

第3章 正弦交流电路的分析

内容提要

- 正弦电路的基本概念
- 正弦量的相量表示及正弦电路的相量分析法
- 正弦电路的功率及功率因数
- 串联谐振与并联谐振
- 三相电路

本章开始研究在含有电阻 (R)、电感 (L)、电容 (C) 等元件的电路中, 当输入 (也称激励) 为正弦交流电压或电流, 且电路达到稳态时的分析方法。所谓稳态, 是指电路中的储能元件 L 或 C 均处于非充、放电状态, 此时电路中的响应与激励的变化规律完全相同。这对正弦交流电路的稳态分析十分重要, 其原因在于: (1) 很多实际电路都工作于正弦稳态; (2) 利用傅里叶变换, 可以将周期性非正弦信号分解为无穷多个不同频率正弦量之和, 因此已知电路的正弦稳态响应, 根据线性电路的叠加性质, 可以得到任意非正弦周期性波形信号激励下的响应。

3.1 正弦交流电路的基本概念

3.1.1 正弦量的瞬时值

正弦电压、电流和电动势统称为**正弦量**。与直流电不同, 正弦交流电的大小、方向随时间不断变化, 即一个周期内, 正弦量在不同瞬间具有不同的值, 将此称为正弦量的**瞬时值**, 一般用小写字母如 $i(t_k)$ 、 $u(t_k)$ 或 i 、 u 来表示 t_k 时刻正弦电流、电压的瞬时值。

表示正弦量的瞬时值随时间变化规律的数学式称为正弦量的**瞬时值表达式**, 或称为**解析式**, 用 $i(t)$ 、 $u(t)$ 或 i 、 u 表示。表示正弦量的瞬时值随时间变化规律的图像称为正弦量的**波形**, 或称为**正弦曲线**。图 3-1 所示为一个正弦电压的波形。

正弦电压 $u(t)$ 的解析式为

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) \quad (3-1)$$

同样, 正弦电流 $i(t)$ 的解析式为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad (3-2)$$

需要说明的是, 同一交流量, 如果参考方向选择相反, 那么瞬时值和解析式都相差一个负号, 波形相对横轴 (时间轴) 相反。因此画交流量的波形和确定解析式时, 必须先选定参考方向。

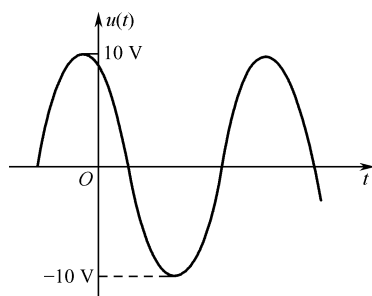


图 3-1 正弦电压的波形

3.1.2 正弦量的三要素

由式 (3-1) 和式 (3-2) 不难看出, 一个正弦量是由振幅、角频率和初相来确定的, 这称为**正弦量的三要素**。它们分别反映了正弦量的大小、变化的快慢及初始值三方面的特征。

1. 振幅 U_m (或 I_m)

正弦量瞬时值中的最大值叫**振幅**, 也叫**峰值**, 振幅用来反映正弦量的幅度大小。有时提及的**峰-峰值**是指电压正向与负向变化的最大值之差, 等于 $2U_m$ 。必须注意, 振幅总是取绝对值, 为正值。

2. 角频率 ω

角频率 ω 是正弦量在每秒内变化的电角度，单位是 rad/s（弧度每秒）。正弦量每变化一个周期 T 的电角度相当于 2π 电弧度，因此角频率 ω 与周期 T 及频率 f 的关系如下

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3-3)$$

这里提到正弦量的周期和频率。所谓**周期**，就是交流电完成一个循环所需要的时间，用字母 T 表示，单位为 s（秒）。单位时间内交流电循环的次数称为**频率**，用 f 表示，据此定义可知，频率与周期互为倒数关系。频率的单位为 1/s，又称为 Hz（赫兹），工程实际中常用的单位还有 kHz、MHz 及 GHz 等，相邻两个单位之间是 10^3 进制。

工程实际中，往往也以频率区分电路，例如：高频电路、低频电路。

我国和世界上大多数国家，电力工业的标准频率即所谓的“工频”是 $f=50$ Hz，其周期为 0.02 s，少数国家（如美国、日本）的“工频”为 60 Hz。在其他技术领域中也用到各种不同的频率，如声音信号的频率为 20~20000 Hz，广播中频段载波频率为 535~1605 Hz，电视用的频率以 MHz 计，高频炉的频率为 200~300 kHz，目前无线电波中频率最高的是激光，其频率可达 10^6 MHz (1 GHz) 以上。

角频率 ω 、周期 T 、频率 f 都可用来反映正弦量随时间变化的快慢。

3. 相位和初相

(1) 相位

式 (3-1)、式 (3-2) 中的 $\omega t + \theta$ 是随时间变化的电角度，它决定了正弦量每一瞬间的瞬时值，称为正弦量的相位角或**相位**，单位是弧度 (rad) 或度 ($^\circ$)。

(2) 初相

初相是正弦量在 $t=0$ 时刻的相位，用 θ 表示，一般规定 $|\theta| \leq \pi$ 。初相反映了正弦量在 $t=0$ 时刻的状态。需要注意的是，初相的大小和正负与计时起点 ($t=0$ 时刻) 的选择有关，选择不同，初相则不同，正弦量的初始值也随之不同。图 3-2 给出了几种不同计时起点的正弦电流的波形。由波形可以看出正弦量的瞬时值会无数次经过零值。现规定：到计时起点的距离不超过 π ，并且由负值向正值变化所经过的那个零值称为**正弦零值**。正弦量初相的绝对值就是正弦零值到计时起点（坐标原点）之间的电角度。利用正弦零值可以判断初相的正负，方法是：看正弦零值与计时起点的相对位置，若正弦零值在计时起点的左边，则初相为正；若在右边，则为负值；若正弦零值与计时起点重合，则初相为零。

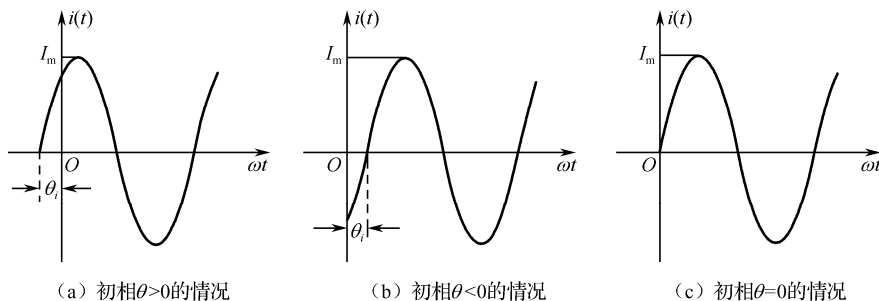


图 3-2 初相为不同值时正弦电流的波形

综上所述，一个正弦量在参考方向确定的条件下，可由振幅、角频率（或频率、周期）和初相这三个参数完全确定，所以，这三个参数称为正弦量的三要素。

【例 3-1】 在选定参考方向下，已知两正弦量的解析式为 $i(t) = -10\sin(628t + 30^\circ)$ A， $u(t) = 311\sin(1000\pi t - 240^\circ)$ V。求 i 和 u 的振幅、角频率、频率、周期和初相。

解：分析此题必须明确两点：（1）振幅只取绝对值；（2）初相 $|\theta| \leq 180^\circ$ 。

将电流 i 的解析式整理为

$$i(t) = -10\sin(628t + 30^\circ) = 10\sin(628t + 30^\circ - 180^\circ) = 10\sin(628t - 150^\circ) \text{ A}$$

于是可得

$$I_m = 10 \text{ A}, \quad \omega = 628 \text{ rad/s}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{628}{2 \times 3.14} = 100 \text{ Hz},$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.01 \text{ s}, \quad \theta_i = -150^\circ$$

将电压 u 的解析式整理为

$$u(t) = 311\sin(1000\pi t - 240^\circ) = 311\sin(1000\pi t - 240^\circ + 360^\circ)$$

$$= 311\sin(1000\pi t + 120^\circ) \text{ V}$$

于是可得

$$U_m = 311 \text{ V}, \quad \omega = 1000\pi \text{ rad/s}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500 \text{ Hz},$$

$$T = \frac{1}{f} = 0.002 \text{ s}, \quad \theta_u = 120^\circ$$

【例 3-2】 图 3-3 给出一正弦电流的波形，试根据所给条件确定该正弦电流的三要素，并写出其解析式。

解：由波形图可得

电流振幅

$$I_m = 20 \text{ A}$$

周期

$$T = (25 - 5) \times 2 = 40 \text{ ms} = 0.04 \text{ s}$$

角频率

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.04} = 50\pi \text{ rad/s}$$

假定此电流的解析式为

$$i(t) = 20\sin(50\pi t + \theta_i) \text{ A}$$

由图可知正弦电流在 $t = 5 \text{ ms}$ 时， $i = 0$ ，即

$$20\sin(50\pi \times 0.005 + \theta_i) = 0$$

因此

$$50\pi \times 0.005 + \theta_i = 0$$

$$\theta_i = -\frac{\pi}{4}$$

此正弦电流的解析式为

$$i(t) = 20\sin\left(50\pi t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ A}$$

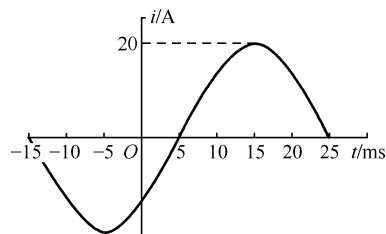


图 3-3 【例 3-2】用图

3.1.3 相位差

两个同频率正弦量的相位之差，称为**相位差**，用 φ 表示。同样规定 $|\varphi| \leq \pi$ 。现有两个同频率的正弦电流的解析式为

$$i_1(t) = I_{1m}\sin(\omega t + \theta_1)$$

$$i_2(t) = I_{2m}\sin(\omega t + \theta_2)$$

则它们的相位差为

$$\varphi = (\omega t + \theta_1) - (\omega t + \theta_2) = \theta_1 - \theta_2 \quad (3-4)$$

式（3-4）表明，两个同频率正弦量的相位之差等于它们的初相之差。相位差不随时间变化，

与计时起点也没有关系。通常用相位差 φ 的量值来反映两个同频率正弦量在时间上的超前和滞后关系。以式(3-4)为例,若 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 > 0$,表明 $i_1(t)$ 超前 $i_2(t)$,超前的角度为 φ ;若 $\varphi = \theta_1 - \theta_2 < 0$,表明 $i_1(t)$ 滞后 $i_2(t)$,滞后的角度为 $|\varphi|$ 。图3-4(a)、图3-4(b)分别表示电流 $i_1(t)$ 超前电流 $i_2(t)$ 和电流 $i_1(t)$ 滞后电流 $i_2(t)$ 的情况。

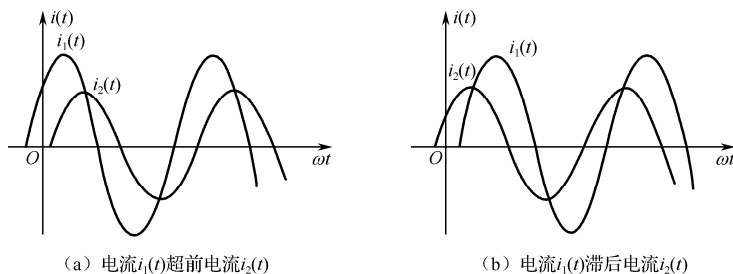


图3-4 同频率正弦电流的相位关系

同频率正弦量的相位差有3种特殊的情况。(1) $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = 0$,称电流 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ 同相;(2) $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \pm \pi/2$,称电流 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ 正交;(3) $\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \pm \pi$,称电流 $i_1(t)$ 与 $i_2(t)$ 反相。

【例3-3】 已知正弦电压、电流的解析式为

$$u(t) = 311\sin(70t - 180^\circ) \text{ V}$$

$$i_1(t) = 5\sin(70t - 45^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 10\sin(70t + 60^\circ) \text{ A}$$

试求电压 $u(t)$ 与电流 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 的相位差并确定其超前、滞后关系。

解: 电压 $u(t)$ 与电流 $i_1(t)$ 的相位差为

$$\varphi = (-180^\circ) - (-45^\circ) = -135^\circ < 0$$

所以 $u(t)$ 滞后 $i_1(t)$ 135° 。

电压 $u(t)$ 与电流 $i_2(t)$ 的相位差为

$$\varphi = -180^\circ - 60^\circ = -240^\circ$$

由于规定 $|\varphi| \leq \pi$,所以 $u(t)$ 与 $i_2(t)$ 的相位差应为 $\varphi = -240^\circ + 360^\circ = 120^\circ > 0$,因此 $u(t)$ 超前 $i_2(t)$ 120° 。

同频率正弦量的相位差不随时间变化,即与计时起点的选择无关。在同一电路中有多个同频率正弦量时,彼此间有一定的相位差。为了分析方便,通常将计时起点选得使其中一个正弦量的初相为零,这个被选初相为零的正弦量称为参考正弦量。其他正弦量的初相就等于它们与参考正弦量的相位差。同一电路中的正弦量必须以同一瞬间为计时起点才能比较相位差,因此一个电路只能选一个正弦量为参考正弦量。这与在电路中只能选一个点为电位参考点是同一道理。

3.1.4 有效值

由于正弦量的瞬时值是随时间变化的,不便比较其大小,因此通常采用有效值来衡量它们的大小。

正弦量的有效值是根据它的热效应确定的。以正弦电压 $u(t)$ 为例,将它加在电阻 R 两端,如果在一个周期 T 内产生的热量与一个直流电压 U 加在同一电阻上在相同时间内产生的热量相同,则定义该直流电压值为正弦电压 $u(t)$ 的有效值。据此定义有

$$\int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt = \frac{U^2}{R} T$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (3-5a)$$

式 (3-5a) 为周期电压的有效值的定义式, 又称为**方均根值**, 它适用于一切周期量。同理, 可得周期电流的有效值为

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (3-5b)$$

如果正弦电压 $u(t)$ 的解析式为 $u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u)$, 则由式 (3-5a) 可得其有效值为

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [U_m \sin(\omega t + \theta_u)]^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707U_m \quad (3-6a)$$

同理, 由式 (3-5b) 可得正弦电流 $i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ 的有效值为

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707I_m \quad (3-6b)$$

式 (3-6a) 和式 (3-6b) 表明, 振幅为 1 V 的正弦电压 (或振幅为 1 A 的正弦电流), 在电路中交换能量方面的实际效果与 0.707 V 的直流电压 (或 0.707 A 的直流电流) 的效果相当。

正弦量的有效值为其振幅的 $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ 。应该注意, 式 (3-6a) 和式 (3-6b) 只适用于正弦量。

非正弦量的有效值与最大值之间不存在这个关系, 而要根据式 (3-5a) 和式 (3-5b) 进行计算。通常, 习惯上用正弦量的有效值表示正弦量的大小, 因此有效值可代替振幅作为正弦量的一个要素。

常用的交流仪表所指示的数字均为有效值。交流电机和交流电器铭牌上标的电压或电流也都是有效值。当交流电压表测出电网电压的读数 (有效值) 为 220 V 时, 用峰值电压表测出的读数应为 $U_m = 311$ V。

交流电路中使用电容器、二极管或交流电器设备时, 电容器的耐压、二极管的反向击穿电压、交流电器设备的绝缘耐压等级等, 都要根据交流电压的最大值来考虑。

【例 3-4】 一个正弦电流的初相为 $\frac{\pi}{3}$, 在 $t = \frac{T}{6}$ 时电流的值为 8.66 A, 试求该电流的有效值。

解: 设此正弦电流的解析式为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \text{ A}$$

根据已知条件, 当 $\theta_i = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{T}{6}$ 时, $i = 8.66$ A, 所以有

$$8.66 = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = I_m \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$I_m = \frac{8.66}{\sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{8.66}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10 \text{ A}$$

所以此正弦电流的有效值为

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 7.07 \text{ A}$$

【例 3-5】 将两只反向击穿电压为 50 V 的二极管串联在有效值为 100 V 的正弦电源上, 能正常使用吗? 需要几只串联才行?

解: 正弦电源有效值为 $U = 100$ V, 振幅为 $U_m = \sqrt{2}U = 141.4$ V, 超过了两只二极管串联时的反向击穿电压, 二极管会损坏, 不能正常使用。因此, 至少需要 3 只反向击穿电压为 50 V 的二极管串联在有效值为 100 V 的正弦电源上。

复习思考题

3.1.1 已知 $i = 14.1 \sin(6280t - 210^\circ)$ A, 则 $I_m =$ _____ A, $I =$ _____ A, $\omega =$ _____

rad/s, $f = \underline{\hspace{2cm}}$ Hz, $T = \underline{\hspace{2cm}}$ s, $\theta_i = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.1.2 已知正弦电流的解析式 $i = 10\sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$ A, 如将纵轴向左移动 $\frac{\pi}{3}$, 则其初相变为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 将纵轴向右移动 $\frac{\pi}{3}$, 则其初相变为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.1.3 选定正弦电压 u 的参考方向由 A→B, 其解析式 $u = 220\sqrt{2}\sin(10t + 60^\circ)$ V, 若规定该电压的参考方向由 B→A, 其以 u' 表示, 则其解析式为 $u' = \underline{\hspace{2cm}}$ V, 初相 $\theta_{u'} = \underline{\hspace{2cm}}$, u 和 u' 的相位差 $\varphi = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.1.4 已知 $i = 2.82\sin(500\pi t - 60^\circ)$ A, $u = 110\sqrt{2}\sin(500\pi t + 240^\circ)$ V, 则 i 和 u 的相位关系为 ()。

- (a) i 滞后 u 300° (b) i 滞后 u 120° (c) u 滞后 i 60°

3.1.5 一个“工频”电压的振幅为 311 V, 在 $t = 0$ 时的瞬时值为 -155.5 V, 试求该电压的解析式。

3.1.6 大致画出两个同频率正弦电压 u_1 和 u_2 的波形, 要求两者的相位关系分别满足: (1) 同相; (2) 反相; (3) 正交; (4) u_1 超前 u_2 90° 。

3.2 正弦量的相量表示

前面已经学习了正弦量的两种表示方法: 解析式表示法和波形图表示法。这两种表示方法都能直观地反映出正弦量的三要素, 表示出正弦量的瞬时值随时间变化的关系。然而, 用这两种表示方法去分析和计算正弦电路比较复杂。为了解决这个问题, 引入了正弦量的第三种表示方法——相量表示法。相量表示法, 实际上采用的是复数的表示形式, 因此, 为了更好地掌握相量表示法, 首先复习复数的有关知识。

3.2.1 复数的表示形式及运算规则

复数与复平面上的点一一对应, 此时复数可用点的横坐标、纵坐标, 即复数的实部、虚部来描述。复数与复平面上带方向的线段(复矢量)也具有一一对应关系, 此时复数可用该线段的长度和方向角(复数的模和辐角)来描述。如图 3-5 所示直角坐标系中, 实轴(+1)和虚轴(+j)组成一个复平面, 该复平面内, 点 A 的坐标为 (a, b) , 复矢量 \overline{OA} 的长度、方向角分别为 r, θ , 则它们之间的关系为

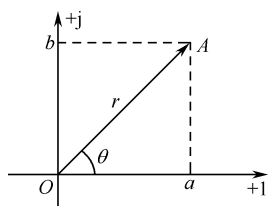


图 3-5 复平面

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan \frac{b}{a} \quad (3-7)$$

$$A = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta \quad (3-8)$$

其中, a, b 称为复数的**实部**、**虚部**; r, θ 称为复数的**模**、**辐角**, 规定辐角 $|\theta| \leq \pi$ 。

1. 复数的表示形式

(1) 代数形式

$$A = a + jb \quad (3-9)$$

其中, j 称为虚数单位, 且 $j^2 = -1$, $\frac{1}{j} = -j$ 。

(2) 三角函数形式

$$A = r\cos\theta + j r\sin\theta \quad (3-10)$$

(3) 指数形式

$$A = r e^{j\theta} \quad (3-11)$$

指数形式是根据欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ 得到的。

(4) 极坐标形式

$$A = r \angle \theta \quad (3-12)$$

【例 3-6】 写出复数 $A_1 = 3 - j4$, $A_2 = -4 + j3$ 的指数形式和极坐标形式。

解: 由两复数的实部、虚部可以看出, 复数 A_1 的辐角在第四象限, 复数 A_2 的辐角在第二象限。复数 A_1 的模和辐角为

$$r_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \quad \theta_1 = \arctan \frac{-4}{3} = -53.1^\circ$$

