 4 个区间，列表考察：

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
$f'(x)$	$-$	不存在	$+$	0	$-$	不存在	$+$
$f(x)$	↘	极小值 0	↗	极大值 1	↘	极小值 0	↗

可见，函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=1$，极小值为 $f(0)=f(2)=0$.

定理 3.7（**第二充分条件**）　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数，且

$$f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)\neq 0$$

则有以下结论.

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

注意　当 $f''(x_0)=0$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不一定取得极值，仍用第一充分条件来判断.

例 3.17　求函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-4$，$x_2=2$. 又有 $f''(x)=6x+6$，因为

$$f''(-4)=-18<0\qquad f''(2)=18>0$$

所以，极大值 $f(-4)=60$，极小值 $f(2)=-48$.

思考 3.3　能否用第二充分条件求函数 $y=x^4$ 和 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 的极值？

习　题　3.3

A 组

1. 单选题

（1）$y=2x^3+3x^2+1$ 的极小值点是（　　）.

A. $x=-1$　　B. $x=0$　　C. $x=1$　　D. $x=2$

（2）若 $y=3x\cdot 3^x$ 在点 x_0 处取得极小值，则 $x_0=$（　　）.

A. $-\dfrac{1}{\ln 3}$　　B. $-\ln 3$　　C. $\dfrac{1}{\ln 3}$　　D. $\ln 3$

2. 判断下列函数的单调性：

（1）$y=x^3+12x+1$；　　（2）$y=\arctan x+x$.

B 组

1. 单选题.

（1）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f'(x)>0$，则（　　）.

A. $f(0)<0$　　B. $f(1)>0$　　C. $f(1)>f(0)$　　D. $f(1)<f(0)$

（2）设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则下列命题中正确的是（　　）.

A. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极小值　　B. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是极大值

C. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值　　D. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

2. 确定下列函数的单调区间：

（1）$y=x-\ln(1+x)$；　　（2）$y=(x-1)(x+1)^2$；

（3）$y=\mathrm{e}^x-x-1$；　　（4）$y=(x-1)x^{\frac{2}{3}}$.

3. 求下列函数的极值点和极值：

（1）$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$；　　（2）$f(x)=x^4-2x^2+7$；

（3）$f(x)=x^3-9x^2+15x+3$；　　（4）$f(x)=\sin x-2x$；

（5）$f(x)=x+\sqrt{1-x}$.

4. 证明：当 $x>1$ 时，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}x$.

3.4　函数的最大值与最小值

在生产实践中，常会遇到一类“最大”“最小”等问题. 例如，厂家生产一种圆柱形杯子，就要考虑在一定条件下，杯子的直径和高取多大时用料最省；又如，在销售某种商品时，在成本固定的情况下，怎样确定零售价，才能使商品售出最多？获得的利润最大等？这类问题在数学上叫作最大值、最小值问题，简称最值问题.

微课

函数的最值

那么，如何求函数的最大值和最小值呢？

1. 闭区间上连续函数的最值

设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，由闭区间上连续函数的性质可知，函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上一定有最大值与最小值. 最大值与最小值可能取在区间内部，也可能取在区间的端点处，如果取在区间内部，那么一定取在函数的驻点处或导数不存在的点处.

函数的极值是局部概念，在一个区间内可能有很多个极值；但函数的最值是整体概念，在一个区间内，只有一个最大值和一个最小值.

2. 求闭区间上连续函数的最值的步骤

根据上述分析，求闭区间 $[a,\ b]$ 上的连续函数的最值的步骤如下.

（1）求出 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的所有驻点和导数不存在的点，并计算各点的函数值.

（2）求出端点处的函数值 $f(a)$ 和 $f(b)$.

（3）比较以上所有函数值，其中，最大的就是函数在区间 $[a,\ b]$ 上的最大值，最小的就是函数在 $[a,\ b]$ 上的最小值.

例 3.18　求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ 在区间 $[-3,\ 4]$ 上的最大值与最小值.