所以 $A_1 = 3 - j4$ 的指数形式和极坐标形式分别为

$$A_1 = 5e^{-j53.1^\circ}, \quad A_1 = 5 \angle -53.1^\circ$$

复数 A_2 的模和辐角为

$$r_2 = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5, \quad \theta_2 = \arctan \frac{3}{-4} = 143.1^\circ$$

所以 $A_2 = -4 + j3$ 的指数形式和极坐标形式分别为

$$A_2 = 5e^{j143.1^\circ}, \quad A_2 = 5 \angle 143.1^\circ$$

【例 3-7】 试写出 1, -1, +j, -j 的极坐标形式并在复平面内画出它们的复矢量。

解: 实数和虚数均可视为复数的特例。

1 的极坐标形式为

$$1 = 1 \angle 0^\circ$$

-1 的极坐标形式为

$$-1 = 1 \angle \pm 180^\circ$$

+j 的极坐标形式为

$$+j = 1 \angle 90^\circ$$

-j 的极坐标形式为

$$-j = 1 \angle -90^\circ$$

在复平面上与之对应的矢量如图 3-6 所示。

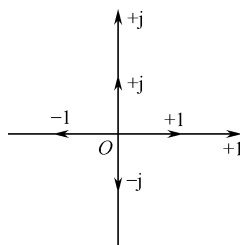


图 3-6 【例 3-7】用图

2. 复数的运算规则

设有两个复数:

$$A_1 = a_1 + jb_1 = r_1 \angle \theta_1$$

$$A_2 = a_2 + jb_2 = r_2 \angle \theta_2$$

则它们的加减乘除运算如下:

(1) 复数的加减法

复数相加或相减时, 一般采用代数形式, 实部、虚部分别相加或相减, 即

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2) \quad (3-13)$$

复数相加或相减后, 与复数相对应的矢量也相加或相减。在复平面上进行相加或相减时, 其矢量满足“平行四边形”或“三角形”法则。

(2) 复数的乘除法

复数相乘或相除时, 以指数形式和极坐标形式进行较为方便。两复数相乘时, 模相乘, 辐角相加; 两复数相除时, 模相除, 辐角相减。以极坐标形式为例可写为

$$A_1 \cdot A_2 = r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 \cdot r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \quad (3-14)$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2) \quad (3-15)$$

在复平面内进行两复数的乘除法时, 应以复矢量的旋转方式进行。

【例 3-8】 求复数 $30 \angle 30^\circ + 40 \angle -60^\circ$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } 30\angle 30^\circ + 40\angle -60^\circ &= 30\cos 30^\circ + j30\sin 30^\circ + 40\cos(-60^\circ) + j40\sin(-60^\circ) \\ &= 26 + j15 + 20 - j34.64 = 46 - j19.64 \approx 50\angle -23.1^\circ \end{aligned}$$

$30\angle 30^\circ + 40\angle -60^\circ$ 在复平面上用矢量的“平行四边形”法则也可求出, 如图 3-7 所示。

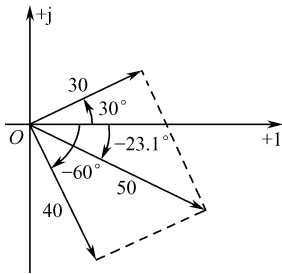


图 3-7 【例 3-8】用图

【例 3-9】 已知 $A = 6 + j8$, $B = 4 - j3$, 求 AB 和 $\frac{A}{B}$ 。

$$\begin{aligned} \text{解: } A &= 6 + j8 = 10\angle 53.1^\circ \\ B &= 4 - j3 = 5\angle -36.9^\circ \\ AB &= 10\angle 53.1^\circ \cdot 5\angle -36.9^\circ = 50\angle 16.2^\circ \\ \frac{A}{B} &= \frac{10\angle 53.1^\circ}{5\angle -36.9^\circ} = 2\angle 90^\circ \end{aligned}$$

3.2.2 正弦量的相量表示及相量图

假设正弦电压 u 的解析式为 $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u)$, 由前面介绍可知, 一个复数 A 可用极坐标形式表示为 $A = r\angle\theta$ 。若令 $r = \sqrt{2}U$, $\theta = \omega t + \theta_u$, 则复数 A 可写为 $A = \sqrt{2}U\angle(\omega t + \theta_u)$, 其三角函数形式为

$$A = \sqrt{2}U\angle(\omega t + \theta_u) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) + j\sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u)$$

不难看出, 复数 A 的虚部就是正弦电压 u 的解析式, 而且包含了正弦电压的三要素。因此, 将复数 $A = \sqrt{2}U\angle(\omega t + \theta_u)$ 称为对应于正弦电压 $u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u)$ 的相量, 表示为 $\dot{U} = U\angle\theta_u$ 。

可见, 相量的符号是在有效值上面加一点表示, 即电压相量用 \dot{U} 表示, 电流相量用 \dot{I} 表示。对应的模也是用有效值 U 和 I 而不用振幅。于是, 正弦电压 $u(t)$ 、电流 $i(t)$ 的解析式与其对应的相量形式有以下关系

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u) \Leftrightarrow \dot{U} = U\angle\theta_u \quad (3-16)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i) \Leftrightarrow \dot{I} = I\angle\theta_i \quad (3-17)$$

关于正弦量的相量表示, 需要注意以下几点:

(1) 正弦量的相量形式一般采用的是复数的极坐标形式, 正弦量与其相量形式是“相互对应”关系 (符号“ \Leftrightarrow ”的含义), 不是相等关系。

(2) 若已知一个正弦量的解析式, 可以由有效值及初相角两个要素写出其相量形式, 这时角频率 ω 是一个已知的要素, 但 ω 不直接出现在相量表达式中。

(3) 后面关于正弦电路的分析均采用相量分析法。所谓**相量分析法**, 就是把正弦电路中的电压、电流先表示成相量形式, 然后用相量形式进行运算的方法。由前面分析可知, 相量分析法实际上利用了复数的运算规则。

和复数一样, 正弦量的相量也可以用复平面上一条带方向的线段 (复矢量) 来表示。把画在同一复平面上表示正弦量相量的图称为**相量图**。只有同频率的正弦量, 其相量图才能画在同一复平面上。

在相量图上, 能够非常直观地表示出各相量对应的正弦量的大小及相互之间的相位关系。为使图面清晰, 有时画相量图时, 可以不画出复平面的坐标轴, 但相位的辐角应以逆时针方向的角度为正, 顺时针方向的角度为负。

【例 3-10】 写出下列各正弦量的相量形式, 并画出相量图。

$$u_1(t) = 10\sin(100\pi t + 60^\circ) \text{ V}$$

$$u_2(t) = -6\sin(100\pi t + 135^\circ) \text{ V}$$

$$u_3(t) = 5\cos(100\pi t + 60^\circ) \text{ V}$$

解:

$$\dot{U}_1 = U_1 \angle \theta_{u_1} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = 5\sqrt{2} \angle 60^\circ \text{ V}$$

因为

$$\begin{aligned} u_2(t) &= -6\sin(100\pi t + 135^\circ) \\ &= 6\sin(100\pi t + 135^\circ - 180^\circ) = 6\sin(100\pi t - 45^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(t) &= 5\cos(100\pi t + 60^\circ) = 5\sin(100\pi t + 60^\circ + 90^\circ) \\ &= 5\sin(100\pi t + 150^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

所以

$$\dot{U}_2 = U_2 \angle \theta_{u_2} = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 3\sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_3 = U_3 \angle \theta_{u_3} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle 150^\circ = 2.5\sqrt{2} \angle 150^\circ \text{ V}$$

其相量图如图 3-8 所示。

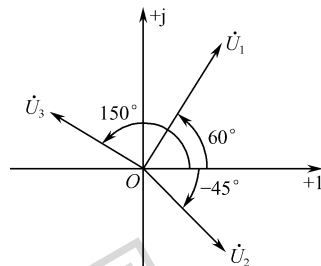


图 3-8 【例 3-10】用图

复习思考题

3.2.1 将复数 $5\angle 30^\circ$ 、 $8\angle -90^\circ$ 、 $220\angle -120^\circ$ 、 $20\angle -\frac{5\pi}{6}$ 化为代数形式。

3.2.2 将复数 $3 + j4$ 、 $-4 - j3$ 、 $-8 + j6$ 、 $2 - j1$ 化为指数形式和极坐标形式。

3.2.3 已知两复数 $A = 8\angle -60^\circ$ ， $B = 4\angle 30^\circ$ ，试求 $A + B$ 、 $A - B$ 、 AB 、 A/B ；并在复平面内用复矢量画出以上四个运算过程。

3.2.4 写出下列各正弦量对应的相量形式，并画出它们的相量图。

(1) $u_1 = 220\sqrt{2} \sin \omega t \text{ V}$; (2) $u_2 = 100\sqrt{2} \sin(\omega t - 260^\circ) \text{ V}$;

(3) $i_1 = -14.1 \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ A}$; (4) $i_2 = 10 \cos(\omega t - 30^\circ) \text{ A}$.

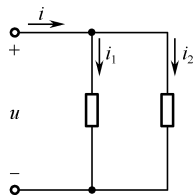
3.2.5 已知 $i_1 = 2\sqrt{2} \sin \omega t \text{ A}$ ， $i_2 = 2\sqrt{2} \sin(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$ ，如题图 3.2.5 所示，判断下列表达式的正误：

(1) $I = I_1 + I_2$ () ; (2) $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ () ;

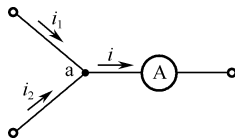
(3) $i = i_1 + i_2$ () ; (4) $I_m = I_{1m} + I_{2m}$ () .

3.2.6 包含节点 a 的部分电路如题图 3.2.6 所示，已知 $i_1 = 5\sqrt{2} \sin 314t \text{ A}$ ， $i_2 = 5\sqrt{2} \sin(314t + 60^\circ) \text{ A}$ ，则交流电流表 A 的读数应为 ()。

- (a) 5 A (b) $5\sqrt{2} \text{ A}$ (c) $5\sqrt{3} \text{ A}$ (d) 10 A



题图 3.2.5



题图 3.2.6

3.3 电阻、电感、电容伏安关系的相量形式

前文直流电路的分析中已经强调，电路中的两类约束，即元件自身的伏安关系约束和元件互连的约束，是分析电路的基本依据，正弦电路的分析也不例外。为了借用“相量”来分析正弦电路，首先必须推导出这两类约束的相量形式，本节首先推导元件自身的伏安关系的相量形式。下一节介绍元件互连的约束，即基尔霍夫定律的相量形式。

电阻、电感和电容是构成正弦交流电路的基本元件，它们的伏安关系在第 1 章已经讨论过，本节将以此为依据，进一步推导各元件电压、电流关系的相量形式，并给出各元件的相量模型。讨论中首先需要注意的是，在正弦电路中，为了完整描述电压与电流的关系，必须从频率关系、大小关系（通常指有效值关系）和相位关系三个方面进行。

3.3.1 电阻

图 3-9 (a) 所示电阻电路的时域模型中，选取电阻的电压、电流为关联方向，根据欧姆定律有

$$u(t) = Ri(t)$$

假设流过电阻的电流为

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i)$$

则电压的解析式为

$$u(t) = Ri(t) = \sqrt{2}RI \sin(\omega t + \theta_i) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u) \quad (3-18)$$

由式 (3-18) 可以看出，电阻上电压与电流为同频率的正弦量，同时，可以得到 u 、 i 之间存在如下关系：

(1) 电压、电流的有效值关系

$$U = RI \quad (3-19)$$

(2) 电压、电流的相位关系

$$\theta_u = \theta_i \quad (\text{电压、电流同相}) \quad (3-20)$$

根据正弦电路中电阻电压与电流的关系（指频率、大小和相位关系），可以推出电阻电压与电流的相量关系式为

$$\dot{U} = U \angle \theta_u = RI \angle \theta_i = R\dot{I} \quad (3-21)$$

式 (3-21) 又叫**相量形式的欧姆定律**。图 3-9 (b) 和图 3-9 (c) 为电阻的相量模型和相量图。

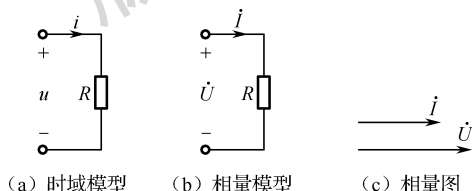


图 3-9 电阻正弦交流电路

3.3.2 电感

图 3-10 (a) 所示电感电路的时域模型中，假设流过电感的电流为

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i)$$

关联方向下根据电感的伏安关系可得

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{d[\sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i)]}{dt} = \omega L \sqrt{2}I \cos(\omega t + \theta_i) \\ &= \omega L \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u) \end{aligned} \quad (3-22)$$

由式 (3-22) 可以看出，电感上电压与电流为同频率的正弦量，同时，可以得到 u 、 i 之间存在如下关系：

(1) 电压、电流的有效值关系

$$U = \omega LI \quad (3-23)$$

(2) 电压、电流的相位关系

$$\theta_u = \theta_i + 90^\circ \quad (\text{电压超前电流 } 90^\circ) \quad (3-24)$$

由式 (3-23) 可以看出, 电感上电压与电流的有效值满足 ωL 倍关系, ωL 称为电感的**感抗**, 用 X_L 表示。感抗的表达式为

$$X_L = \omega L = 2\pi fL \quad (3-25)$$

感抗的单位是欧姆 (Ω), 用来表征电感对电流阻碍作用的大小。在 L 确定的条件下, X_L 与 ω 成正比, 因此电感具有**通低频、阻高频**的作用。应该注意, 感抗 X_L 只是电感电压与电流有效值 (或振幅) 之比, 而不是它们的瞬时值之比, $X_L \neq \frac{u_L}{i_L}$ 。对于电感来说, 电压与电流瞬时值之间存在的微分关系而不是正比关系。同时感抗只对正弦电路有意义。

根据正弦电路中电感电压与电流的关系 (指频率、大小和相位关系), 可以推出电感电压与电流的相量关系式为

$$\dot{U} = U \angle \theta_u = \omega LI \angle \theta_i + 90^\circ = \omega LI \angle \theta_i \cdot \angle 90^\circ = j\omega L \dot{I} = jX_L \dot{I} \quad (3-26)$$

图 3-10 (b)、图 3-10 (c) 所示分别为电感的相量模型和相量图。

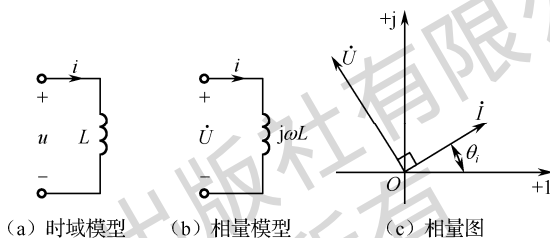


图 3-10 电感正弦交流电路

【例 3-11】 图 3-11 (a) 所示电感电路中, 已知 $u_L(t) = 311\sin(100t + 60^\circ)$ V, $L = 2$ H, 求电感电流 $i_L(t)$ 并画出相量图。

解: 选定电压 u_L 与电流 i_L 参考方向一致, 如图 3-11 (a) 所示。由已知得

$$\dot{U}_L = \frac{311}{\sqrt{2}} \angle 60^\circ = 220 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$X_L = \omega L = 100 \times 2 = 200 \Omega$$

根据式 (3-26) 可求得

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{jX_L} = \frac{220 \angle 60^\circ}{1 \angle 90^\circ \times 200} = \frac{220 \angle 60^\circ}{200 \angle 90^\circ} = 1.1 \angle -30^\circ \text{ V}$$

所以

$$i_L(t) = 1.1\sqrt{2} \sin(100t - 30^\circ) \text{ A}$$

相量图如图 3-11 (b) 所示。

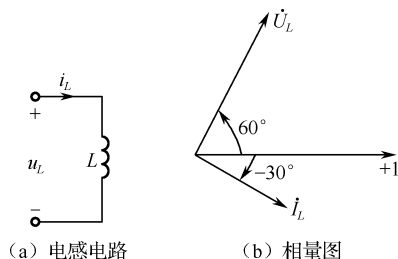


图 3-11 【例 3-11】用图

3.3.3 电容

图 3-12 (a) 所示电容电路的时域模型中, 假设加在电容上的电压为

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u)$$

关联方向下根据电容的伏安关系可得

$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \frac{du(t)}{dt} = C \frac{d[\sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u)]}{dt} = \omega C \sqrt{2}U \cos(\omega t + \theta_u) \\
 &= \omega C \sqrt{2}U \sin(\omega t + \theta_u + 90^\circ) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta_i)
 \end{aligned}
 \quad (3-27)$$

由式 (3-27) 可以看出, 电容上电压与电流为同频率的正弦量, 同时, 可以得到 u 、 i 之间存在如下关系:

(1) 电压、电流的有效值关系

$$U = \frac{1}{\omega C} I \quad (3-28)$$

(2) 电压、电流的相位关系

$$\theta_u = \theta_i - 90^\circ \quad (\text{电压滞后电流 } 90^\circ) \quad (3-29)$$

由式 (3-28) 可以看出, 电容上电压是电流有效值的 $\frac{1}{\omega C}$ 倍, $\frac{1}{\omega C}$ 称为电容的**容抗**, 用 X_C 表示。容抗的表达式为

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} \quad (3-30)$$

容抗的单位是欧姆 (Ω), 用来表征电容对电流阻碍作用的大小。在电容 C 确定的条件下, X_C 与 ω 成反比, 因此电容具有**通高频、阻低频**的作用。

与感抗一样, 容抗 X_C 只是电容上电压与电流有效值 (或振幅) 之比, 而不是它们的瞬时值之比, $X_C \neq \frac{u_C}{i_C}$ 。同样容抗只对正弦电流有意义。

根据正弦电路中电容电压与电流的关系 (指频率、大小和相位关系), 可以推出电容电压与电流的相量关系式为

$$\dot{U} = U \angle \theta_u = \frac{1}{\omega C} I \angle \theta_i - 90^\circ = \frac{1}{\omega C} I \angle \theta_i \cdot \angle -90^\circ = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = -j X_C \dot{I} \quad (3-31)$$

图 3-12 (b)、图 3-12 (c) 所示分别为电容的相量模型和相量图。

需要说明的是, 在以上各元件的相量模型中, R 、 L 、 C 各元件上所标注的物理量 (R 、 $j\omega L$ 、 $-j\frac{1}{\omega C}$) 是元件的复阻抗。关于复阻抗将在后面 3.5 节中介绍。

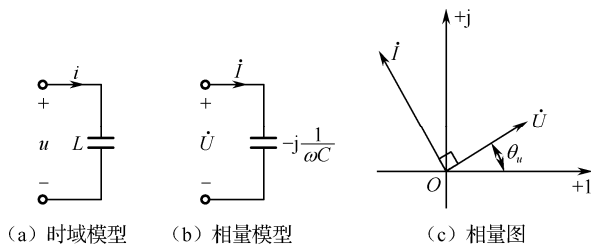


图 3-12 电容正弦交流电路

【例 3-12】 电容电压 u_C 和电流 i_C 参考方向一致, 已知 $\dot{U}_C = 220 \angle -30^\circ \text{ V}$, $\dot{I}_C = 1.1 \angle 60^\circ \text{ A}$, 频率 $f = 50 \text{ Hz}$, 求电容 C 。

解: 因为 u_C 、 i_C 参考方向一致, 所以

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_C &= -j X_C \dot{I}_C \\
 X_C &= \frac{\dot{U}_C}{-j \dot{I}_C} = \frac{220 \angle -30^\circ}{1 \angle -90^\circ \times 1.1 \angle 60^\circ} = 200 \Omega
 \end{aligned}$$

所以电容 C 等于

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 50 \times 200} = 15.9 \times 10^{-6} \text{ F} = 15.9 \mu\text{F}$$

复习思考题

3.3.1 已知 $R = 10 \Omega$ ，流过电阻的电流为 $i = 1.41 \sin(\pi t + 90^\circ) \text{ A}$ ，在电压、电流为关联参考方向下，电阻电压相量 $\dot{U}_R = \underline{\hspace{2cm}}$ V，其解析式为 $u_R = \underline{\hspace{2cm}}$ V。

3.3.2 电感接于正弦电路中，其电压 u_L 和电流 i_L 的参考方向选为一致。判断正误：

(1) $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ()； (2) $X_L = \frac{u_L}{i_L}$ ()； (3) $\dot{U}_L = \omega L \dot{I}_L$ ()；

(4) $U_L = \omega L I_L$ ()； (5) $\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_L}{j\omega L}$ ()。

3.3.3 已知电感电压 $\dot{U}_L = 20 \angle 36.9^\circ \text{ V}$ ，电感电流 $\dot{I}_L = 2 \angle -53.1^\circ \text{ A}$ ， $f = 50 \text{ Hz}$ ，则电感的感抗 $X_L = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$ ，电感 $L = \underline{\hspace{2cm}} \text{ H}$ 。

3.3.4 电容接于正弦电路中，其电压 u_C 和电流 i_C 的参考方向选为一致。判断正误：

(1) $i_C = \frac{u_C}{C}$ ()； (2) $I_C = \frac{U_C}{\omega C}$ ()； (3) $\dot{I}_C = j\omega C \dot{U}_C$ ()；

(4) $I_C = \omega C U_C$ ()； (5) $i_C = \frac{u_C}{X_C}$ ()。

3.3.5 一个电容 $C = 31.8 \mu\text{F}$ ，外接电压 $u_2 = 220\sqrt{2} \sin(314t - 30^\circ) \text{ V}$ ，电压、电流参考方向选为一致，则容抗 $X_C = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$ ，电流 $\dot{I}_C = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$ ， $i_C(t) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ A}$ 。

3.4 基尔霍夫定律的相量形式

3.4.1 基尔霍夫电流定律的相量形式

基尔霍夫电流定律是电流连续性原理的体现。在交流电路中，任一瞬间电流总是连续的，因此，基尔霍夫电流定律也适用于交流电路的任一瞬间，即任一瞬间，流过正弦电路任一节点（或闭合面）的各支路电流瞬时值的代数和恒等于零，满足 $\sum i = 0$ 。

由于正弦电流的解析式是描述电流瞬时值随时间变化的式子，则在正弦电路任一节点上的各支路电流的解析式的代数和恒等于零。

正弦电路中，由于各支路电流都是与电源同频率的正弦量，把这些同频率的正弦量用相量表示即可得

$$\sum \dot{i} = 0 \quad (3-32)$$

式 (3-32) 就是基尔霍夫电流定律 (KCL) 的相量形式。它说明，在正弦交流电路的任一节点上，任一时刻，各支路电流的相量的代数和恒等于零。

电流前的正负号与直流电路一样，由参考方向决定。若规定流出节点的电流前取正号，则流入节点的电流前取负号。当然，也可做相反的规定。

【例 3-13】 图 3-13 (a)、图 3-13 (b) 所示正弦电路中，已知电流表 A_1 、 A_2 、 A_3 的读数都是 10 A ，求电路中电流表 A 的读数。

解： 求电流表 A 的读数就是求电路中总电流 i 的有效值。

以端电压作为参考正弦量，则可设其相量为 $\dot{U} = U \angle 0^\circ \text{ V}$ 。

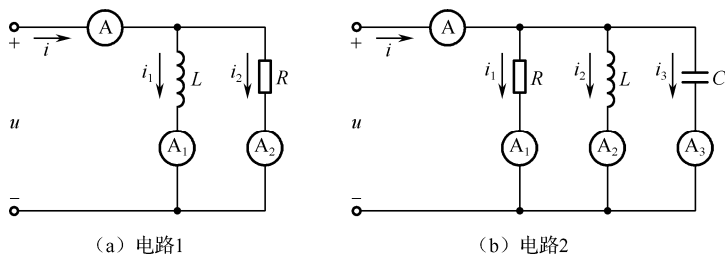


图 3-13 【例 3-13】用图 1

(1) 选定电流、电压的参考方向如图 3-13 (a) 所示, 则可写出

$$\dot{I}_1 = 10\angle -90^\circ \text{ A} \quad (\text{电感的端电压超前端电流 } 90^\circ)$$

$$\dot{I}_2 = 10\angle 0^\circ \text{ A} \quad (\text{电阻的端电压与端电流同相})$$

由相量形式的 KCL 得

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 10\angle -90^\circ + 10\angle 0^\circ = -j10 + 10 = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$

因此, 电流表 A 的读数为 $10\sqrt{2}$ A, 而不是想象中的 $10 + 10 = 20$ A, 这与直流电路是不同的。因为支路电流 i_1 和 i_2 的相位不同, 它们的有效值不能直接相加, 也就是说, 正弦量的有效值不满足 KCL, 这从图 3-14 (a) 所示的相量图中可以直观地看出。各支路电流的有效值之间应满足矢量合成的“平行四边形”或“三角形”法则。

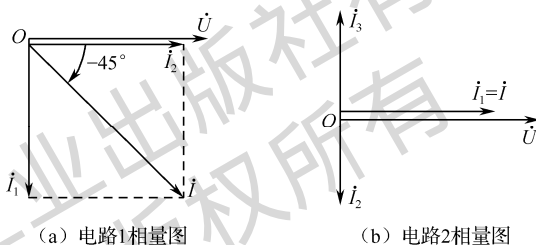


图 3-14 【例 3-13】用图 2

(2) 选定电流、电压的参考方向如图 3-13 (b) 所示, 则可写出

$$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_2 = 10\angle -90^\circ \text{ A}, \quad \dot{I}_3 = 10\angle 90^\circ \text{ A}$$

由相量形式的 KCL 得

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 10\angle 0^\circ + 10\angle -90^\circ + 10\angle 90^\circ = 10 - j10 + j10 = 10 \text{ A}$$

因此电流表 A 的读数为 10 A, 而不是 $10 + 10 + 10 = 30$ A。其相量图如图 3-14 (b) 所示。

3.4.2 基尔霍夫电压定律的相量形式

根据能量守恒定律, 基尔霍夫电压定律也适用于交流电路的任一瞬间, 即任一瞬间, 正弦电路的任一闭合回路内各段电压瞬时值的代数和恒等于零, 满足 $\sum u = 0$ 。

同样, 基尔霍夫电压定律对解析式也是适用的, 即正弦电路的任一闭合回路内, 各段电压解析式的代数和恒等于零。

正弦电路中, 由于各段电压都是同频率的正弦量, 因此正弦交流电路的任一闭合回路内, 各段电压的相量的代数和恒等于零, 即

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (3-33)$$

式 (3-33) 就是基尔霍夫电压定律 (KVL) 的相量形式。

【例 3-14】图 3-15 (a)、图 3-15 (b) 所示正弦电路中, 已知电压表 V_1 、 V_2 、 V_3 的读数都是 50 V, 求电路中电压表 V 的读数。

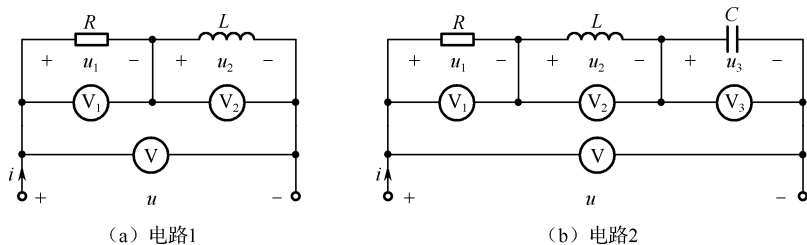


图 3-15 【例 3-14】用图

解：求电压表 V 的读数就是求电路中总电压 u 的有效值。

以端电流作为参考正弦量，则可设其相量为 $\dot{I} = I\angle 0^\circ \text{ A}$ 。

(1) 选定电压、电流的参考方向如图 3-15 (a) 所示，则可写出

$$\dot{U}_1 = 50\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_2 = 50\angle 90^\circ \text{ V}$$

由相量形式的 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 50\angle 0^\circ + 50\angle 90^\circ = 50 + j50 = 50\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$

所以，电压表 V 的读数为 $50\sqrt{2} \text{ V}$ 。

(2) 选定电压、电流的参考方向如图 3-15 (b) 所示，则可写出

$$\dot{U}_1 = 50\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_2 = 50\angle 90^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_3 = 50\angle -90^\circ \text{ V}$$

由相量形式的 KVL 得

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 50\angle 0^\circ + 50\angle 90^\circ + 50\angle -90^\circ = 50 + j50 - j50 = 50 \text{ V}$$

所以，电压表 V 的读数为 50 V 。

通过以上两道例题的分析再次强调一点，就是在正弦电路中，电压、电流的有效值不满足 KVL 和 KCL。以图 3-13 (b) 和图 3-15 (b) 为例，图 3-13 (b) 中，总电流的有效值不等于各支路电流有效值之和，即 $I \neq I_R + I_L + I_C$ ，而应满足 $I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}$ ；同样，图 3-15 (b) 中，总电压的有效值不等于各元件电压有效值之和，即 $U \neq U_R + U_L + U_C$ ，而应满足 $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ 。（提示：以上电流、电压的有效值关系式可借助相量图，根据“平行四边形”法则进行推导。）

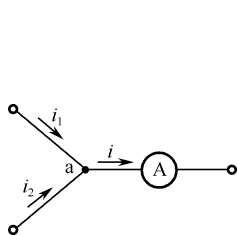
复习思考题

3.4.1 包含有节点 a 的部分电路如题图 3.4.1 所示，已知 $i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t + 60^\circ) \text{ A}$ ， $i_2 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ) \text{ A}$ ，则电流表 A 的读数应为（ ）。

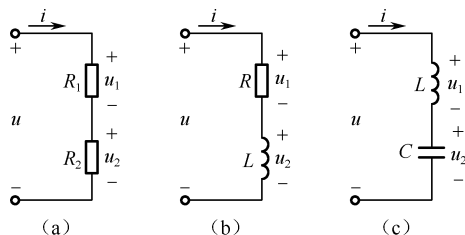
- (a) 20 A (b) $10\sqrt{2} \text{ A}$ (c) 10 A

3.4.2 题图 3.4.2 (a)、题图 3.4.2 (b)、题图 3.4.2 (c) 所示正弦电路中，各元件电压有效值分别为 $U_1 = 3 \text{ V}$ ， $U_2 = 4 \text{ V}$ ，则三个电路端电压有效值 U 正确的一组应为（ ）。

- (a) 7 V、5 V、-1 V (b) 7 V、5 V、1 V (c) 7 V、5 V、5 V (d) 7 V、7 V、7 V



题图 3.4.1



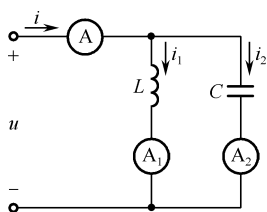
题图 3.4.2

3.4.3 题图 3.4.3 所示正弦电路中，已知电流表 A_1 、 A_2 的读数均为 1 A，则电流表 A 的读数

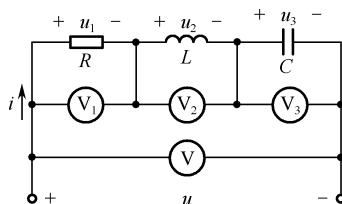
应为 ()。

- (a) 2 A (b) $\sqrt{2}$ A (c) 0 A

3.4.4 题图 3.4.4 所示正弦电路中, 已知电压表 V_1 、 V_2 、 V_3 的读数均为 10 V, 则此串联电路端电压的有效值 (电压表 V 的读数) $U =$ _____ V。



题图 3.4.3



题图 3.4.4

3.5 复阻抗与复导纳

复阻抗与复导纳是正弦电路相量分析法中两个非常重要的物理量。这两个物理量的引入, 使得电阻电路的分析方法可以用于交流电路。

3.5.1 复阻抗

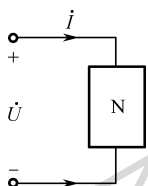


图 3-16 正弦电路

图 3-16 所示是一个无源正弦二端网络 N , 在正弦稳态下, 其端电压和端电流分别用相量 \dot{U} 和 \dot{I} 表示, 且参考方向为关联方向。定义端电压 \dot{U} 与端电流 \dot{I} 的比值为该二端网络的等效复阻抗, 复阻抗用字母 “ Z ” 表示, 即

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} \quad (3-34)$$

式 (3-34) 即为复阻抗的定义式。复阻抗是一个复数, 单位是欧姆 (Ω)。根据复阻抗的定义式, 以及 R 、 L 、 C 各元件伏安关系的相量关系式, 可以推出各元件的复阻抗分别为

$$Z_R = R, \quad Z_L = j\omega L = jX_L, \quad Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

由式 (3-34) 还可以得到

$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad (3-35)$$

式 (3-35) 是在任何一个不含独立源的正弦电路中, 端电压与端电流在关联方向下, 其相量关系的一般形式, 该式也适用于单元件构成的正弦电路。

下面以 RLC 串联的正弦电路为例, 讨论它的复阻抗。如图 3-17 所示 R 、 L 、 C 串联接于正弦电路中, 选取各电压、电流的参考方向如图所示。因为是串联电路, 所以通过各元件的电流均为端电流 i 。设 i 的解析式为 $i(t) = \sqrt{2}I \sin \omega t$, 其对应的相量为 $\dot{I} = I\angle 0^\circ$, 则各元件上的电压相量分别为

$$\dot{U}_R = R\dot{I}, \quad \dot{U}_L = jX_L\dot{I}, \quad \dot{U}_C = -jX_C\dot{I}$$

根据相量形式的 KVL 得

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + jX_L\dot{I} - jX_C\dot{I} \\ &= [R + j(X_L - X_C)]\dot{I} = Z_{eq}\dot{I} \end{aligned} \quad (3-35)$$

从式 (3-35) 可以看出, RLC 串联电路的等效复阻抗 $Z_{eq} = R + j(X_L - X_C)$ 。该复阻抗又可写为

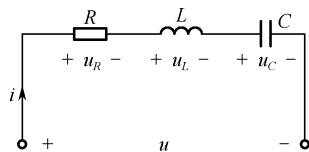


图 3-17 RLC 串联电路

$$Z_{\text{eq}} = R + j(X_L - X_C) = R + jX \quad (3-36)$$

式(3-36)也适用于任何正弦电路,是复阻抗的代数表达形式。其中, R 是复阻抗的电阻分量, $X = X_L - X_C$ 称为复阻抗的**电抗**分量。

复阻抗也可以写成极坐标形式。由复阻抗的定义式(3-34)可得复阻抗的极坐标形式为

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \theta_u}{I \angle \theta_i} = \frac{U}{I} \angle (\theta_u - \theta_i) = |Z| \angle \varphi \quad (3-37)$$

式(3-37)中

$$|Z| = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (3-38)$$

$$\varphi = \theta_u - \theta_i = \arctan \frac{X}{R} = \arctan \frac{X_L - X_C}{R} \quad (3-39)$$

$|Z|$ 为复阻抗 Z 的模,称为电路的**阻抗**。它反映了正弦电路对电流的阻碍作用大小, $|Z|$ 越大,对正弦电流的阻碍作用越大。 $|Z|$ 只与元件的参数及频率有关,与电压、电流无关。

φ 为复阻抗的辐角,称为电路的**阻抗角**。它是在关联方向下,端电压与端电流的相位差,即 $\varphi = \theta_u - \theta_i$ 。当 $X_L > X_C$ 即 $X > 0$ 时, $\varphi > 0$, 端电压超前端电流的电角度为 φ , 此时电路呈**感性**; 当 $X_L < X_C$ 即 $X < 0$ 时, $\varphi < 0$, 端电压滞后端电流的电角度为 $|\varphi|$, 此时电路呈**容性**; 当 $X_L = X_C$ 即 $X = 0$ 时, $\varphi = 0$, 端电压与端电流同相, 此时电路呈**电阻性**。

3.5.2 复导纳

复阻抗 Z 的倒数称为复导纳,用字母 Y 表示,单位是西门子(S)。有以下关系式

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \quad (3-40)$$

对于有多个(两个以上)复阻抗并联的电路,用复导纳分析较为方便。根据复导纳与复阻抗的关系,可以得到关于复导纳的相关结论,此处不再赘述。

3.5.3 复阻抗的串联与并联

1. 复阻抗的串联

RLC 串联电路推广到一般的情况,就是多个复阻抗的串联。图3-18(a)所示为多个复阻抗的串联电路,选定电流和各电压的参考方向如图所示。

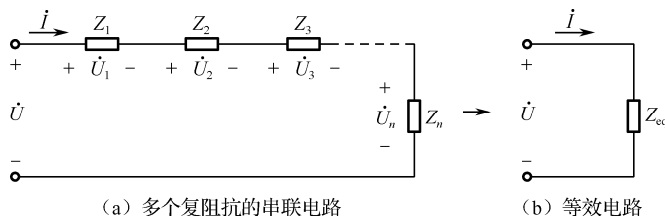


图3-18 复阻抗的串联电路及等效电路

已知复阻抗 Z_1, Z_2, \dots, Z_n , 各个复阻抗上的电压分别为 $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_n$ 。根据相量形式的KVL, 总电压 \dot{U} 为

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I} \\ &= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \dot{I} = Z_{\text{eq}} \dot{I} \end{aligned} \quad (3-41)$$

其中 Z_{eq} 为串联电路的等效复阻抗,如图3-18(b)所示,可得

$$Z_{\text{eq}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k \quad (3-42)$$

式 (3-42) 表明, 复阻抗串联时, 等效复阻抗等于各个复阻抗之和。

复阻抗串联, 分压公式仍然成立, 以两个复阻抗串联为例, 分压公式为

$$\dot{U}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U}, \quad \dot{U}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{U} \quad (3-43)$$

2. 复阻抗的并联

多个复阻抗并联时, 各并联复阻抗两端电压相等。以两个复阻抗并联为例, 如图 3-19 (a) 所示, 根据相量形式的 KCL, 得总电流的相量为

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = \frac{\dot{U}}{Z_1} + \frac{\dot{U}}{Z_2} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) \dot{U} = \frac{1}{Z_{\text{eq}}} \dot{U} \quad (3-44)$$

其中 Z_{eq} 为并联电路的等效复阻抗, 如图 3-19 (b) 所示, 有

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad \text{或} \quad Z_{\text{eq}} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3-45)$$

即复阻抗并联时, 等效复阻抗的倒数等于各个并联复阻抗倒数之和; 或者用复导纳描述为, 等效复导纳等于各个并联复导纳之和。

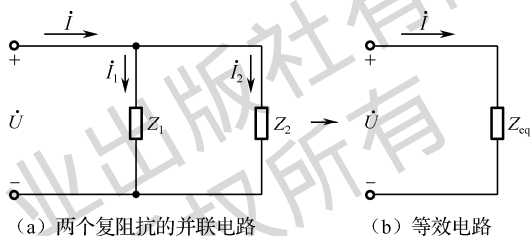


图 3-19 两个复阻抗的并联电路及等效电路

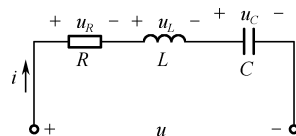
复阻抗并联, 分流公式仍然成立, 图 3-19 (a) 电路中, 分流公式为

$$\dot{i}_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{i}, \quad \dot{i}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{i} \quad (3-46)$$

复习思考题

3.5.1 题图 3.5.1 所示为 RLC 串联的正弦电路, 电压、电流参考方向如图所示, 试判断下列表达式的正误:

- (1) $U = U_R + U_L + U_C$ (); (2) $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ ();
 (3) $u = u_R + u_L + u_C$ (); (4) $U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2 - U_C^2}$ ();
 (5) $|Z| = R + (X_L - X_C)$ ();
 (6) $Z = R + j(\omega L - \omega C)$;
 (7) $L > C$, 电路为感性, $\varphi > 0$ ();
 (8) L 、 C 两参数一定, 则串联电路的性质就一定 ()。



题图 3.5.1

3.5.2 选择正确答案填在括号内。

- (1) 电阻的复阻抗 Z 应为 ()。
 (a) $Z = R \angle 45^\circ$ (b) $Z = jR$ (c) $Z = R \angle 0^\circ$
 (2) 电感的复阻抗 Z 应为 ()。
 (a) $Z = \omega L$ (b) $Z = \omega L \angle 90^\circ$ (c) $Z = \omega L \angle -90^\circ$

(3) 电容的复阻抗 Z 应为 ()。

(a) $Z = \omega C$ (b) $Z = -j\omega C$ (c) $Z = 1/j\omega C$

(4) RC 串联电路的复阻抗 Z 应为 ()。

(a) $Z = R - j\omega C$ (b) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \angle \arctan \frac{-X_C}{R}$ (c) $Z = R - 1/j\omega C$

3.5.3 已知一个 RLC 串联的正弦电路 (参看图 3.5.1), 当 $R = 3 \Omega$, $X_L = 4 \Omega$, $X_C = 8 \Omega$ 时, 电路为_____性质 (填感性、容性或阻性), 阻抗角 $\varphi =$ _____。

3.5.4 RLC 串联的正弦电路 (参看图 3.5.1):

(1) 已知 $U_R = 2 \text{ V}$, $U_L = U_C = 8 \text{ V}$, 则端电压的有效值 $U =$ _____ V ;

(2) 已知 $R = X_L = X_C = 10 \Omega$, 端电压的有效值 $U = 30 \text{ V}$, 则电阻电压的有效值 $U_R =$ _____ V 。

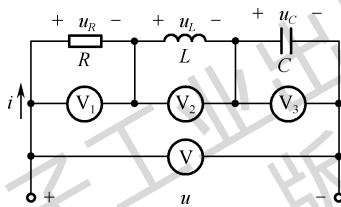
3.5.5 在题图 3.5.5 所示 RLC 串联的正弦电路中, 已知电压表 V_1 、 V_2 的读数分别为 3 V 和 8 V , 电压表 V 的读数为 5 V , 则电压表 V_3 的读数 = _____ V 。

3.5.6 判断正误:

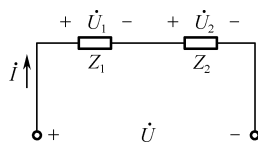
复阻抗 Z_1 、 Z_2 组成的串联正弦电路如题图 3.5.6 所示, 已知 $|Z_1| = |Z_2|$, $U = 20 \text{ V}$, 则 $U_1 = U_2$ () ; $U_1 = (1/2)U = 10 \text{ V}$ ()。

3.5.7 复阻抗 Z_1 、 Z_2 组成的串联正弦电路如题图 3.5.6 所示, 已知 $U_1 = U_2 = (1/2)U$, 则复阻抗 Z_1 、 Z_2 间的关系应为 ()。

(a) $Z_1 = Z_2$ (b) $|Z_1| = |Z_2|$ (c) $\varphi_1 = \varphi_2$ (φ_1 、 φ_2 为 Z_1 、 Z_2 的阻抗角)



题图 3.5.5



题图 3.5.6

3.6 正弦电路的相量分析法

上一节介绍了复阻抗与复导纳这两个重要的参数, 实际上正弦电路的复阻抗与复导纳是与直流电阻电路中的电阻和电导对应的, 电阻的串联分压与并联分流公式对于复阻抗的串联和并联仍然适用。不仅如此, 前面介绍的公式 $\dot{U} = Z\dot{i}$ 和 $\dot{i} = Y\dot{U}$, 与直流电阻电路中电阻的伏安关系形式上也是相同的, 故也常将这两个式子称为**欧姆定律的相量形式**。总之, 直流电阻电路的分析方法同样适用于正弦电路, 其公式在形式上是相同的。不同之处在于, 直流电阻电路的分析是纯实数的运算, 相对比较简单; 而正弦电路的分析采用的是相量分析法, 是相量的运算, 要用到复数的运算规则, 相对比较复杂。相量分析法分析正弦电路的具体步骤如下:

(1) 画出与电路的时域模型相对应的相量模型。

在电路的时域模型中, 电路元件一般用 R 、 L 、 C 等参数来表征, u 、 i 是正弦时间函数。而在相量模型中, 各元件要用其复阻抗 (或复导纳) 表示; 电路中 u 、 i 用相量表示, 参考方向不变, 电路的拓扑结构不变。

(2) 写出已知正弦电压、电流对应的相量。

(3) 根据画出的相量模型, 利用第 1 章和第 2 章中分析直流电阻电路方法, 列出电路复数代数方程进行求解。最后, 根据题目的需要, 将求出的电压、电流相量转换成对应随时间变化的解

析式。

下面通过几道例题，介绍相量分析法的具体应用。

【例 3-15】 图 3-20 (a) 所示 RLC 串联电路中，已知电源电压 $u_S(t) = 10\sqrt{2} \sin(2t) \text{ V}$ ， $R = 2 \Omega$ ， $L = 2 \text{ H}$ ， $C = 0.25 \text{ F}$ 。试用相量分析法计算电路的等效复阻抗 Z_{eq} 、电流 $i(t)$ 和电压 $u_R(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $u_C(t)$ ，做出相量图，并讨论该电路的性质。

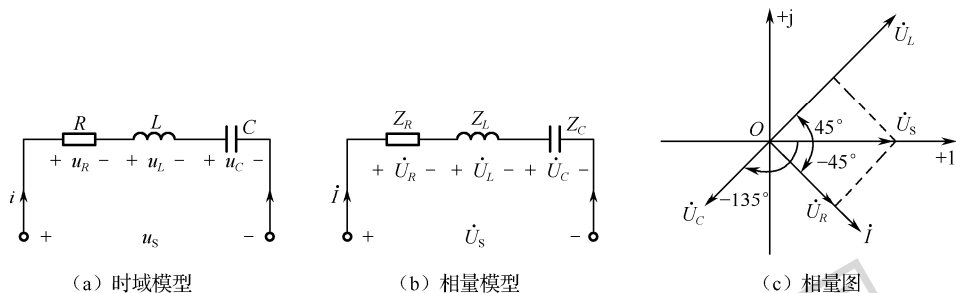


图 3-20 【例 3-15】用图

解：做出与图 3-20 (a) 所示时域模型相对应的相量模型，如图 3-20 (b) 所示。写出已知正弦电压源 u_S 的相量为

$$\dot{U}_S = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

计算电路的等效复阻抗，由式 (3-42) 得到

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq}} &= Z_R + Z_L + Z_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = 2 + j(2 \times 2) - j\frac{1}{2 \times 0.25} \\ &= 2 + j4 - j2 = 2 + j2 = 2\sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega \end{aligned}$$

根据式 (3-35)，求得端电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z_{\text{eq}}} = \frac{10\angle 0^\circ}{2\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ A}$$

由 R 、 L 、 C 各元件电压、电流的相量关系式得

$$\begin{aligned} \dot{U}_R &= R\dot{I} = 2 \times 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ = 5\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_L &= j\omega L\dot{I} = 1\angle 90^\circ \times 2 \times 2 \times 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_C &= -j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = 1\angle -90^\circ \times \frac{1}{2 \times 0.25} \times 2.5\sqrt{2}\angle -45^\circ = 5\sqrt{2}\angle -135^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

根据以上电压、电流的相量得到对应的解析式

$$\begin{aligned} i(t) &= 2.5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(2t - 45^\circ) = 5 \sin(2t - 45^\circ) \text{ A} \\ u_R(t) &= 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(2t - 45^\circ) = 10 \sin(2t - 45^\circ) \text{ V} \\ u_L(t) &= 10\sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(2t + 45^\circ) = 20 \sin(2t + 45^\circ) \text{ V} \\ u_C(t) &= 5\sqrt{2} \times \sqrt{2} \sin(2t - 135^\circ) = 10 \sin(2t - 135^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

做出相量图如图 3-20 (c) 所示。

由于本题中复阻抗的阻抗角 $\varphi = 45^\circ > 0$ ，故电路的性质为感性。

【例 3-16】 电路如图 3-21 所示，端电压为 $\dot{U} = 127\angle 0^\circ \text{ V}$ ，试求各支路电流及电压。

解：由于图 3-21 所示电路是相量模型，所以直接用相量分析法计算即可。

求解各段电路的复阻抗为

$$\begin{aligned} Z_0 &= (0.5 + j1.5) = 1.58\angle 71.6^\circ \Omega \\ Z_1 &= (8 - j8) = 11.31\angle -45^\circ \Omega \end{aligned}$$

$$Z_2 = (8 + j6.2) = 10.12 \angle 37.8^\circ \Omega$$

则电路的等效复阻抗为

$$\begin{aligned} Z_{\text{eq}} &= Z_0 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ &= Z_0 + \frac{11.31 \angle -45^\circ \times 10.12 \angle 37.8^\circ}{8 - j8 + 8 + j6.2} \\ &= Z_0 + \frac{114.5 \angle -7.2^\circ}{16.1 \angle -6.4^\circ} \\ &= Z_0 + 7.11 \angle -0.8^\circ = 0.5 + j1.5 + 7.11 - j0.1 \\ &= 7.61 + j1.4 = 7.74 \angle 10.4^\circ \Omega \end{aligned}$$

电路的总电流为

$$i = \frac{\dot{U}}{Z_{\text{eq}}} = \frac{127 \angle 0^\circ}{7.74 \angle 10.4^\circ} = 16.4 \angle -10.4^\circ \text{ A}$$

各支路电流为

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} i = \frac{10.12 \angle 37.8^\circ}{16.1 \angle -6.4^\circ} \times 16.4 \angle -10.4^\circ = 10.3 \angle 33.8^\circ \text{ A} \\ i_2 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} i = \frac{11.31 \angle -45^\circ}{16.1 \angle -6.4^\circ} \times 16.4 \angle -10.4^\circ = 11.5 \angle -49^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

各支路电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_1 i_1 = 11.31 \angle -45^\circ \times 10.3 \angle 33.8^\circ = 116.5 \angle -11.2^\circ \text{ V} \\ \dot{U}_0 &= Z_0 i = 1.58 \angle 71.6^\circ \times 16.4 \angle -10.4^\circ = 25.9 \angle 61.2^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

上面列举的两道例题属于比较简单的正弦电路的分析，下面再通过几道例题，说明如何应用直流电阻电路中的节点法、网孔法、叠加定理和戴维南定理等分析一般的正弦交流电路。

【例 3-17】 正弦电路如图 3-22 所示，已知 $\dot{U}_{S1} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ， $\dot{U}_{S2} = 100 \angle 53.1^\circ \text{ V}$ ， $R_1 = X_{L1} = X_{C3} = R_2 = X_{C2} = 5 \Omega$ ，试用节点法求图中电流 i 。

解：选取节点 b 为参考节点，则节点 a 相对于节点 b 的节点电压为 \dot{V}_a ，列节点电压方程为

$$\left(\frac{1}{R_1 + jX_{L1}} + \frac{1}{R_2 - jX_{C2}} + \frac{1}{-jX_{C3}} \right) \dot{V}_a = \frac{\dot{U}_{S1}}{R_1 + jX_{L1}} + \frac{\dot{U}_{S2}}{R_2 - jX_{C2}}$$

代入已知数据并解得

$$\dot{V}_a = (30 - j10) \text{ V}$$

则待求电流为

$$i = \frac{\dot{V}_a}{-jX_{C3}} = \frac{30 - j10}{-j5} = 2 + j6 = 6.32 \angle 71.6^\circ \text{ A}$$

【例 3-18】 图 3-23 所示为具有两个网孔的正弦交流电路。已知 $\dot{U}_{S1} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}$ ， $\dot{U}_{S2} = 100 \angle 90^\circ \text{ V}$ ， $R = 5 \Omega$ ， $X_C = 5 \Omega$ ， $X_L = 10 \Omega$ 。求各支路电流 i_1 、 i_2 、 i_3 。

解：选定网孔电流 i_a 、 i_b 及各支路电流 i_1 、 i_2 、 i_3 的参考方向如图 3-23 所示，则网孔电流方程一般形式可表示为

$$\begin{cases} Z_{11} i_a + Z_{12} i_b = \dot{U}_{S11} \\ Z_{21} i_a + Z_{22} i_b = \dot{U}_{S22} \end{cases}$$

其中，自阻抗 $Z_{11} = R - jX_C$ ， $Z_{22} = R + jX_L$ ，互阻抗 $Z_{12} = Z_{21} = -R$ ，两个网孔总的电压源分别为 $\dot{U}_{S11} = \dot{U}_{S1}$ ， $\dot{U}_{S22} = -\dot{U}_{S2}$ 。

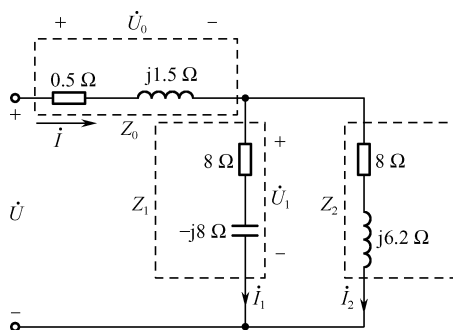


图 3-21 【例 3-16】用图

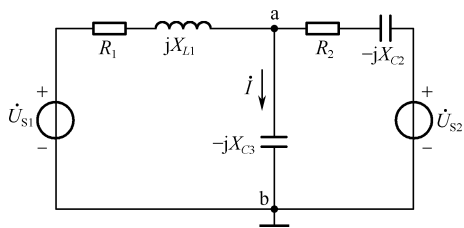


图 3-22 【例 3-17】用图

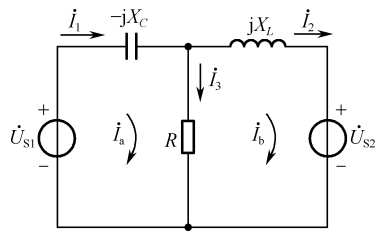


图 3-23 【例 3-18】用图

将已知数据代入上述方程中得

$$\begin{cases} (5-j5)I_a - 5I_b = 100\angle 0^\circ \\ -5I_a + (5+j10)I_b = -100\angle 90^\circ \end{cases}$$

解之，得两个网孔电流

$$\begin{aligned} \dot{I}_a &= 12 + j4 = 12.65\angle 18.4^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_b &= -4 - j8 = 8.94\angle -116.4^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

各支路电流为

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_a = 12.65\angle 18.4^\circ \text{ A}, & \dot{I}_2 &= \dot{I}_b = 8.94\angle -116.4^\circ \text{ A} \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_a - \dot{I}_b = 12 + j4 - (-4 - j8) = 16 + j12 = 20\angle 36.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

【例 3-19】图 3-24(a)所示正弦电路中，已知 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{ V}$ ， $\dot{I}_s = 2\angle 90^\circ \text{ A}$ ， $R_1 = 4 \Omega$ ， $R_2 = 3 \Omega$ ， $X_C = 4 \Omega$ ， $X_L = 8 \Omega$ 。试用叠加定理求支路电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 。

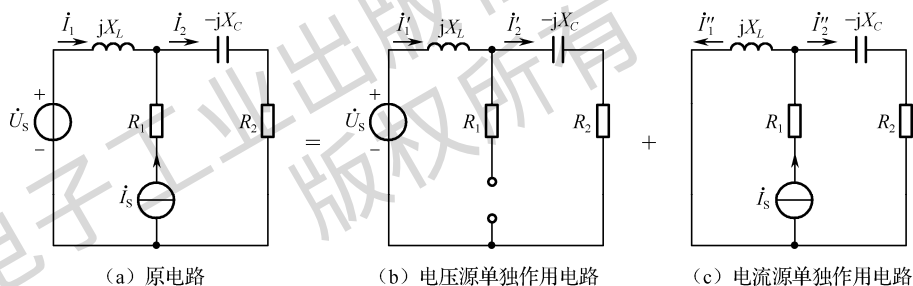


图 3-24 【例 3-19】用图

解：应用叠加定理分析正弦交流电路的步骤与直流电路相似。首先画出叠加电路图如图 3-24 所示，图 3-24 (b) 中电压源单独作用，电流源以开路代替；图 3-24 (c) 中电流源单独作用，电压源以短路代替。选定支路电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 及其分量的参考方向如图所示。

在图 3-24 (b) 中，求得 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 的第一个分量为

$$\dot{I}'_1 = \dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}_s}{jX_L - jX_C + R_2} = \frac{10\angle 0^\circ}{j8 - j4 + 3} = 2\angle -53.1^\circ \text{ A} = (1.2 - j1.6) \text{ A}$$

在图 3-24 (c) 中，求得 \dot{I}_1 、 \dot{I}_2 的第二个分量为

$$\dot{I}''_1 = \dot{I}_s \times \frac{R_2 - jX_C}{jX_L + (R_2 - jX_C)} = 2\angle 90^\circ \times \frac{3 - j4}{j8 + (3 - j4)} = 2\angle -16.2^\circ \text{ A} = (1.92 - j0.56) \text{ A}$$

$$\dot{I}''_2 = \dot{I}_s \times \frac{jX_L}{jX_L + (R_2 - jX_C)} = 2\angle 90^\circ \times \frac{j8}{j8 + (3 - j4)} = 3.2\angle 126.9^\circ \text{ A} = (-1.92 + j2.56) \text{ A}$$

根据叠加定理，支路电流 \dot{I}_1 和 \dot{I}_2 为

$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 - \dot{I}''_1 = 1.2 - j1.6 - (1.92 - j0.56) = 1.265\angle -124.7^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2 = 1.2 - j1.6 - 1.92 + j2.56 = 1.2\angle 126.9^\circ \text{ A}$$

【例 3-20】求图 3-25 (a) 所示有源二端网络的戴维南等效电路。

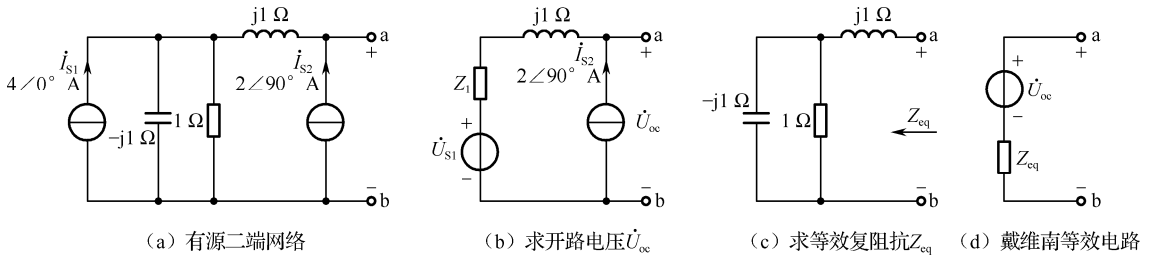


图 3-25 【例 3-20】用图

解：首先将 \dot{I}_{S1} 、 $-j1 \Omega$ 、 1Ω 的并联组合等效变换为电压源模型，如图 3-25 (b) 所示。可求得

$$Z_1 = \frac{(-j1) \times 1}{1 - j1} = \frac{1 \angle -90^\circ}{\sqrt{2} \angle -45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ = \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \Omega$$

$$\dot{U}_{S1} = Z_1 \dot{I}_{S1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle -45^\circ \times 4 \angle 0^\circ = 2\sqrt{2} \angle -45^\circ = (2 - j2) \text{ V}$$

由图 3-25 (b) 求 ab 端开路电压为

$$\begin{aligned} \dot{U}_{oc} = \dot{U}_{ab} &= (j1 + Z_1) \dot{I}_{S2} + \dot{U}_{S1} = \left(j1 + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \right) \times 2 \angle 90^\circ + (2 - j2) \\ &= 1 - j1 = \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