解　（1）$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得函数 $f(x)$ 定义域内的驻点为

$$x_1=-2,\quad x_2=1$$

其函数值分别为

$$f(-2)=20,\quad f(1)=-7$$

（2）在区间 $[-3, 4]$ 上，端点处的函数值分别为

$$f(-3)=9,\quad f(4)=128$$

（3）比较以上各函数值，可以得到，函数 $f(x)$ 在区间 $[-3, 4]$ 上的最大值为 $f(4)=128$，最小值为 $f(1)=-7$．

例 3.19　求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值与最小值.

解　$f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，令 $f'(x)=0$，得函数 $f(x)$ 在定义域内的驻点为 $x=1$（因为 $x=-1$ 不合题意，所以舍去）．由

$$f(1)=\frac{1}{2},\quad f(0)=0,\quad f(2)=\frac{2}{5}$$

可知，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，最小值为 $f(0)=0$．

3. 开区间上连续函数的最值

如果函数 $f(x)$ 在一个开区间内可导且有唯一的极值点 x_0，那么当 $f(x_0)$ 是极大值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值；当 $f(x_0)$ 是极小值时，$f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值.

例 3.20　求函数 $y=-x^2+4x-3$ 的最大值.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)$$

令 $f'(x)=0$，得驻点为

$$x=2$$

可以判断 $x=2$ 是 y 的极大值点．由于函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内只有唯一的极值点，因此函数的极大值就是它的最大值，即最大值为 $f(2)=1$（见图 3.7）．

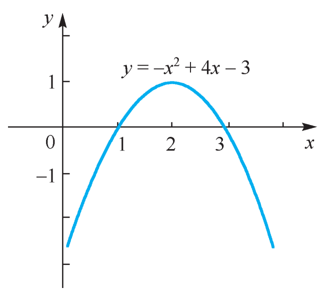


图 3.7

4. 最值的应用

在实际问题中，如果函数 $f(x)$ 在某区间内只有一个驻点 x_0，而且从实际问题本身又可以知道 $f(x)$ 在该区间内必定有最大值或最小值，那么 $f(x_0)$ 就是要求的最大值或最小值.

【学以致用】

例 3.21　把边长为 a（cm）的正方形纸板的 4 个角剪去 4 个相等的小正方形[见图 3.8(a)]，折成一个无盖的盒子[见图 3.8（b）]，怎样做才能使盒子的容积最大？

动画

例 3.21 函数的最值

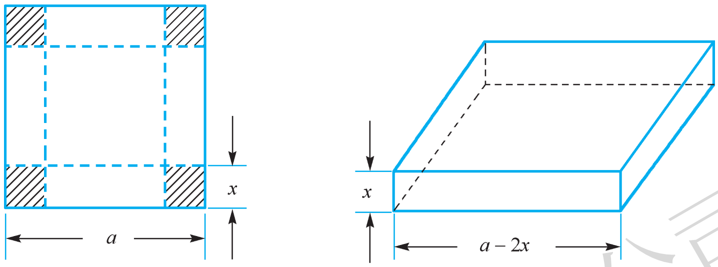
解　设剪去的小正方形的边长为 x，则盒子的容积为

$$V=x(a-2x)^2\qquad 0<x<\frac{a}{2}$$

求导得

$$V'=(a-2x)^2-4x(a-2x)=(a-2x)(a-6x)$$

令$V'=0$，得驻点$x=\frac{a}{6}$，$x=\frac{a}{2}$. 其中，$x=\frac{a}{2}$不合题意，故在区间$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$内只有一个驻点$x=\frac{a}{6}$. 又因为当$x\in\left(0,\ \frac{a}{6}\right)$时，$V'>0$；当$x\in\left(\frac{a}{6},\ \frac{a}{2}\right)$时，$V'<0$，所以$x=\frac{a}{6}$是极大值点.



(a) (b)

图 3.8

而所做的盒子一定有最大容积，因此，当 4 个角剪去边长为$\frac{a}{6}$的小正方形时，做成的盒子的容积最大.