求等效复阻抗 Z_{eq} ，将原电路中电流源用开路代替，如图 3-25 (c) 所示。

$$Z_{eq} = Z_{ab} = j1 + \frac{(-j1) \times 1}{1 - j1} = j1 + \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \angle 45^\circ \Omega$$

求得戴维南等效电路如图 3-25 (d) 所示。

复习思考题

3.6.1 判断正误：

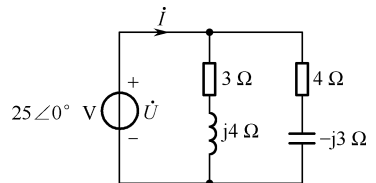
将由电阻 $R = 10 \Omega$ 、感抗 $X_L = 20 \Omega$ 构成的串联电路等效变换为由电导 G 和感纳(感抗的倒数) B_L 构成的并联电路，则 $G = 1/R = 0.1 \text{ S}$ ()， $B_L = 1/X_L = 0.05 \text{ S}$ ()。

3.6.2 由 G 、 B_L 组成的并联电路，其复导纳 $Y = 0.02 \angle 30^\circ \text{ S}$ ，将其等效变换为电阻 R 与 X_L 的串联电路，则 $R = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$ ， $X_L = \underline{\hspace{2cm}} \Omega$ 。

3.6.3 已知某正弦串联电路的等效复阻抗 $Z_{eq} = 20 + j40 \Omega$ ，则与之等效的并联电路的等效电导 $G_{eq} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ S}$ ，等效电纳(电抗 X 的倒数) $B_{eq} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ S}$ 。

3.6.4 RLC 串联的正弦电路如图 3-20 (a) 所示，已知 $R = 10 \Omega$ ， $L = 1 \text{ H}$ ， $C = 0.005 \text{ F}$ ， $u_S(t) = 100\sqrt{2} \sin(20t) \text{ V}$ 。试用相量分析法计算 $i(t)$ 、 $u_R(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $u_C(t)$ 。

3.6.5 如题图 3.6.5 所示正弦电路，试求电流 i 和电路的等效复阻抗。



题图 3.6.5

3.7 正弦交流电路的功率

在正弦电路的分析中，除了要计算电压、电流，功率的计算也非常重要。有关功率和能量的基本概念在第 1 章讨论过，但是由于正弦电路通常包含有电感、电容等储能元件，所以其功率的计算要比电阻电路的功率计算复杂，需要引入一些新的概念。

3.7.1 瞬时功率和平均功率

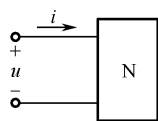


图 3-26 正弦
二端网络

图 3-26 所示二端网络工作于正弦稳态，其电压、电流采用关联方向，则该二端网络的瞬时功率表达式为

$$p(t) = u(t)i(t)$$

二端网络工作于正弦稳态的情况下，端电压和端电流是同频率的正弦量，即

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \theta_u) = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \theta_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \theta_i)$$

则二端网络的瞬时功率为

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)i(t) = 2UI \sin(\omega t + \theta_u) \sin(\omega t + \theta_i) \\ &= UI [\cos(\theta_u - \theta_i) - \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)] \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\theta_u - \varphi) \end{aligned} \quad (3-47)$$

其中， $\varphi = \theta_u - \theta_i$ 是二端网络端电压和端电流的相位差。

由式 (3-47) 可知，瞬时功率 $p(t)$ 为随时间 t 周期性变化，且有正有负，表明二端网络既吸收功率，也发出功率。一般用平均功率来表征二端网络的能量消耗情况。平均功率是指周期性变化的瞬时功率在一个周期内的平均值，用 P 表示，单位为 W (瓦)，其定义为

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \theta_u + \theta_i)] dt = UI \cos \varphi \quad (3-48)$$

平均功率又称为有功功率，它是一个重要的概念，得到了广泛使用。通常所说某个家用电器消耗多少瓦的功率，就是指它的平均功率，简称功率。

下面讨论二端网络的几种特殊情况下的平均功率。

1. 二端网络是一个电阻，或其等效阻抗为一个电阻

此时二端网络的端电压、端电流相位相同，即 $\varphi = \theta_u - \theta_i = 0$ ，则 $\cos \varphi = 1$ ， $\sin \varphi = 0$ ，式 (3-47) 变为

$$p(t) = UI - UI \cos[2(\omega t + \theta_u)]$$

可见，瞬时功率在任何时刻均大于或等于零，表明电阻始终吸收功率。此时平均功率的表达式 (3-48) 变为

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (3-49)$$

由式 (3-49) 可知，在正弦稳态中，采用电压、电流有效值后，计算电阻消耗的平均功率的公式从形式上看与直流电路中相同，但符号代表的含义不同。

2. 二端网络是一个电感或电容，或其等效阻抗为一个电抗

此时二端网络电压与电流相位为正交关系，即 $\varphi = \theta_u - \theta_i = \pm 90^\circ$ ，则 $\cos \varphi = 0$ ，式 (3-47) 变为

$$p_L(t) = -UI \sin(2\omega t + 2\theta_u)$$

$$p_C(t) = UI \sin(2\omega t + 2\theta_u)$$

由以上两式可以看出，电感或电容的瞬时功率随时间按正弦规律变化，正负值交替，一段时间内 $p(t) > 0$ ，电感或电容吸收功率；另一段时间内 $p(t) < 0$ ，电感或电容发出功率。此时平均功率表达式 (3-48) 变为

$$P = UI \cos(\pm 90^\circ) = 0 \quad (3-50)$$

式 (3-50) 说明，在正弦稳态中，储能元件电感或电容的平均功率等于零，不消耗能量，但和电源之间存在能量的交换作用，即在前半个周期吸收电源的功率并储存起来，后半周期又将

其全部释放，这种能量交换的速率用另外一种功率——无功功率来描述。

3.7.2 复功率、视在功率和无功功率

为了便于用相量来计算平均功率，引入**复功率**的概念。图 3-27 所示二端网络工作于正弦稳态，其电压、电流采用关联方向，假设电压、电流的相量表达式分别为

$$\dot{U} = U \angle \theta_u, \quad \dot{I} = I \angle \theta_i$$

电流相量的共轭复数为 $\dot{I}^* = I \angle -\theta_i$ ，则二端网络吸收的复功率为

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U \angle \theta_u \cdot I \angle -\theta_i = UI \angle (\theta_u - \theta_i) = UI \angle \varphi = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ \quad (3-51)$$

其中，复功率 \tilde{S} 的实部 $P = UI \cos \varphi$ 正是有功功率，它是二端网络吸收的平均功率。复功率 \tilde{S} 的虚部 $Q = UI \sin \varphi$ 称为**无功功率**，它反映了电源与单口网络内储能元件之间能量交换的速率，为与平均功率相区别，无功功率的单位为乏 (Var)。复功率 \tilde{S} 的模 $|\tilde{S}| = UI$ 称为**视在功率**，用 S 表示，它表征一个电气设备的功率容量，为与其他功率相区别，视在功率用伏安 (V·A) 作单位。例如，说某个发电机的容量为 100 kV·A，而不说其容量是 100 kW。显然，视在功率是二端网络所吸收平均功率的最大值。

对于 RLC 串联的正弦交流电路而言，既有耗能元件，又有储能元件。这样在电路中既有能量的消耗，又有能量的交换。也就是电路中既有有功功率，又有无功功率。

RLC 串联电路的有功功率就是电阻消耗的功率，即

$$P = U_R I = I^2 R$$

【例 3-21】 由电阻 $R = 30 \Omega$ ，电感 $L = 382 \text{ mH}$ ，电容 $C = 40 \mu\text{F}$ 组成的串联电路，接于电压 $u_S(t) = 100\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ) \text{ V}$ 的电源上，如图 3-20 (a) 所示。试求：(1) 电路的复阻抗 Z ；(2) 电路的电流 i ；(3) 各元件电压 $\dot{U}_R, \dot{U}_L, \dot{U}_C$ ；(4) 电路的功率 P, Q, S 。

解： 选定各电压、电流的参考方向一致。

(1) 电路的复阻抗

$$\begin{aligned} Z &= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 30 + j \left(314 \times 382 \times 10^{-3} - \frac{1}{314 \times 40 \times 10^{-6}} \right) \\ &= 30 + j(120 - 80) = 30 + j40 = 50 \angle \arctan \frac{4}{3} = 50 \angle 53.1^\circ \Omega \end{aligned}$$

(2) 电路的电流

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{Z} = \frac{100 \angle 45^\circ}{50 \angle 53.1^\circ} = 2 \angle -8.1^\circ \text{ A}$$

$$i(t) = 2\sqrt{2} \sin(314t - 8.1^\circ) \text{ A}$$

(3) 各元件电压

$$\dot{U}_R = R \dot{I} = 30 \times 2 \angle -8.1^\circ = 60 \angle -8.1^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L = j \omega L \dot{I} = 1 \angle 90^\circ \times 120 \times 2 \angle -8.1^\circ = 240 \angle 81.9^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I} = 1 \angle -90^\circ \times 80 \times 2 \angle -8.1^\circ = 160 \angle -98.1^\circ \text{ V}$$

(4) 电路的功率

平均功率 (有功功率)

$$P = UI \cos \varphi = 100 \times 2 \times \cos 53.1^\circ = 120 \text{ W}$$

无功功率

$$Q = UI \sin \varphi = 100 \times 2 \times \sin 53.1^\circ = 160 \text{ Var}$$

视在功率

$$S = UI = 100 \times 2 = 200 \text{ V} \cdot \text{A}$$

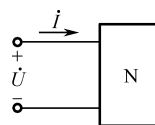


图 3-27 正弦二端网络的相量模型

3.7.3 功率因数的提高

在交流电路中，负载多为感性负载，例如常用的感应电动机、日光灯等。感性负载在工作时，接上电源后，要建立磁场，所以除了需要从电源取得有功功率，还要从电源取得建立磁场的能量，并与电源进行周期性能量交换，这从前面的理论分析中可以得知。

由平均功率的表达式 (3-48) 可见，在二端网络电压和电流有效值的乘积 UI 一定的情况下，二端网络吸收的平均功率 P 与 $\cos\varphi$ 的大小密切相关， $\cos\varphi$ 表示功率的利用程度，称为**功率因数**，记为 λ ，其表达式为

$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{P}{S} \quad (3-52)$$

功率因数介于 0 和 1 之间，当功率因数不等于 1 时，电路中发生能量交换，出现无功功率， φ 越大，功率因数越低，发电机发出的有功功率就越小，而无功功率就越大。无功功率越大，即电路中能量交换的规模越大，发电机发出的能量就不能充分为负载所吸收，其中一部分，在发电机与负载之间进行交换，这样，发电设备的容量就不能充分利用。例如，一台容量为 $100 \text{ kV}\cdot\text{A}$ 的变压器，若负载的功率因数 $\lambda = 0.9$ ，变压器能输出 90 kW 的有功功率；若功率因数 $\lambda = 0.6$ ，变压器就只能输出 60 kW 的有功功率。可见负载的功率因数低，电源设备的容量就不能得到充分利用。因此提高功率因数有很大的经济意义。

常用的交流感应电动机在额定负载时，功率因数约在 $0.8\sim 0.85$ ，轻载时只有 $0.4\sim 0.5$ ，而在空载时仅为 $0.2\sim 0.3$ ，因此选择与机械配套的电机容量时，不宜选得过大，并且应在额定情况下工作，避免或尽量减少电机的轻载或空载。不装电容器的日光灯，功率因数约在 $0.45\sim 0.6$ 。

那么怎样提高电路的功率因数呢？常用的方法是用电容器与感性负载并联，这样可使电感的磁场能量与电容的电场能量进行部分交换，从而减少了电源与负载间能量的交换，即减少了电源提供给负载的无功功率，也就提高了功率因数。但是用电容来提高功率因数时，一般补偿到 $\lambda = 0.9$ ，而不能补偿到更高，因为补偿到功率因数接近 1 时，所需的电容量大，反而不经济了。

【例 3-22】 图 3-28 (a) 所示电路表示电压源向一个感性负载供电的电路模型，试用并联电容的方法来提高负载的功率因数。

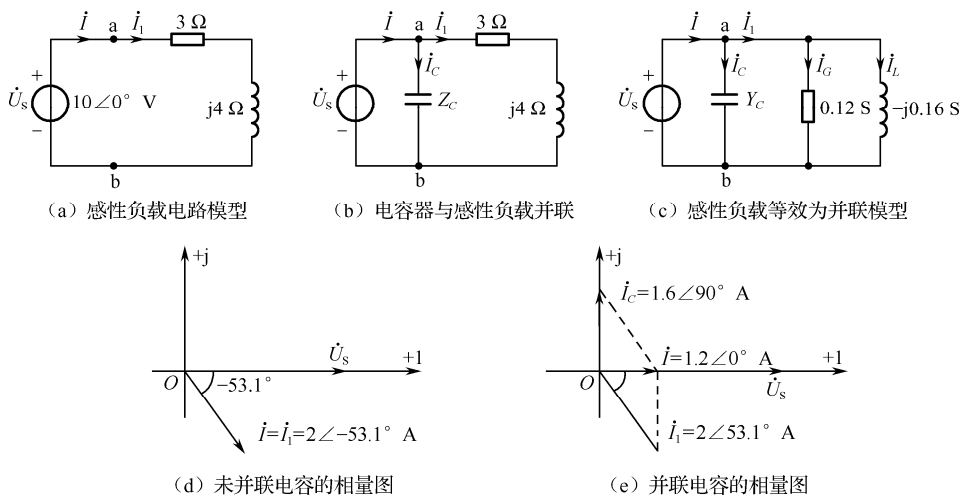


图 3-28 【例 3-22】用图

解：图 3-28 (a) 电路中的电流为

$$\dot{i} = \dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{10\angle 0^\circ}{3 + j4} = 2\angle -53.1^\circ \text{ A}$$

电压 \dot{U}_s 与电流 \dot{i} 的相位差为 53.1° ，其相量图如图 3-28 (d) 所示。

二端网络吸收的平均功率为

$$P = UI \cos \varphi = 10 \times 2 \times \cos 53.1^\circ = 12 \text{ W}$$

此时的功率因数 $\lambda = \cos \varphi = 0.6$ ，功率的利用率很低。为了提高功率因数，可以在 ab 端并联一个电容，如图 3-28 (b) 所示。为分析方便，先将电阻和电感的串联等效为电阻和电感的并联，如图 3-28 (c) 所示，其电导和电纳（电抗的倒数）值由下式确定

$$Y = G + jB = \frac{1}{3 + j4} = \frac{3 - j4}{3^2 + 4^2} = (0.12 - j0.16) \text{ S}$$

从此式可见，所并联的电容的复导纳为 $Y_C = j\omega C = +j0.16 \text{ S}$ 时，才能使二端网络呈现为纯电阻，这时电路的导纳等于纯电导，即 $Y = G = 0.12 \text{ S}$ 。也就是说，在端口并联容量为 $C = 0.16/\omega$ 的电容后，可以使功率因数提高到 1，即效率达到 100%。并联电容后，图 3-28 (b) 和图 3-28 (c) 电路端口的电流变为

$$\begin{aligned} \dot{i} &= \dot{i}_1 + \dot{i}_C = (\dot{i}_G + \dot{i}_L) + \dot{i}_C \\ &= (G\dot{U}_s + Y_L\dot{U}_s) + Y_C\dot{U}_s = [(1.2 - j1.6) + j1.6]\dot{U}_s = 1.2\angle 0^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

其相量图如图 3-28 (e) 所示，由此可见，并联电容后，不会影响电阻中的电流 $\dot{i}_1 = 2\angle -53.1^\circ \text{ A}$ 和吸收的功率 $P = 12 \text{ W}$ 。但是电容电流抵消了电感电流，使得电压 \dot{U}_s 与电流 \dot{i} 的相位相同，功率因数变为 1，电源电流 \dot{i} 的有效值由原来的 2 A 减小到现在的 1.2 A，它提高了电源的效率，可以将节省下来的电流提供给其他用户使用。

根据本题提出的方法，可以根据各用电单位的实际情况（功率因数的大小），在其电力线路的输入端自动地并联适当数值的电容器来对功率因数进行自动补偿。

3.7.4 正弦电路中负载获得最大功率的条件

在直流电路中，负载获得最大功率的条件已在 2.7 节讨论过。本节讨论在正弦电路中，若电源内阻和负载均为复阻抗，且电源复阻抗固定、负载复阻抗可变，判断此时负载获得最大功率（指平均功率）的条件。

设正弦电路如图 3-29 所示，负载复阻抗 $Z_L = R_L + jX_L$ （注意：此处各物理量的下标 L 均为负载“Load”之意，而非电感“Line”）；正弦电源为 \dot{U}_s ，其内部复阻抗为 $Z_S = R_S + jX_S$ ， \dot{U}_s 和 Z_S 也可视为线性正弦有源二端网络的戴维南等效电路的两个参数。

由图 3-29 可得电路的电流为

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_s}{(R_S + R_L) + j(X_S + X_L)}$$

其有效值

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}}$$

则负载吸收的功率为

$$P = R_L I^2 = \frac{R_L U_s^2}{(R_S + R_L)^2 + (X_S + X_L)^2}$$

显然，欲使功率 P 最大，必须分母最小。若要分母最小，只能是 $X_S + X_L = 0$ 的情况，则此时功率为

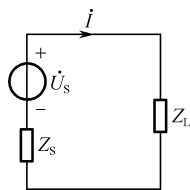


图 3-29 求负载最大功率用图

$$P = \frac{R_L U_S^2}{(R_S + R_L)^2}$$

当 R_L 可变时, 上式使 P 最大的条件就与 2.7 节讨论过的直流电路的情况相同, 即应使 $R_L = R_S$ 。综合以上分析, 若要使负载 Z_L 获得最大功率, 必须满足

$$R_L = R_S \quad \text{且} \quad X_L = -X_S \quad (3-53)$$

即 Z_L 与 Z_S 互为共轭复数, 表示为

$$Z_L = Z_S^* \quad (3-54)$$

式 (3-54) 即为正弦电路中负载获得最大功率的条件, 称为**共轭匹配**。在共轭匹配下, 负载的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_S^2}{4R_S} \quad (3-55)$$

【例 3-23】 在图 3-30 (a) 所示正弦电路中, 负载复阻抗 Z_L 为何值时, 它能获得最大功率? 最大功率为多少?

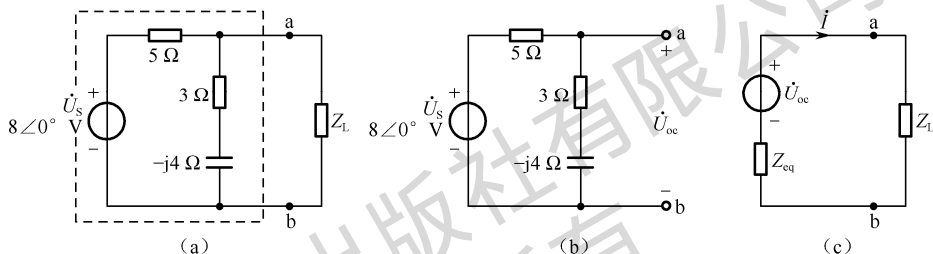


图 3-30 【例 3-23】用图

解: 根据戴维南定理, 将图 3-30 (a) 中负载 Z_L 断开, 得有源二端网络 ab 如图 3-30 (b) 所示。求 ab 端开路电压 \dot{U}_{oc}

$$\dot{U}_{oc} = \dot{U}_{ab} = \dot{U}_S \times \frac{3 - j4}{5 + (3 - j4)} = 8\angle 0^\circ \times \frac{5\angle -53.1^\circ}{4\sqrt{5}\angle -26.6^\circ} = 2\sqrt{5}\angle -26.5^\circ \text{ V}$$

求图 3-30 (b) 中有源二端网络的等效复阻抗 Z_{eq} (将电压源用短路线代替)

$$Z_{eq} = Z_{ab} = \frac{5(3 - j4)}{5 + (3 - j4)} = \frac{25\angle -53.1^\circ}{4\sqrt{5}\angle -26.6^\circ} = \frac{5}{4}\sqrt{5}\angle -26.5^\circ = \left(\frac{10}{4} - j\frac{5}{4}\right) \Omega$$

得等效电源模型如图 3-30 (c) 所示。

根据共轭匹配条件, 若使负载获得最大功率, 则其复阻抗 Z_L 应为

$$Z_L = Z_{eq}^* = \left(\frac{10}{4} + j\frac{5}{4}\right) \Omega$$

最大功率为

$$P_{\max} = \frac{U_{oc}^2}{4R_{eq}} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{4 \times \frac{10}{4}} = 2 \text{ W}$$

复习思考题

3.7.1 为什么不用串联电容器的方法提高功率因数?

3.7.2 一台额定容量为 1000 kV·A 的变压器, 如果负载功率因数为 0.6, 则这台变压器能提供 _____ kW 的平均功率; 若将功率因数提高到 0.9, 提供的平均功率为 _____ kW。

3.7.3 有一台 $U = 220 \text{ V}$ 、 $P = 40 \text{ W}$ 、 $\lambda = 0.443$ 的日光灯, 接到电压 220 V、频率 50 Hz 的正

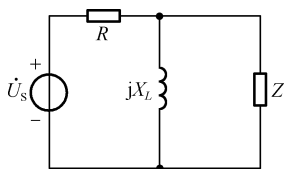
弦电源上, 则日光灯的电流 $I_1 =$ _____ A, 为了提高功率因数, 将 $C = 4.75 \mu\text{F}$ 的电容与之并联, 则并联电容后电路总电流 $I =$ _____ A, 电路功率因数 $\lambda =$ _____。

3.7.4 有一台 40 W 的扩音机, 其内阻为 8Ω , 现有 8Ω 、10 W 的低音扬声器两只, 16Ω 、20 W 的高音扬声器一只, 问应如何连接? 能不能将这三只扬声器像灯泡一样并联连接?

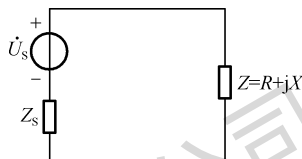
3.7.5 题图 3.7.5 所示正弦电路中, 已知电压源电压 $\dot{U}_s = 4\angle 0^\circ \text{ V}$, $R = 2 \Omega$, $X_L = 2 \Omega$, 要使负载 Z 获得最大功率, 负载复阻抗 Z 及其最大功率 P_{\max} 应分别为 ()。

(a) $Z = (1 - j1) \Omega$, $P_{\max} = 2 \text{ W}$ (b) $Z = (2 - j2) \Omega$, $P_{\max} = 2 \text{ W}$ (c) $Z = (1 - j1) \Omega$, $P_{\max} = 4 \text{ W}$

3.7.6 题图 3.7.6 所示正弦电路中, 已知电压源电压 $\dot{U}_s = 10\angle 0^\circ \text{ V}$, 其内复阻抗 $Z_s = (3 - j4) \Omega$, 要使负载 Z 获得最大功率, 其电阻 $R =$ _____ Ω , 电抗 $X =$ _____ Ω , 最大功率 $P_{\max} =$ _____ W。



题图 3.7.5



题图 3.7.6

3.8 谐振电路

在 3.5 节中讨论含 R 、 L 、 C 元件的无源二端网络时, 曾提到无源二端网络端口的等效复阻抗的电抗分量 $X = 0$ 时, 端电压与端电流同相, 二端网络呈电阻性。这是电路中的一种特殊现象, 称为**谐振现象**。按发生谐振的不同, 谐振现象分为**串联谐振**和**并联谐振**。下面首先讨论 RLC 串联谐振。

3.8.1 RLC 串联谐振电路

谐振是正弦交流电路中一种物理现象。谐振在电工和电子技术中得到广泛应用, 但它也可能给电路系统造成危害。因此, 研究电路的谐振现象, 有着重要的实际意义。

1. 谐振及谐振条件

图 3-31 电路中, R 、 L 和 C 串联接于正弦电源 u_s 上, 电路的等效复阻抗为

$$Z_{\text{eq}} = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C)$$

由上式可知, 当正弦电源 u_s 的角频率 ω 变化时, 电路的等效复阻抗 Z_{eq} 随之变化。当 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ 时, 复阻抗 $Z_{\text{eq}} = R$, 串联电路的

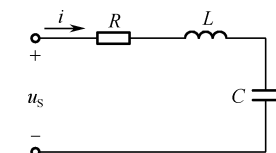


图 3-31 RLC 串联谐振电路

等效复阻抗变成了纯电阻, 端电压与端电流同相, 这时就称电路发生了串联谐振。可见, 串联电路的**谐振条件**是感抗等于容抗, 即

$$X_L = X_C \quad \text{或} \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (3-56)$$

根据谐振条件, 可得

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3-57a)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-57b)$$

ω_0 和 f_0 分别称为电路的**谐振角频率**和**谐振频率**，它由元件参数 L 和 C 确定。

RLC 串联电路在谐振时的感抗和容抗相等，其值称为谐振电路的**特性阻抗**，用 ρ 表示，即

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3-58)$$

2. 串联谐振的基本特征

(1) 谐振时，复阻抗 $Z = R$ ，呈现纯电阻，阻抗 $|Z|$ 达到最小值。

(2) 谐振时，电路中电流最大，且与外加电源电压同相。谐振时的电流为

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{\dot{U}_s}{R} \quad (\text{有效值 } I_0 = \frac{U_s}{|Z|} = \frac{U_s}{R}) \quad (3-59)$$

(3) 谐振时，电感和电容上的电压大小相等，相位相反，其大小都等于电源电压的 Q 倍，即 $U_{L0} = U_{C0} = QU_s$ 。据此，串联谐振又称为电压谐振。推导如下

$$\dot{U}_R = R\dot{i} = \dot{U}_s \quad (3-60)$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{i} = j\frac{\omega_0 L}{R}\dot{U}_s = jQ\dot{U}_s \quad (3-61)$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega_0 C}\dot{i} = -j\frac{1}{\omega_0 RC}\dot{U}_s = -jQ\dot{U}_s \quad (3-62)$$

其中

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\rho}{R} \quad (3-63)$$

Q 称为串联谐振电路的**品质因数**，它等于谐振时感抗（或容抗）与电阻的比值。品质因数是衡量电路特性的一个重要物理量，它取决于电路的参数。谐振电路的 Q 值一般在 $50 \sim 200$ 之间，因此外加电源电压即使不是很高时，谐振时电感和电容上的电压仍可能很大。在无线电技术方面，正是利用串联谐振的这一特点，将微弱的信号电压输入串联谐振电路后，在电感或电容两端可以得到一个比输入信号电压大许多倍的电压，这是十分有利的。但在电力系统中，由于电源电压比较高，如果电路在接近串联谐振的情况下工作，在电感或电容两端将出现过电压，引起电气设备的损坏。所以在电力系统中必须适当选择电路参数 L 和 C ，以避免发生谐振现象。

3. 频率特性

谐振回路中，电流、电压、复阻抗等随频率变化的特性，称为**频率特性**，它们随频率变化的曲线称为**谐振曲线**。这里以电流谐振曲线为例来看一下回路中电流幅值与信号源频率之间的关系。图 3-31 在任意频率 ω 下，回路电流为

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}_s}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

电流的有效值为

$$I = \frac{U_s}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3-64)$$

当电源电压 U_s 及元件参数 R 、 L 、 C 都不改变时，由式 (3-64) 可做出电流幅值（有效值）随频率变化的曲线，如图 3-32 所示，可以看出，当电源频率正好等于谐振频率 ω_0 时，电流的值最大，最大值为 $I_0 = U_s/R$ ；当电源频率向着 $\omega > \omega_0$ 或 $\omega < \omega_0$ 方向偏离谐振频率 ω_0 时，阻抗 $|Z|$ 逐渐增大，电流逐渐变小至零。说明只有在谐振频率附近，电路中电流才有较大值，偏离这一频率，电流值则很小，这种能够把谐振频率附近的电流选择出来的特性称为频率选择性。谐振电路频率

选择性的好坏可以用通频带宽度 Δf 来衡量。在谐振频率 f_0 两端，当电流 I 下降至谐振电流 I_0 的 $1/\sqrt{2} = 0.707$ 时，此时所覆盖的频率范围，称为**通频带**，其频率宽度 $\Delta f = f_2 - f_1$ (或 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$)，其中 f_2 、 f_1 分别称为通频带的**上限截止频率**和**下限截止频率**。 Δf 越小，谐振曲线越尖锐，表明电路的频率选择性越好。

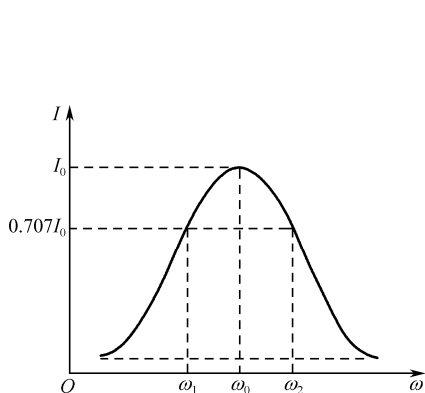


图 3-32 串联谐振电流的谐振曲线

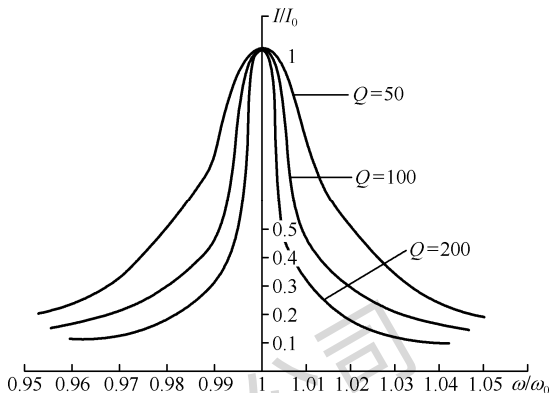


图 3-33 串联谐振电流的通用谐振曲线

通频带与品质因数之间有以下关系

$$\Delta f = \frac{1}{Q} f_0 \left(\Delta\omega = \frac{1}{Q} \omega_0 \right) \quad (3-65)$$

可见，通频带与谐振电路的品质因数 Q 成反比， Q 越高通频带越窄，频率选择性越好。所以说，品质因数 Q 是衡量谐振回路频率选择性的参数。

以 I/I_0 为纵坐标，以 ω/ω_0 为横坐标画出不同 Q 值下电流的谐振曲线，如图 3-33 所示，这种谐振曲线又叫通用谐振曲线。

【例 3-24】 电路如图 3-34 所示。已知 $u_s(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t)$ V。求：(1) 频率 ω 为何值时，电路发生谐振。(2) 电路谐振时， U_L 和 U_C 为何值。(3) 通频带 Δf 。

解：(1) 电压源的角频率应为

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \times 10^{-8}}} = 10^6 \text{ rad/s}$$

(2) 电路的品质因数为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10^6 \times 0.1 \times 10^{-3}}{1} = 100$$

则

$$U_L = U_C = QU_s = 100 \times 10 = 1000 \text{ V}$$

$$(3) \quad \Delta f = \frac{1}{Q} f_0 = \frac{1}{100} \times \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 1.6 \text{ kHz}$$

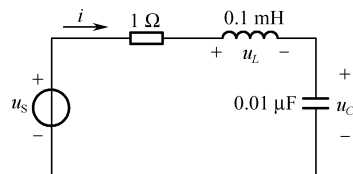


图 3-34 【例 3-24】电路

【例 3-25】 串联谐振电路的谐振频率 $f_0 = 800 \text{ kHz}$ ，回路电阻 $R = 10 \Omega$ ，要求回路的通频带 $\Delta f = 10^4 \text{ Hz}$ ，试求回路的品质因数 Q 、电感 L 和电容 C 。

解：由式 (3-65) 可得

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{800 \times 10^3}{10^4} = 80$$

因为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}$$

所以

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{80 \times 10}{2 \times 3.14 \times 800 \times 10^3} = 159 \times 10^{-6} \text{ H} = 159 \mu\text{H}$$

$$C = \frac{1}{\omega_0 R Q} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 800 \times 10^3 \times 10 \times 80} = 249 \times 10^{-12} \text{ F} = 249 \text{ pF}$$

【例 3-26】 由 $L = 200 \mu\text{H}$ 、 $C = 400 \text{ pF}$ 及 $R = 10 \Omega$ 组成的串联回路，试求其通频带 Δf 。

解：

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times \sqrt{200 \times 10^{-6} \times 400 \times 10^{-12}}} = 563 \times 10^3 \text{ Hz} = 563 \text{ kHz}$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{200 \times 10^{-6}}{400 \times 10^{-12}}}}{10} = 70.7$$

所以通频带

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{563 \times 10^3}{70.7} = 7.96 \text{ kHz}$$

3.8.2 RL-C 并联谐振电路

串联谐振电路适用于信号源内阻比较小的情况，如果信号源内阻较大，串联回路的品质因数 Q 将很低，致使谐振电路的选频特性变坏，而并联谐振电路则适用于高内阻信号源的情况。

1. 谐振条件

在实际工程中经常遇到如图 3-35 所示的 $RL-C$ 并联谐振电路。其中 R 通常为 LC 回路总的损耗电阻。电路的等效复阻抗为

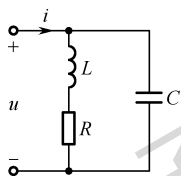


图 3-35 $RL-C$ 并联谐振电路

$$Z_{\text{eq}} = (R + j\omega L) // \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R + j\omega L)}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (3-66)$$

由于实际中电阻 R 一般都很小，满足 $R \ll \omega L$ ，因此式 (3-66) 中可以忽略分子中的 R ，但分母中的 R 不能忽略，因为 $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ 的值可能很小，甚至为零。

这样式 (3-66) 可以写为

$$Z_{\text{eq}} \approx \frac{\frac{L}{C}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{\frac{CR}{L} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} \quad (3-67)$$

即复导纳 Y 为

$$Y = \frac{CR}{L} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad (3-68)$$

式 (3-68) 意味着数值为 $\frac{L}{CR}$ 的电阻和电感 L 以及电容 C 并联，据此可画出图 3-35 所示 $RL-C$ 并联谐振电路的并联等效电路，如图 3-36 所示。

由式 (3-67) 可以看出，当 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ 时，并联电路的等效复阻抗 $Z_{\text{eq}} = L/CR$ ，是一个纯电阻，这时就称电路发生了并联谐振。可见，并联电路的谐振条件为 $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ ，即容纳等于感纳。由此推得并联谐振的谐振角

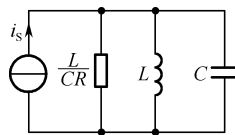


图 3-36 图 3-35 的等效电路

频率和谐振频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3-69)$$

需要注意的是，式(3-69)成立的条件是 $R \ll \omega L$ ，此时电路的品质因数 $Q \gg 1$ ，而电子技术中使用的并联谐振电路通常都能满足 $Q \gg 1$ 的条件。可见，当满足 $Q \gg 1$ 时，并联谐振电路的谐振频率就和串联谐振电路的谐振频率近似相等。

2. 并联谐振的基本特征

(1) 在 $Q \gg 1$ 的条件下，电路的阻抗最大，导纳最小。

(2) 当电源为电流源，且为并联谐振时，由于谐振阻抗最大，故回路端电压为最大。

(3) 谐振时，流过电感和电容上的电流大小近似相等，相位相反，其大小为端口总电流的 Q 倍，即 $I_{C0} = I_{L0} \approx QI_S$ 。 Q 称为并联谐振电路的品质因数，其表达式为

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (3-70)$$

可见谐振时电感和电容支路上的电流大小相等，且很可能远远大于端电流，所以并联谐振又叫电流谐振。

【例 3-27】 在图 3-37 (a) 所示电路中，已知电流源 $i_S(t) = 2\sqrt{2} \sin(\omega t)$ mA，其内阻 $R_S = 2 \text{ k}\Omega$ ，试求电路发生谐振时并联电路的端电压 U_0 和电容支路电流 I_{C0} 。

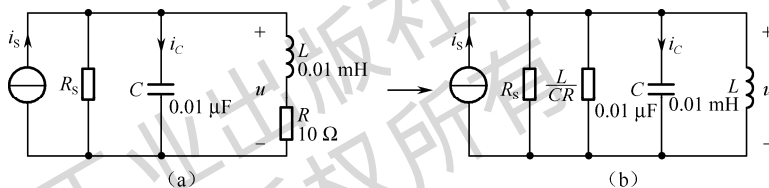


图 3-37 【例 3-27】用图

解：将图 3-37 (a) 等效为图 3-37 (b)，则电路发生谐振时，谐振角频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \times 10^{-3} \times 0.01 \times 10^{-6}}} = 10^6 \text{ rad/s}$$

等效复阻抗

$$Z_{\text{eq}} = \frac{L}{CR} = \frac{0.1 \times 10^{-3}}{5 \times 0.01 \times 10^{-6}} = 2 \text{ k}\Omega$$

并联电路的端电压

$$U_0 = \frac{R_S}{R_S + Z_{\text{eq}}} \times I_S \times Z_{\text{eq}} = \frac{2}{2+2} \times 2 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^3 = 2 \text{ V}$$

电感、电容支路电流

$$I_{C0} = \omega_0 C U_0 = 10^6 \times 0.01 \times 10^{-6} \times 2 = 0.02 \text{ A} = 20 \text{ mA}$$

复习思考题

3.8.1 RLC 串联电路的谐振条件是_____，谐振频率 $f_0 =$ _____。

3.8.2 串联谐振又称_____谐振，基本特征是_____、_____、_____；并联谐振又称_____谐振，基本特征是_____、_____、_____。

3.8.3 将 RLC 串联电路接于有效值 $U = 1 \text{ V}$ 的信号源上，调节电容 C 。当 $C = 1000 \text{ pF}$ 时，测得电路电流达到最大值 20 mA ，此时电容两端电压为 100 V ，则电路的电阻 $R =$ _____ Ω ，电感

$L = \underline{\hspace{2cm}}$ mH, 电路的品质因数 $Q = \underline{\hspace{2cm}}$, 谐振频率 $f_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3.8.4 对于图 3-35 所示 $RL-C$ 并联谐振电路, 当外加电压角频率 $\omega < \omega_0$ 或 $\omega > \omega_0$ (ω_0 为电路的谐振角频率) 时, 电路各呈 (填容性、感性或阻性)? 若电路处于谐振状态, 在增大或减小线圈内阻 R 时, 电路性质是否将发生变化?