例 3.22 某房地产公司有 50 套公寓要出租，当将租金定为每月 180 元时，公寓会被全部租出去. 当将租金每月增加 10 元时，就有一套公寓租不出去，而被租出去的公寓每月需要花费 20 元的整修维护费. 试问将租金定为多少可获得最高收入？

解 设租金为每月x（$\geqslant 180$）元，被租出去的公寓有$50-\left(\frac{x-180}{10}\right)$套，则每月总收入为

$$R(x)=(x-20)\left(50-\frac{x-180}{10}\right)=(x-20)\left(68-\frac{x}{10}\right)$$

于是

$$R'(x)=\left(68-\frac{x}{10}\right)+(x-20)\left(-\frac{1}{10}\right)=70-\frac{x}{5}$$

令$R'(x)=0$，得驻点$x=350$（唯一驻点），根据实际意义可知，最高收入存在，故将每月每套公寓的租金定为 350 元可获得最高收入，最高收入为

$$R(350)=(350-20)\left(68-\frac{350}{10}\right)=10890（元）$$

习　题　3.4

A 组

1. 函数$y=\sqrt{5-4x}$在区间$[-1,1]$上的（　　）.

A. 最小值是$f(1)$　　B. 最大值是$f(1)$　　C. 极小值点是$x=1$　　D. 极大值点是$x=1$

2. 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值：

（1）$f(x)=3x^4-16x^3+30x^2-24x+4$，$[0,3]$；（2）$f(x)=\ln(x^2+1)$，$[-1,2]$；

（3）$f(x)=x+\sqrt{x}$，$[0,4]$；（4）$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$，$[0,+\infty)$．

B 组

1. 已知圆柱形饮料罐头的容积为 V，求表面积最小时的底面半径与高之比？

2. 设工厂到铁路线的垂直距离为 20km，垂足为 B，铁路线上距离 B 100km 处有一原料供应站（位于 C 点），如图 3.9 所示. 现在要在铁路 BC 中间某处（D 点）修建一个车站，并由车站向工厂修建一条公路，问 D 点应选在何处才能使得从原料供应站的 C 点运货到工厂的 A 点所需的运费最少？（已知每千米的铁路运费与公路运费之比为 3:5.）

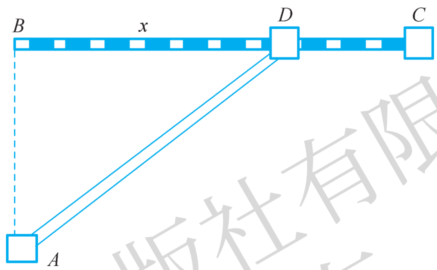


图 3.9

3.5　曲线的凹凸性、拐点与渐近线

3.5.1　曲线的凹凸性与拐点

微课 曲线的凹凸性与拐点

研究函数的单调性与极值对于了解函数的性质和描绘函数的图像起到了重要作用. 但是仅依赖这些知识，还不能比较准确地描绘出函数的图像. 例如，函数 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图像（见图 3.10），其曲线都是单调上升的，但它们的弯曲方向不同，这就是所谓的凹与凸的区别. 曲线 $y=x^2$ 上任一点的切线均位于曲线下方，其形状是凹的；而曲线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点的切线均位于曲线上方，其形状是凸的.

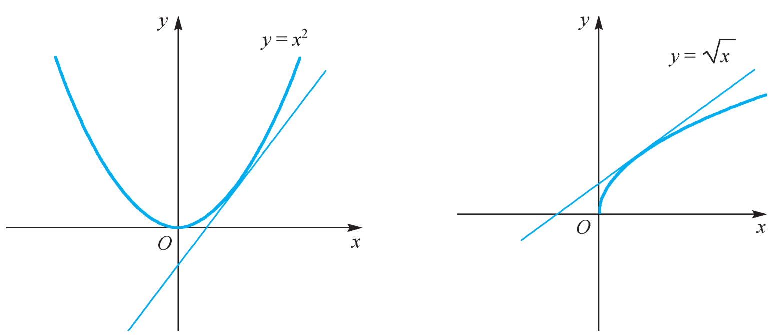


图 3.10

一般地，从图 3.11 中可以看出，在凹的曲线弧 $\overset{\frown}{ABC}$ 上，任一点处的切线都在曲线下方；在凸的曲线弧 $\overset{\frown}{CDE}$ 上，任一点处的切线都在曲线上方. 对此，给出下面的定义.