3.9 三相电路

本章前面研究的正弦交流电路, 每个电源都只有两个输出端子, 用来输出一个电流或电压, 习惯上称这种电路为单相交流电路。但在工农业生产中常会遇到“多相制”的交流电路, 多相制电路是由多相电源供电的电路。多相制电路以相的数目来分, 可分为两相、三相、六相等。在多相制中, 三相制有很多优点, 所以它的应用最为广泛。目前世界上工农业和民用电力系统的电能几乎都是由三相电源提供的, 日常生活中所用的单相交流电, 也是取自三相交流电的一相。

3.9.1 对称三相电源

那么什么是三相交流电源呢? 简单而言, 三相交流电源是三个单相交流电源按一定方式进行的组合。三相供电系统的三相电源是三相电动机。图 3-38 所示是三相电动机的结构示意图, 它有定子和转子两大部分。定子铁芯的内圆周的槽中对称安放三个绕组(线圈) AX、BY 和 CZ。A、B、C 为始端; X、Y、Z 为末端。三个绕组在空间上彼此间隔 120° 。转子是旋转的电磁铁。当转子恒速旋转时, AX、BY、CZ 三个绕组的两端将分别感应出振幅相等、频率相同的三个正弦电压 $u_A(t)$ 、 $u_B(t)$ 、 $u_C(t)$ 。如果指定它们的参考方向都由始端指向末端, 则它们的初相彼此相差 120° 。若以 \dot{U}_A 作为参考相量, 则这三个电压相量为

$$\dot{U}_A = U \angle 0^\circ, \quad \dot{U}_B = U \angle -120^\circ, \quad \dot{U}_C = U \angle 120^\circ \quad (3-71)$$

它们的相量图和波形图分别如图 3-39 (a)、图 3-39 (b) 所示。像这样由三个振幅相等、频率相同、相位彼此相差 120° 的三个单相正弦电源组合而成的电源称为对称三相正弦电源, 简称**对称三相电源**。其中的每个单相正弦电源分别称为 A 相电、B 相电和 C 相电。在工厂, 通常在电动机的三相引出线和变、配电所中的三相母线上涂以黄、绿、红三种颜色, 分别表示 A、B、C 三相。三相电源的各相电压经过正峰值的先后次序, 称为三相电压的**相序**。若上述三相电压的顺序是 A-B-C-A, 则称为**正序**, 若为 A-C-B-A, 则称为**负序**。式 (3-71) 就是正序时三相电压的相量表达式。工程上通用的相序是正序, 如果不加说明, 都是指的这种相序。用户可以改变三相电源与三相电动机的连接方式来改变相序, 从而改变三相电动机的旋转方向。

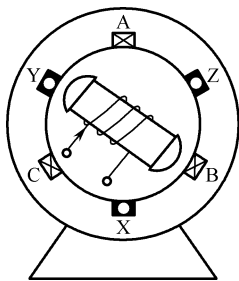
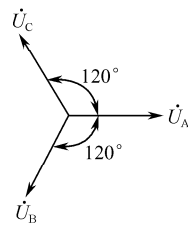
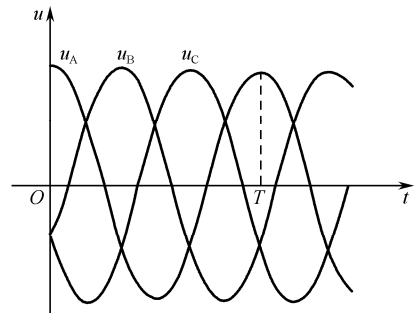


图 3-38 三相电动机的结构示意图



(a) 相量图



(b) 波形图

图 3-39 对称三相电源的相量图和波形图

3.9.2 三相电源的连接

三相电动机的绕组共有 6 个端子，在实际应用中并不是分别引出和负载相连接的，而是连接成两种最基本的形式，即星形连接和三角形连接，从而以较少的出线为负载供电。

1. 星形连接

将三相电源的每一个绕组的末端 X、Y、Z 连接在一起，组成一个公共点 N，对外形成 A、B、C、N 四个端子，这种连接形式称为三相电源的**星形连接**（又称 Y 形连接），如图 3-40（a）所示。

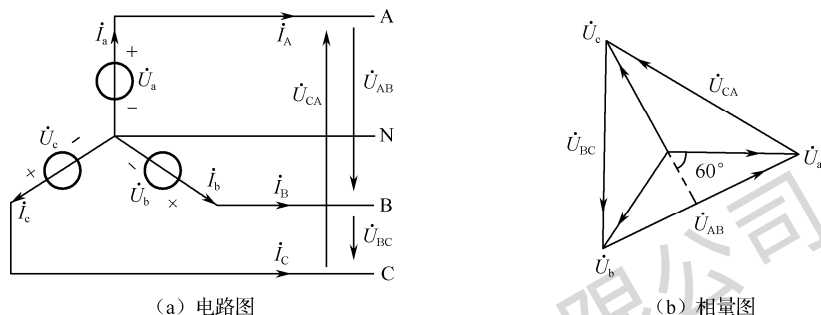


图 3-40 三相电源的星形连接

从三相电源的始端 A、B、C 引出的导线称为**端线**或**火线**；从中点 N 引出的导线称为**中线**或**零线**。流出端线的电流称为**线电流**，而每相绕组中的电流称为**相电流**。显然，图 3-40（a）中 I_A 、 I_B 、 I_C 为线电流，而 I_a 、 I_b 、 I_c 为相电流。端线与端线间的电压称为**线电压**，依相序分别为 U_{AB} 、 U_{BC} 、 U_{CA} ；每相绕组两端的电压称为**相电压**，分别记为 U_a 、 U_b 、 U_c 。从图 3-40（a）可知，星形连接时，线电流与相电流的关系为

$$I_A = I_a, \quad I_B = I_b, \quad I_C = I_c \quad (3-72)$$

即三相电源为星形连接时，线电流和对应的相电流相等。

在图 3-40（a）所示电路中，根据相量形式的 KVL，得线电压与相电压的关系为

$$U_{AB} = U_a - U_b, \quad U_{BC} = U_b - U_c, \quad U_{CA} = U_c - U_a \quad (3-73)$$

根据式（3-73），选相电压 U_a 为参考正弦量，则可做出对称三相电源线电压和相电压的相量图，如图 3-40（b）所示。从图中可以看出，三相电源为星形连接时，线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍，相位超前对应的相电压 30° 。若用 U_L 表示线电压的有效值，用 U_p 表示相电压的有效值，则有

$$U_L = \sqrt{3}U_p \quad (3-74)$$

由图 3-40（b）所示相量图还可以看出，三个线电压与相电压一样，也具有对称性。它们满足

$$U_a + U_b + U_c = 0 \quad (3-75)$$

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = 0 \quad (3-76)$$

需要强调的是，三个相电压只有在对称时它们的和才为零，不对称时它们的和不为零，而三个线电压之和则不论对称与否均为零。这是因为

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = U_A - U_B + U_B - U_C + U_C - U_A = 0$$

图 3-40（a）所示的供电方式称为**三相四线制**，如果没有中线，就称为**三相三线制**。因为对称三相电源的相电压对称，所以在三相四线制的低压配电系统中，可以得到两种不同数值的电压，即相电压 220 V 与线电压 380 V。一般家用电器及电子仪器用 220 V，三相负载用 380 V。

2. 三角形连接

对称三相电源可以采用三角形连接（又称 Δ 形连接），它是将三相电源各相的始端和末端依次相连，再由 A、B、C 引出三根端线与负载相连，如图 3-41 所示。

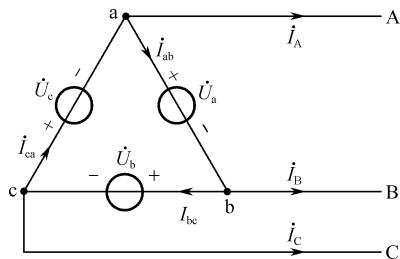


图 3-41 三相电源的三角形连接

三相电源为三角形连接时，其线电压和相电压相等，线电流等于相电流的 $\sqrt{3}$ 倍，相位滞后对应的相电流 30° 。这些结论请读者参考星形连接自行证明。

需要注意的是，由于电动机每相绕组本身的阻抗较小，所以当对称三相电源连接成三角形时，其闭合回路内的阻抗并不大。通常因回路内 $U_A + U_B + U_C = 0$ ，所以在负载断开时电源绕组内并无电流。如果三相电压不对称，或者虽然对称，但有一相接反，则 $U_A + U_B + U_C \neq 0$ ，即使外部没有负载，闭合回路内仍有很大的电流，这将使绕组过热，甚至烧毁。所以三相电源为三角形连接时必须严格按照每相的末端与次一相的始端连接。在判断不清时，应保留最后两端不接（例如 Z 端与 A 端），成为开口三角形，再用电压表测量开口处电压（例如 U_{AZ} ），如果读数为零，表示接法正确，再接成封闭三角形。

3. 三相电源和负载的连接

目前，我国电力系统的供电方式均采用三相三线制或三相四线制。用户用电实行统一的技术规定：额定频率 50 Hz，额定线电压 380 V、相电压 220 V。电力负载可分为单相负载和三相负载，三相负载又有星形连接和三角形连接。结合电源系统，三相电路的连接主要有以下几种方式。

(1) 单相负载

单相负载主要包括照明负载、生活用电负载及一些单相设备。单相负载常采用三相中引出一相的供电方式。为保证各个单相负载电压稳定，各单相负载均以并联形式接入电路。在单相负载较大时，如大型居民楼供电，可将所有单相负载平分分为三组，分别接入 A、B、C 三相电路，如图 3-42 所示，以保证三相负载尽可能平衡，提高安全供电质量及供电效率。

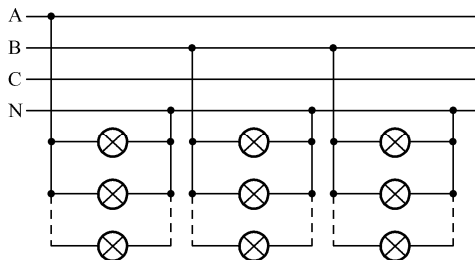


图 3-42 单相负载的连接

(2) 三相负载

三相负载主要是一些电力负载及工业负载。三相负载的连接方式有 Y 形连接和 Δ 形连接。当三相负载中各相负载都相同，即 $Z_A = Z_B = Z_C = Z = |Z| \angle \varphi$ 时，称为**三相对称负载**，否则，称为**三相不对称负载**。因为三相电源也有两种连接方式，所以它们可以组成以下几种三相电路：三相三线制的 Y-Y 形连接、三相四线制的 Y-Y 形连接、Y- Δ 形连接、 Δ -Y 形连接和 Δ - Δ 形连接等，如图 3-43 所示。

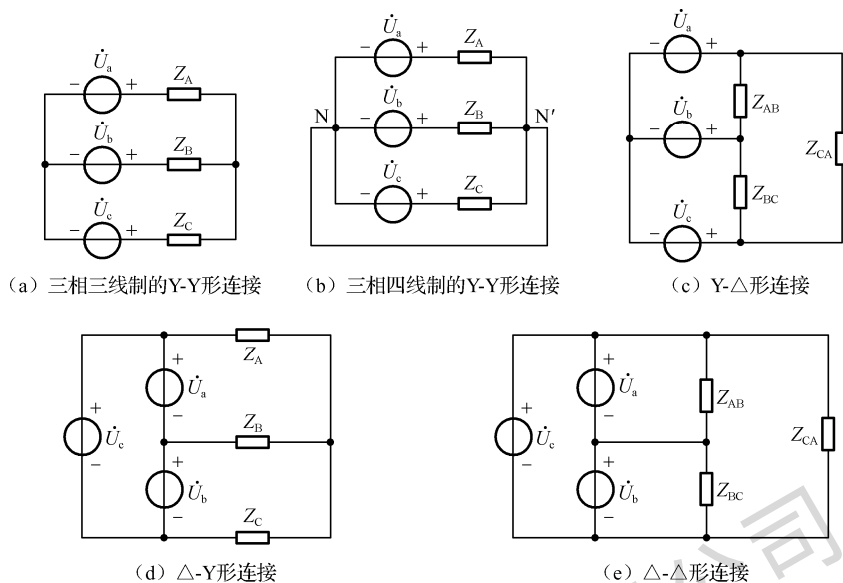


图 3-43 三相负载的连接方式

3.9.3 三相电路的计算

三相电路由于电源和负载的连接方式较多，负载又分为单相、三相对称、三相不对称等，因而计算时需考虑的问题也较多。本节仅对对称三相电路（三相对称电源和三相对称负载相连组成的电路）进行分析。对称三相电路在分析计算时，只需计算一相就行了，其他两相中的量可按对称条件直接写出。这种方法可称为**一相计算法**。至于单相负载和三相不对称负载构成的电路，可用正弦电路的一般分析方法进行分析。

对于图 3-43 (b) 所示的 Y-Y 形连接的三相四线制对称三相电路，列出电路的节点电压方程，并代入式 (3-75) 得到

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\frac{\dot{U}_a}{Z} + \frac{\dot{U}_b}{Z} + \frac{\dot{U}_c}{Z}}{\frac{3}{Z} + \frac{1}{Z_N}} = \frac{\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c}{\frac{3}{Z} + \frac{1}{Z_N}} = 0$$

于是可得中线电流

$$\dot{I}_N = 0$$

既然中线电流为零，则在电路中取消中线也不会改变电路中电压、电流关系。所以，如果星形连接中负载对称，可不需要中线。例如，三相电动机就是一种对称三相负载，它只需引出三根线接到电源三根端线中即可正常工作。无中线的三相电路如图 3-43 (a) 所示，称为三相三线制电路。

【例 3-28】 今有对称三相电路，负载为星形连接，设每相负载的电阻 $R = 12 \Omega$ ，感抗 $X_L = 16 \Omega$ ，电源线电压 $\dot{U}_{AB} = 380 \angle 30^\circ \text{ V}$ 。要求画出电路图，并求每相负载上的电流。

解：由已知条件可以画出对称三相电路如图 3-44 所示，是三相四线制的 Y-Y 形连接。根据星形连接的对称三相电源的线、相电压关系可得相电压 \dot{U}_a 为

$$\dot{U}_a = \frac{380}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ - 30^\circ = 220 \angle 0^\circ \text{ V}$$

每相负载的复阻抗

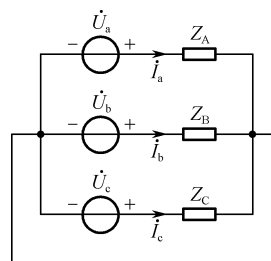


图 3-44 【例 3-28】用图

$$Z_A = Z_B = Z_C = R + jX_L = 12 + j16 = 20\angle 53.1^\circ \Omega$$

通过 Z_A 负载的相电流为

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{Z_A} = \frac{220\angle 0^\circ}{20\angle 53.1^\circ} = 11\angle -53.1^\circ \text{ A}$$

采用一相算法，根据对称性可推出其余两相电流为

$$\dot{I}_b = 11\angle -53.1^\circ - 120^\circ = 11\angle -173.1^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = 11\angle -53.1^\circ + 120^\circ = 11\angle 66.9^\circ \text{ A}$$

【例 3-29】 三相四线制中的负载为纯电阻， $R_A = 10 \Omega$ ， $R_B = 5 \Omega$ ， $R_C = 2 \Omega$ ，对称三相电源的相电压为 220 V，中线阻抗 $Z_N = 0$ ，试求各相负载和中线的电流。

解：设以相电压 \dot{U}_a 为参考正弦量，则各相电压为

$$\dot{U}_a = 220\angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_b = 220\angle -120^\circ \text{ V}, \quad \dot{U}_c = 220\angle 120^\circ \text{ V}$$

则各相负载上的电流为

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{R_A} = \frac{220\angle 0^\circ}{10} = 22\angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{R_B} = \frac{220\angle -120^\circ}{5} = 44\angle -120^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{R_C} = \frac{220\angle 120^\circ}{2} = 110\angle 120^\circ \text{ A}$$

根据相量形式的 KCL 得中线电流为

$$\begin{aligned} \dot{I}_N &= \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 22\angle 0^\circ + 44\angle -120^\circ + 110\angle 120^\circ \\ &= 22 + (-22 - j22\sqrt{3}) + (-55 + j55\sqrt{3}) = -55 + j33\sqrt{3} \approx 79.4\angle 133.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

【例 3-30】 图 3-45 所示电路中，已知线电压 $u_{AB}(t) = 220\sqrt{2}\sin(314t) \text{ V}$ ， $Z = 10\sqrt{2}\angle 60^\circ \Omega$ ，试求负载上的相电流和线电流。

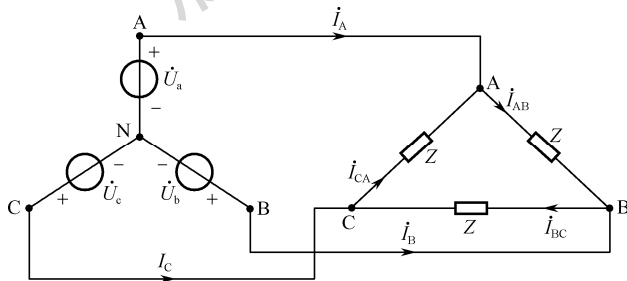


图 3-45 【例 3-30】用图

解：三个相电流为

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{Z} = \frac{220\angle 0^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z} = \frac{220\angle -120^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle -180^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z} = \frac{220\angle 120^\circ}{10\sqrt{2}\angle 60^\circ} = 15.56\angle 60^\circ \text{ A}$$

此时三个线电流 \dot{I}_A 、 \dot{I}_B 、 \dot{I}_C 为

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 15.56\angle -60^\circ - 15.56\angle 60^\circ = \sqrt{3}\dot{I}_{AB}\angle -30^\circ = 15.56\sqrt{3}\angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 15.56 \angle -180^\circ - 15.56 \angle -60^\circ = \sqrt{3} \dot{I}_{BC} \angle -30^\circ = 15.56\sqrt{3} \angle 150^\circ \text{ A}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = 15.56 \angle 60^\circ - 15.56 \angle -180^\circ = \sqrt{3} \dot{I}_{CA} \angle -30^\circ = 15.56\sqrt{3} \angle 30^\circ \text{ A}$$

【例 3-31】 已知一个对称三角形负载，接入线电压为 380 V 的对称三相电源中，测出线电流为 15 A，试求每相负载的阻抗。

解：此题可参照图 3-45，每相负载的相电流为

$$I_P = \frac{1}{\sqrt{3}} I_L = \frac{15}{\sqrt{3}} \approx 8.66 \text{ A}$$

因负载所加电压为线电压 380 V，故 $I_P = \frac{U}{|Z|}$ ，所以每相负载的阻抗为

$$|Z| = \frac{U}{I_P} = \frac{380}{8.66} = 43.9 \Omega$$

3.9.4 三相电路的功率

三相电路的总功率，等于三相负载各相的功率之和，即

$$P = P_A + P_B + P_C \quad (3-77)$$

对于三相对称负载，各相电压、相电流大小相等，阻抗角相同，故各相的有功功率是相等的，即

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C = 3 U_P I_P \cos \varphi$$

其中， U_P 是相电压的有效值， I_P 是相电流的有效值， φ 为 U_P 与 I_P 的相位差， $\cos \varphi$ 是功率因数。由于设备铭牌中给出的电压、电流均是指额定线电压 U_N 和额定线电流 I_N ，故无论是 Y 形连接还是 Δ 形连接，三相电路的有功功率的常用计算公式都可表示为

$$P = 3 U_P I_P \cos \varphi = 3 \frac{U_N I_N}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_N I_N \cos \varphi \quad (3-78)$$

同理，三相电路的无功功率为

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = 3 U_P I_P \sin \varphi = \sqrt{3} U_N I_N \sin \varphi \quad (3-79)$$

三相电路的视在功率为

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} U_N I_N \quad (3-80)$$

测量三相电路的功率，对于三相四线制，应对各相分别测量，通过求和得到三相电路的总功率，如图 3-46 所示；对于三相三线制，可用两瓦计法，如图 3-47 所示。

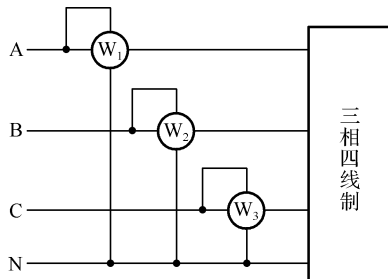


图 3-46 三相四线制功率的测量

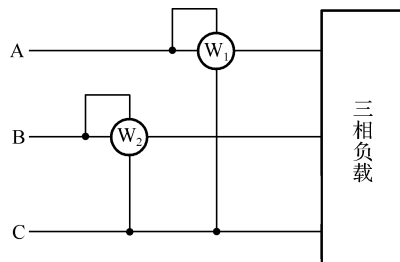


图 3-47 两瓦计法测量三相功率

两瓦计法是用两个功率表来测量三相功率。具体接线方法是：两个功率表的电流线圈分别接入任意两相，把电压线圈、电流线圈各自的同名端相连，两个电压线圈的异名端接在空相（第三相）上，则两个功率表读数之和即为三相功率。

【例 3-32】 一台三相电动机，额定功率 $P_N = 75 \text{ kW}$ ， $U_N = 3000 \text{ V}$ ， $\cos \varphi_N = 0.85$ ，效率 $\eta_N = 0.82$ ，