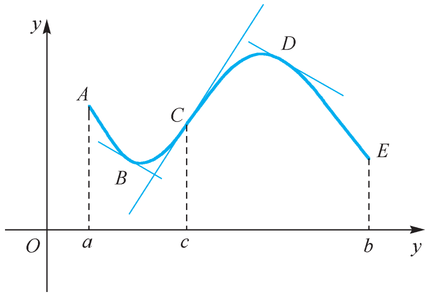


图 3.11

动画

图 3.11 曲线的凹凸性

定义 3.2 在某区间内，如果曲线弧上任一点处的切线都在曲线下方，那么称此曲线弧为**凹曲线**；如果曲线弧上任一点处的切线都在曲线上方，那么称此曲线弧为**凸曲线**.

从图 3.11 中还可以看出，当曲线弧是凹的时候，其切线的斜率是逐渐增大的，即函数的导数是单调递增的；当曲线弧是凸的时候，其切线的斜率是逐渐减小的，即函数的导数是单调递减的. 根据函数的单调性的判定方法，有如下定理.

定理 3.8 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有二阶导数.

（1）如果当 $x\in(a,b)$ 时，恒有 $f''(x)>0$，则曲线 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是凹的.

（2）如果当 $x\in(a,b)$ 时，恒有 $f''(x)<0$，则曲线 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内是凸的.

例 3.23 判定曲线 $y=x-\ln(x+1)$ 的凹凸性.

解 函数的定义域为 $(-1, +\infty)$，因为

$$y'=1-\frac{1}{x+1}，\quad y''=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

所以函数在其定义域 $(-1,+\infty)$ 内是凹的.

例 3.24 判定曲线 $y=x^3$ 的凹凸性.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$y'=3x^2，\quad y''=6x$$

所以，当 $x<0$ 时，$y''<0$；当 $x>0$ 时，$y''>0$，由定理 3.8 可知，曲线 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,0]$ 内凸的，在区间 $[0,+\infty)$ 内是凹的.

例 3.25 判定曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的凹凸性.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}，\quad y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

所以，当 $x<0$ 时，$y''>0$；当 $x>0$ 时，$y''<0$，由定理 3.8 可知，曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内凸的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是凹的.

在例 3.24、例 3.25 中，点 $(0,0)$ 是曲线由凸变凹的分界点. 对于这样的点，给出下面的定义.

定义 3.3 连续曲线上凸与凹的分界点叫作曲线的**拐点**.

思考 3.4 二阶导数为 0 的点一定是拐点吗？举例说明.

判定曲线的凹凸性及求拐点的步骤如下.

（1）确定函数 $y=f(x)$ 的定义域.

（2）求出函数的二阶导数 y''.

（3）用二阶导数为零的点和二阶导数不存在的点把函数的定义域分成若干小区间.

（4）列表考察各区间内二阶导数的符号，判断曲线的凹凸区间，求出曲线的拐点.

例 3.26　求函数 $y=2x^4-4x^3+3$ 的凹凸区间与拐点.

解　（1）函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

（2）$y'=8x^3-12x^2$，$y''=24x^2-24x=24x(x-1)$.

（3）解方程 $y''=0$，得

$$x_1=0,\quad x_2=1$$

（4）列表考察：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\smile$	拐点 $(0,3)$	$\frown$	拐点 $(1,1)$	$\smile$

可见，曲线 $y=2x^4-4x^3+3$ 的凹区间为 $(-\infty,0]$ 和 $[1,+\infty)$，凸区间为 $[0,1]$，点 $(0,3)$ 和 $(1,1)$ 是曲线的拐点.

3.5.2　曲线的渐近线

下面先看我们熟悉的函数.

（1）函数 $y=\mathrm{e}^x$，当 $x\to-\infty$ 时，函数值无限趋于零，曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 无限接近直线 $y=0$.

（2）函数 $y=\tan x$，当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数值的绝对值无限增大，曲线 $y=\tan x$ 无限接近直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

（3）函数 $y=\arctan x$，当 $x\to+\infty$ 时，函数值无限接近 $\dfrac{\pi}{2}$，曲线 $y=\arctan x$ 无限接近直线 $y=\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，函数值无限接近 $-\dfrac{\pi}{2}$，曲线 $y=\arctan x$ 无限接近直线 $y=-\dfrac{\pi}{2}$.

一般地，当曲线 $y=f(x)$ 上的一动点 P 沿着曲线无限地远离坐标原点时，如果动点到某定直线 l 的距离趋于零，那么该直线 l 就称为曲线 $y=f(x)$ 的一条渐近线. 渐近线分为水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线，这里主要研究水平渐近线和垂直渐近线.

定义 3.4　设曲线 $y=f(x)$.

（1）如果有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$（或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$），则称直线 $y=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条**水平渐近线**.

（2）如果有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的一条**垂直渐近线.**

例如，直线 $y=0$ 是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的水平渐近线，直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是曲线 $y=\tan x$ 的垂直渐近线.

例 3.27　求曲线 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的水平渐近线和垂直渐近线.

解　因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x}=0$$

所以直线 $y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的水平渐近线.

因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}=\infty$$

所以直线 $x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{1-x}$ 的垂直渐近线.

例 3.28 求曲线 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的水平渐近线和垂直渐近线.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2$$

所以直线 $y=-2$ 是曲线的水平渐近线.

因为

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=\infty$$

所以直线 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线.

习 题 3.5

A 组

1. 单选题.

（1）曲线 $y=x^3-x^2$ 的拐点个数是（ ）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

（2）曲线 $y=x^2(2\ln x-5)$ 的拐点是（ ）.

A. (e^2,e^4)　　B. $(e^2,-e^4)$　　C. $(e,3e^2)$　　D. $(e,-3e^2)$

（3）曲线 $y=\dfrac{1}{x}$（ ）.

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线，又有垂直渐近线　　D. 既无水平渐近线，又无垂直渐近线

（4）曲线 $y=\dfrac{4(x^2+1)}{x^2}-2$ 的水平渐近线是（ ）.

A. $y=0$　　B. $y=4$　　C. $y=2$　　D. $y=-2$

2. 求下列曲线的凹凸区间及拐点：

（1）$y=x^3-3x^2$；　　（2）$y=(2x-1)^4+1$；

（3）$y=x^4-2x^3+1$；　　（4）$y=\ln(1+x^2)$；

（5）$y=x^2+\dfrac{1}{x}$；　　（6）$y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

B 组

已知函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 有拐点 $(-1,4)$，且在点 $x=0$ 处有极大值 2. 求 a、b、c、d 的值.

3.6　MATLAB 数学实验（三）

在 MATLAB 系统中，用[x,y]=fminbnd(f(x),a,b)表示函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最小值 y 及最小值点 x.

例 3.29　求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ 的极值.

解　在命令行窗口中输入如下命令：

```
>>  syms  x                              %定义变量 x
>>  f(x)=  x^3-3*x^2-9*x+10;             %定义函数 f(x)
>>  f1(x)=diff(f(x),x)                   %求函数 f(x)对变量 x 的一阶导数
```

运行结果如下：

```
f1(x)=  3*x^2  -  6*x  -9
```

继续输入如下命令：

```
>>solve(3*x^2  -  6*x  -9==0)                        %求驻点
```

运行结果如下：

```
ans=-1
     3
```

即该函数有两个驻点，分别为 $f'(-1)=0$，$f'(3)=0$.

继续输入命令：

```
>>  [x,y]  =fminbnd('x^3-3*x^2-9*x+10',-3,1)
```

运行结果如下：

```
x=  -2. 9999      y=-16. 9978
```

可知，$x=-1$ 并不是 $x\in[-3,1]$ 上的极小值点，此时需要验证该点是否为极大值点.

继续输入如下命令：

```
>>  [x,y]  =fminbnd('-(  x^3-3*x^2-9*x+10)',-3,1)        %将求极大值的问题通过取相反数的方式转化为求极小值的问题
```

运行结果如下：

```
x=  -1. 0000      y=  -15. 0000
```

即 $x=-1$ 为函数的一个极大值点，极大值为 $y=-15$.

继续输入如下命令：

```
>>  [x,y]  =fminbnd('x^3-3*x^2-9*x+10',1,5)
```

运行结果如下：

```
x=  3.0000      y=  -17. 0000
```

即 $x=3$ 为函数的一个极大值点，极大值为 $y=-17$.

利用 plot()函数输出图像（见图 3.12），观察验证.

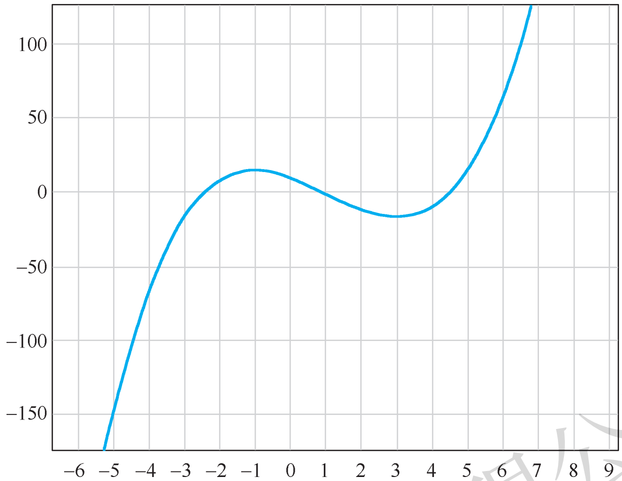


图 3.12

3.7 数学建模案例（三）

【求销售最大利润问题】某品牌女士大衣每件成本为 300 元，单价为 600 元，每周销售 400 件. 如果价格降低，则销售量可以增加，且每周多销售的商品件数与商品单价降低值 x（单位：元，$0 \leqslant x \leqslant 300$）成正比. 已知商品单价降低 10 元时，每周可多销售 20 件.

（1）用 x 表示每周的女士大衣的销售利润.

（2）求使每周获得销售利润最大的商品单价.

1. 问题分析

已知条件有：每件大衣的成本为 300 元，初始单价为 600 元，每周的初始销售量为 400 件；单价降低 10 元时，每周多销售 20 件，单价降低 x 元时，每周的销售量变化与 x 成正比.

分析变量有：商品单价降低值 x（单位：元），其取值范围为 $0 \leqslant x \leqslant 300$；单价 $600 - x$（单位：元）.

销售量随单价降低的变化：根据题意，单价降低 10 元时销售量增加 20 件，即比例系数 $k = \frac{20}{10} = 2$. 因此，单价降低 x 元时，销售量增加 $2x$，总销售量为 $400 + 2x$.

2. 建模准备

利润=销售收入−总成本

销售收入=单价×销售量

3. 模型建立与求解

（1）利润公式建模.

每周利润 $P(x)$：$P(x) =$ 每周销售收入−每周成本，每周销售收入为 $(600 - x)(400 + 2x)$，每周成本为 $300(400 + 2x)$.

代入每周利润公式得 $P(x)=(600-x)(400+2x)-300(400+2x)=(300-x)(400+2x)$.

（2）建模求解.

① 展开计算，$P(x)=300\cdot400+300\cdot2x-x\cdot400-x\cdot2x$，因此，每周利润的表达式为 $P(x)=120000+200x-2x^2$.

② 求使每周获得销售利润最大的单价.

利润函数 $P(x)=120000+200x-2x^2$，为求出使 $P(x)$ 达到最大值的 x，先求导数 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$，可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=200-4x$$

再令 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=0$，得 $200-4x=0$，解得 $x=50$.

综上所述，每周获得销售最大利润的单价为 $600-x=600-50=550$（元）.

拓展思考：

某单位用 2160 万元购得一块空地，计划在该空地上建造一栋至少 10 层、每层 $2000\mathrm{m}^2$ 的楼房. 经测算，若将楼房建成 x（$x\geqslant10$）层，则每平方米的平均建筑费用为 $560+48x$（单位：元）. 为了使楼房每平方米的平均综合费用最少，该楼房应建多少层？（注：平均综合费用=平均建筑费用+平均购地费用，平均购地费用=购地总费用÷建筑总面积.）

复 习 题 3

基础训练

1. 选择题.

（1）下列函数在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理的条件的是（　　）.

A. $y=\mathrm{e}^x$　　B. $y=\ln|x|$　　C. $y=1-x^2$　　D. $y=\frac{1}{x^2}$

（2）函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件和结论，这时 ξ 的值为（　　）.

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

（3）函数 $y=x-\ln(1+x)$ 的单调递减区间是（　　）.

A. $(-1,+\infty)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)$

（4）下列叙述正确的是（　　）.

A. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调递增，且在 (a,b) 内可导，则必有 $f'(x)\geqslant0$

B. 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f(x)>g(x)$，则在 (a,b) 内必有 $f'(x)>g'(x)$

C. 若函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 单调递增，则此函数必定单调递增

D. 若 $f'(x_0)<0$，则在点 x_0 的某邻域内，$f(x)$ 必单调递减

（5）点 $x=0$ 是函数 $y=x^4$ 的（　　）.

A. 驻点但非极值点　　B. 拐点

C. 驻点且是拐点　　D. 驻点且是极值点

（6）函数 $y=x-\sin x$ 在区间 $(-2\pi,2\pi)$ 内的拐点个数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

（7）函数 $y=x^2\mathrm{e}^{-x}$ 及其图像在区间 (1, 2) 内是（　　　）.

A. 单调递减的且是凸的　　B. 单调递减的且是凹的

C. 单调递增的且是凸的　　D. 单调递增的且是凹的

（8）曲线 $y=\dfrac{x+1}{x-3}$ 的垂直渐近线是（　　）.

A. $x=1$　　B. $x=-1$　　C. $x=3$　　D. $x=-3$

（9）曲线 $y=\dfrac{1}{|x|}$（　　）.

A. 只有水平渐近线　　B. 只有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线，又有垂直渐近线　　D. 既无水平渐近线，又无垂直渐近线

（10）曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　　）.

A. 有且仅有水平渐近线　　B. 有且仅有垂直渐近线

C. 既有水平渐近线，又有垂直渐近线　　D. 既无水平渐近线，又无垂直渐近线

2. 填空题.

（1）函数 $f(x)=x-\sin x$ 在其定义域内单调________________.

（2）如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在点 x_0 处取得极值，则________________.

（3）函数 $f(x)=3x^4-4x^3$ 的极小值为________________.

（4）函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x$ 在区间________________内是凸的，在区间________________内是凹的.

（5）函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 有两条水平渐近线，分别是________________和________________.

（6）设点 $(1,a)$ 是曲线 $y=ax^3-x^2-2x+3$ 的拐点，则 $a=$________________.

3. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^3}$；

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin 4x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^x}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{x\ln x}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-x-1}{x(\mathrm{e}^x-1)}$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^n}{x}$；　　（10）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\ln x}{x}$；

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$；　　（12）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

4. 求下列函数的单调区间与极值：

（1）$y=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+12x-\dfrac{1}{3}$；　　（2）$y=x-2\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$；

（3）$y=2x^2-\ln x$；　　（4）$y=\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x^2}$.

5. 求函数 $y=x^3-3x^2-9x+7$ 的单调区间、凹凸区间、极值与拐点.

能力提升

1. 选择题.

（1）下列函数在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件的是（　　）.

A. $\ln(\ln x)$　　B. $\ln x$　　C. $\dfrac{1}{\ln x}$　　D. $\ln(2-x)$

（2）设极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k 和 c 为常量，且 $c\neq0$，则（　　）.

A. $k=2,\ c=-\dfrac{1}{2}$　　B. $k=2,\ c=\dfrac{1}{2}$

C. $k=3,\ c=-\dfrac{1}{3}$　　D. $k=3,\ c=\dfrac{1}{3}$

（3）若 $f(-x)=f(x),\ x\in(-\infty,+\infty)$，在区间 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）.

A. $f'(x)>0,\ f''(x)<0$　　B. $f'(x)>0,\ f''(x)>0$

C. $f'(x)<0,\ f''(x)<0$　　D. $f'(x)<0,\ f''(x)>0$

（4）设 $f(x)$ 的导数在点 $x=a$ 处连续，又有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　　）.

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（5）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 求下列曲线的凹凸区间与拐点：

（1）$y=x^3-6x^2+ax+1$；　（2）$y=\dfrac{1}{x^2+1}$；　（3）$y=\dfrac{2x}{\ln x}$.

3. 利用函数的单调性证明：当 $x>0$ 时，$x+\dfrac{1}{2}x^2\geqslant(1+x)\ln(1+x)$.

4. 若函数 $f(x)$ 在区间内 (a,b) 内有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<b$. 证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

5. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\ \eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

6. 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，在 $(0,1)$ 内存在最大值 $M>0$，且满足 $f(0)=f(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1),\ \eta\in(0,1)$，使得 $|f'(\xi)|+|f'(\eta)|\geqslant4M$.

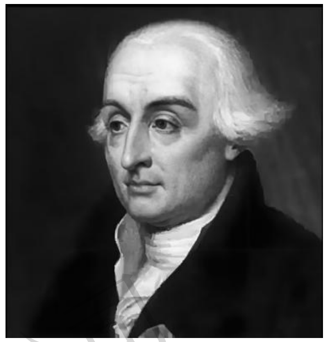
拓展应用

1. 设某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆，截面的面积为 $5\mathrm{m}^2$，则底宽 x 为多少时，才能使截面的周长最小，从而使建造时所用的材料最省？

2. 要做一个长方体有盖箱子，其体积为 $72\mathrm{cm}^3$，底面长与宽之比为 $2:1$. 问长、宽、高各为多少时，才能使所用的材料最省？

【拓展阅读】

一座高耸在数学界的金字塔——拉格朗日



拉格朗日是法国籍意大利裔数学家、物理学家和天文学家，1736年1月25日出生于意大利都灵，1813年4月10日在巴黎逝世.

拉格朗日是18世纪伟大的科学家，在数学、力学和天文学3个学科中都有历史性的重大贡献. 尤其在数学方面，拿破仑曾称赞他是“一座高耸在数学界的金字塔”，他最突出的贡献是使数学分析与几何和力学脱离开来，使数学的独立性更为清晰，从此数学不再仅仅是其他学科的工具.

在探讨“等周问题”的过程中，他用纯分析的方法发展了欧拉开创的变分法，为变分法奠定了理论基础；他的两篇著名的论文《关于解数值方程》和《关于方程的代数解法的思考》，总结出一套标准方法，即把方程化为低一次的方程（辅助方程或预解式）来求解，但这并不适用于五次方程；然而，他的思想已蕴含着群论思想，这使他成为伽罗瓦建立群论先导；在数论方面，他也显示出非凡的才能，费马提出的许多问题都被他一一解答，他还证明了圆周率的无理性，这些研究成果丰富了数论的内容；他的巨著《解析函数论》在为奠定微积分的理论基础方面做了独特的尝试，他试图把微分运算归结为代数运算，从而抛弃自牛顿以来一直令人困惑的无穷小，并想由此出发建立全部分析学；另外，他还用幂级数表示函数，对分析学的发展产生了影响，成为实变函数论的起点；他还在微分方程理论中做出奇解为积分曲线族的包络的几何解释，提出线性变换的特征值概念等. 纵观数学界百余年来的许多成就，都可直接或间接地追溯到拉格朗日的工作，为此，他在数学史上被认为是对分析数学的发展产生全面影响的数学家之一.

在拉格朗日的研究工作中，约有一半同天体力学有关. 他是分析力学的创立者，他完成的《分析力学》一书建立起完整和谐的力学体系. 他用自己在分析力学中的原理和公式建立起各类天体的运动方程. 在天体运动方程的解法中，拉格朗日发现了三体问题运动方程的五个特解，即拉格朗日平动解. 在使天文学力学化、力学分析化上也起到了历史性的作用，促进了力学和天体力学的进一步发展，成为这些领域的开创性或奠基性研究. 此外，他还研究了彗星和小行星的摄动问题，提出了彗星起源假说等.