试求额定状态运行时，电动机的电流 I_N 为多少？电动机的有功功率、无功功率及视在功率各为多少？

解：电动机的额定功率 P_N 是指机轴上输出的机械功率，则电动机的有功功率 P 为

$$P = \frac{P_N}{\eta_N} = \frac{75}{0.82} = 91.5 \text{ kW}$$

由于

$$P_N = \sqrt{3}U_N I_N \cos\varphi_N \eta_N$$

故电动机的电流 I_N 为

$$I_N = \frac{P_N}{\sqrt{3}U_N \cos\varphi_N \eta_N} = \frac{75 \times 10^3}{\sqrt{3} \times 3000 \times 0.85 \times 0.82} = 20.71 \text{ A}$$

电动机的视在功率为

$$S = \sqrt{3}U_N I_N = \sqrt{3} \times 3000 \times 20.71 = 107609 \text{ V} \cdot \text{A} = 107.6 \text{ kV} \cdot \text{A}$$

电动机的无功功率为

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{107.6^2 - 91.5^2} = 56.6 \text{ kVar}$$

复习思考题

3.9.1 一个对称三相电源接成 Y 形连接，已知相电压为 220 V，则线电压应为多少？如果有一相接反了（始端、末端颠倒了），结果会怎样？试画出此错误接法的相量图。如果有两相接反了，结果怎样？三相接反了呢？

3.9.2 已知三相电源的三个相电压相量和等于零，它一定是对称的吗？请举例说明。

3.9.3 Δ 形连接的对称三相电源，如果有一相接反了，结果会怎样，为什么？

3.9.4 线电压为 380 V 的对称三相四线制电路中，对称 Y 形连接的负载，每相负载的复阻抗 $Z = 30 + j40 \Omega$ ，试画出该三相电路，并求负载的相电流和中线电流，并画相量图。

3.9.5 对称 Δ 形连接的负载，每相负载的复阻抗 $Z = 160 + j120 \Omega$ ，接到线电压为 380 V 的对称三相电源上，试画出该三相电路，并求相电流和线电流。

3.9.6 Y 形连接的三相负载，其各相负载阻值分别为 $R_A = 5 \Omega$ ， $R_B = 10 \Omega$ ， $R_C = 20 \Omega$ ，将其接到线电压 $U_L = 380 \text{ V}$ 的对称三相电源上，试画出该三相电路，并求各相负载电流。

本章小结

(1) 正弦交流电的大小和方向随时间不断变化，即存在瞬时值，反映瞬时值随时间变化规律的式子称为正弦电的瞬时值表达式，也称解析式。正弦量有三个要素，振幅、角频率和初相。两个同频率正弦量的相位之差称相位差，通常用相位差来描述两个同频率正弦量的位置关系。

(2) 为便于正弦电路的计算，引入正弦量的相量表示法。相量表示法实际上是用一个复数去表示该正弦量，但复数本身并不等于正弦量。相量图是将同频率正弦量画在同一复平面内的图形。

(3) 电阻、电容、电感各元件电压、电流的相量关系式分别为

$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R \quad \dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}_C \quad \dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L$$

(4) 正弦交流电路的计算采用相量分析法。以 RLC 串联电路为例，其复阻抗为

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j(X_L - X_C) = R + jX$$

端电压与端电流的相量关系式为

$$\dot{U} = Zi$$

(5) 正弦交流电路中不同功率有不同含义：瞬时功率，用来表示不同时刻正弦电的功率；平均功率（有功功率），用来表示元件的耗电情况，单位是 W；无功功率，用来表示储能元件与电源之间能量交换的速率，单位是 Var；视在功率，是反映电气设备的功率容量，单位是 V·A。

(6) 谐振是正弦交流电路中的一种物理现象，它在电工和电子技术中得到广泛应用，但它也可能给电路系统造成危害。因此，研究电路的谐振现象，有着重要的实际意义。谐振电路的谐振条件及谐振时电路的特征是本部分的重点。

(7) 由三相电源供电的电路，称为三相电路。对称三相电源的电压是频率相同、相位相差 120° 的正弦电压。三相电源有 Y 形和 Δ 形两种连接方式，三相负载也有以上两种连接方式。由对称三相电源和对称三相负载组成的电路称为对称三相电路。对称三相电路的计算依据的是单相正弦电路的相量分析法以及三相电路的对称性。

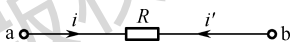
习题 3

3-1 已知正弦电压和电流为 $u(t) = 311 \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$ V, $i(t) = -10\sqrt{2} \sin\left(50\pi t + \frac{3\pi}{4}\right)$ A。要求：

(1) 求正弦电压和电流的振幅、有效值、角频率、频率和初相；(2) 画出正弦电压和电流的波形。

3-2 已知正弦电压的振幅为 100 V, $t=0$ 时的瞬时值为 10 V, 周期为 1 ms。试写出该电压的解析式。

3-3 题图 3-3 中，选择电流参考方向由 $a \rightarrow b$ ，电流的解析式为 $i(t) = 28.2 \sin\left(314t + \frac{2\pi}{3}\right)$ A，若选择该电流参考方向由 $b \rightarrow a$ ，并以 i' 表示，求 i' 的表达式。



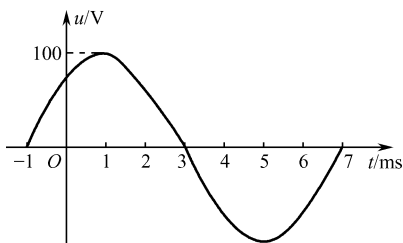
题图 3-3

3-4 某正弦电流的解析式为 $i(t) = 300\sqrt{2} \sin(1200\pi t + 55^\circ)$ A。试求频率和 $t = 2$ ms 时刻的瞬时值。

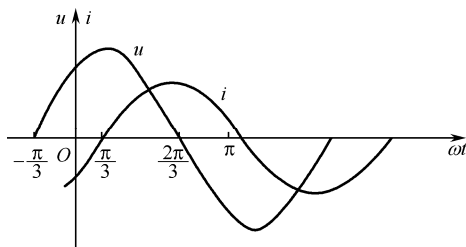
3-5 频率为 50 Hz 的正弦电压的最大值为 14.14 V, 初始值为 -10 V, 试写出其解析式。

3-6 根据题图 3-6 所示正弦电压的波形，确定三要素并写出该电压的解析式。

3-7 题图 3-7 为同频率正弦电流 i 和正弦电压 u 的波形，问 i 和 u 的初相各为多少？两者的相位差为多少？ i 和 u 哪个超前？超前多少？若将纵坐标（计时起点）向右或向左移动 $\frac{\pi}{3}$ ， i 和 u 的初相将如何变化？相位差改变吗？



题图 3-6



题图 3-7

3-8 将 5 只反向击穿电压为 50 V 的整流二极管串联在 220 V 的市电上，可以经常使用吗？为什么？那么至少需要几只二极管串联才行？

3-9 已知某个电路元件上的电压和电流为 $u(t) = 3\cos(3t)$ V, $i(t) = -2\sin(3t + 10^\circ)$ A。试用相位差判断电压与电流的相位关系。

3-10 一正弦电压的初相 $\theta_u = \frac{\pi}{3}$, $t = 0$ 时, 电压初始值为 8.66 V, 求此电压的有效值。

3-11 写出下列各正弦量所对应的相量, 并画出相量图。

(1) $u_1(t) = 220\sqrt{2}\sin(\omega t)$ V; (2) $u_2(t) = 100\sqrt{2}\sin(\omega t - 120^\circ)$ V;

(3) $i_1(t) = 14.14\sin(\omega t + 90^\circ)$ A; (4) $i_2(t) = 10\sin(\omega t + 300^\circ)$ A。

3-12 写出下列各正弦量相量所对应的解析式 ($f = 100$ Hz)。

(1) $\dot{I}_1 = -j1$ A; (2) $\dot{I}_2 = 2 - j1$ A; (3) $\dot{U}_1 = 220\angle 120^\circ$ V; (4) $\dot{U}_2 = -5 + j5$ V。

3-13 将 $R = 10\ \Omega$ 的电阻接到 $u(t) = 25\sqrt{2}\sin(314t - 30^\circ)$ V 的正弦电源上, u 、 i 参考方向一致, 写出电阻上电流的解析式, 并画电阻上电压和电流的相量图。

3-14 选定 u 、 i 参考方向一致, 电感端电压为 $u(t) = 180\sin(1200t + 30^\circ)$ V, 电感电流 $i(t) = 0.05\sin(1200t + \theta_i)$ A, 试求电感的 L 值和电感电流的初相 θ_i 。

3-15 已知 $C = 10\ \mu\text{F}$ 的电容接在正弦电源上, 电容的电流 $i(t) = 141\sin(314t + 60^\circ)$ mA, 在电压电流为关联参考方向下, 试求电容端电压 $u(t)$, 并计算无功功率 Q_C 。

3-16 已知某二端元件的电压、电流采用关联参考方向, 若其瞬时值表达式为

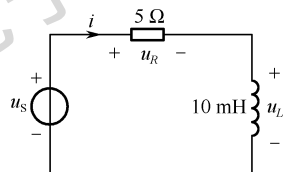
(1) $u(t) = 15\cos(400t + 30^\circ)$ V, $i(t) = 3\sin(400t + 30^\circ)$ A;

(2) $u(t) = 8\sin(500t + 50^\circ)$ V, $i(t) = 2\sin(500t + 140^\circ)$ A;

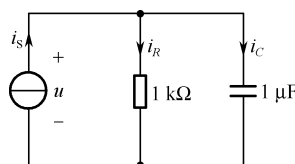
(3) $u(t) = 8\cos(250t + 60^\circ)$ V, $i(t) = 5\sin(250t + 150^\circ)$ A;

试确定该元件是电阻、电感、电容中的哪一种, 并确定其元件参数。

3-17 题图 3-17 所示电路中, 已知 $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(100t + 20^\circ)$ A。求电压 $u_R(t)$ 、 $u_L(t)$ 和 $u_S(t)$ 的相量。



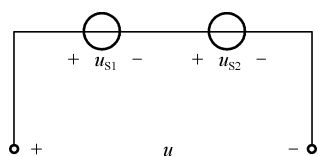
题图 3-17



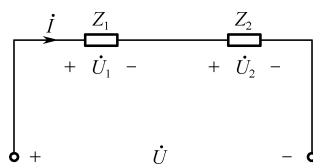
题图 3-18

3-18 题图 3-18 所示电路中, 已知 $u(t) = 5\sqrt{2}\sin(10\pi t + 20^\circ)$ V。求电流 $i_R(t)$ 、 $i_C(t)$ 和 $i_S(t)$ 的相量。

3-19 两个同频率的正弦电压源 u_{S1} 和 u_{S2} 串联, 如题图 3-19 所示。已知 u_{S1} 和 u_{S2} 的有效值分别为 60 V 和 80 V, 问: (1) 什么情况下端电压 u 的有效值最大, 为 140 V; (2) 什么情况下端电压 u 的有效值最小, 为 20 V; (3) 什么情况下, 端电压 u 的有效值为 $\sqrt{60^2 + 80^2} = 100$ V。



题图 3-19



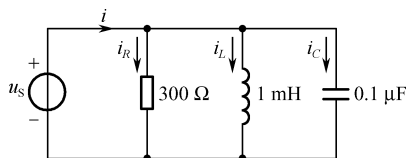
题图 3-20

3-20 设有两个复阻抗 $Z_1 = 8 + j6\ \Omega$, $Z_2 = 3 - j4\ \Omega$ 相串联, 接在端电压 $u(t) = 220\sqrt{2}\sin(\omega t + 30^\circ)$ V 的正弦电源上, 如题图 3-20 所示。试求: (1) 等效复阻抗 Z_{eq} ; (2) 电路电流 \dot{I} ; (3) Z_1 、 Z_2 上的电压 \dot{U}_1 、 \dot{U}_2 并画相量图。

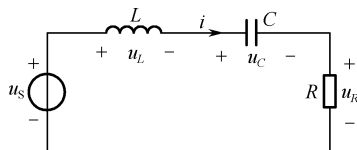
3-21 一个线圈接在 50 V、50 Hz 的正弦电源上，电流为 1 A，接在 50 V、100 Hz 的正弦电源上，电流为 0.8 A，试求线圈的电阻 R 和电感 L 。

3-22 题图 3-22 所示电路中，已知 $u_s(t) = 1.5\sin(10t + 60^\circ)$ V。求电流 $i_R(t)$ 、 $i_L(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $i(t)$ 的解析式及相量式。

3-23 题图 3-23 所示电路中，已知 $i(t) = 1\sin(10^7t + 90^\circ)$ A， $R = 100 \Omega$ 、 $L = 1$ mH、 $C = 10$ pF 求：(1) 电路复阻抗 Z ；(2) 电压 $u_R(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $u_C(t)$ 和 $u_S(t)$ 的解析式及相量式，并画相量图；(3) 电路功率 P 、 Q 、 S 。



题图 3-22



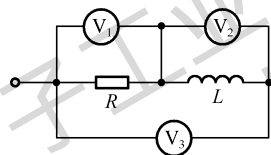
题图 3-23

3-24 将 $R = 15 \Omega$ 、 $L = 0.1$ H、 $C = 30 \mu\text{F}$ 的三元件串联在正弦电源 $u_s(t) = 10\sin(314t + 50^\circ)$ V 上，如题图 3-23 所示，电压、电流选为关联参考方向。试用相量分析法求 $i(t)$ 、 $u_L(t)$ 和 $u_C(t)$ 。

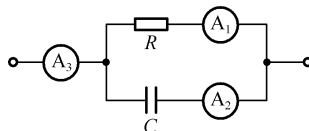
3-25 在 RLC 串联的正弦电路中，已知 $R = 1$ k Ω 、 $L = 10$ mH、 $C = 0.02 \mu\text{F}$ ，电容两端电压 $u_C(t) = 20\sin(10^5t - 40^\circ)$ V，如题图 3-23 所示，求电流 i 和电源电压 \dot{U}_S 。

3-26 题图 3-26 所示电路中，已知电压表的读数为 $V_1 = 3$ V， $V_2 = 4$ V。问电压表读数 V_3 等于多少？

3-27 题图 3-27 所示电路中，已知电流表的读数为 $A_1 = 1$ A， $A_2 = 2$ A。问电流表读数 A_3 等于多少？



题图 3-26

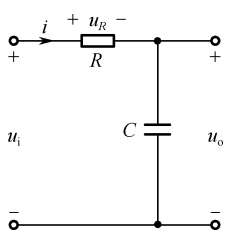


题图 3-27

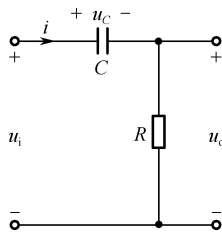
3-28 将电阻 $R = 8 \Omega$ 、电感 $L = 25.5$ mH 的线圈接在电压 $u(t) = 200\sqrt{2}\sin(314t + 30^\circ)$ V 的电源上，试求：(1) 复阻抗 Z ；(2) 电路电流 i ；(3) 线圈的有功功率、无功功率和视在功率；(4) 画相量图。

3-29 题图 3-29 所示的 RC 串联电路中，已知输入电压的频率 $f = 1$ kHz， $C = 0.01 \mu\text{F}$ ，要求输出电压 u_o 滞后输入电压 u_i 为 30° ，求电阻 R 的值。

3-30 题图 3-30 所示电路中，已知 $C = 0.01 \mu\text{F}$ ， $R = 5.1$ k Ω ，输入电压 $u_i = 10\sqrt{2}\sin(\omega t)$ V， $f = 1200$ Hz，试求：(1) 电路电流 i ；(2) 输出电压 u_o 比输入电压 u_i 超前还是滞后？(3) f 不变，当电阻 R 改变（增加或减小）时，输出电压 u_o 与输入电压 u_i 的相位关系如何变化？

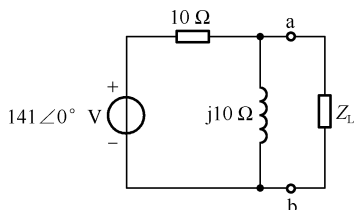


题图 3-29

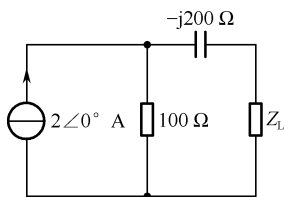


题图 3-30

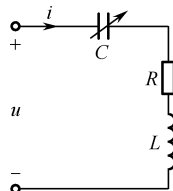
3-31 正弦电路如题图 3-31 所示。若要使负载 Z_L 获得最大功率， Z_L 应为何值？最大功率是多少？



题图 3-31



题图 3-32

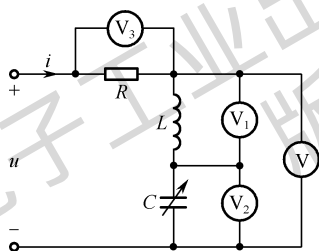


题图 3-33

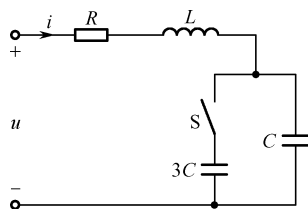
3-34 RLC 串联电路中，已知 $R = 20 \Omega$ ， $L = 0.1 \text{ mH}$ ， $C = 100 \text{ pF}$ ，试求谐振频率 ω_0 、品质因数 Q 。

3-35 RLC 串联电路中，已知信号源电压 $u_S(t) = \sqrt{2} \sin(10^6 t + 40^\circ) \text{ V}$ ，电路谐振时电流 $I = 0.1 \text{ A}$ ，电容两端电压 $U_C = 100 \text{ V}$ 。试求 R 、 L 、 C 、 Q 。

3-36 RLC 串联电路接于 $U = 1 \text{ V}$ 的正弦电源上，如题图 3-36 所示，电压表 V_1 、 V_2 的读数均为 50 V ，试求电压表 V_3 和 V 的读数。



题图 3-36

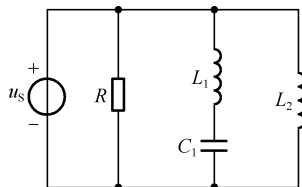


题图 3-37

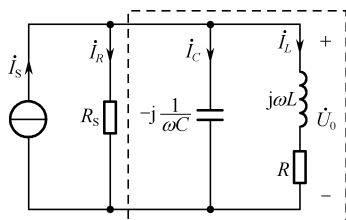
3-38 RLC 串联在有效值 $U = 1 \text{ V}$ 的信号源上，调电容 C ，当 $C = 1000 \text{ pF}$ 时，测得电路电流达到最大值 20 mA ，此时电容两端电压为 100 V ，求：电路电阻 R 、电感 L 、品质因数 Q 和谐振频率 f_0 。

3-39 试求题图 3-39 所示电路中并联谐振角频率 ω_0 。设电源电压 u_S 的角频率为 ω 。

3-40 如题图 3-40 所示电路，已知 $L = 100 \mu\text{H}$ ， $R = 25 \Omega$ ， $C = 100 \text{ pF}$ ，电流源 $I_S = 1 \text{ mA}$ ，其内阻 $R_S = 40 \text{ k}\Omega$ 。(1) 试求图中虚线框内并联电路的谐振频率 f_0 、品质因数 Q 和谐振时的复阻抗 Z_0 ；(2) 求谐振时并联电路两端电压 \dot{U}_0 和 \dot{I}_C 、 \dot{I}_L 。



题图 3-39



题图 3-40

3-41 一个对称三相电源, 已知 $\dot{U}_A = 100\angle -150^\circ \text{ V}$, 求 \dot{U}_B 、 \dot{U}_C , 并画相量图。

3-42 一组对称电流中的 $\dot{I}_a = 10\angle -60^\circ \text{ A}$, 试写出: (1) $\dot{I}_b + \dot{I}_c$; (2) $i_A(t)$ 、 $i_B(t)$ 和 $i_C(t)$; (3) 画相量图; (4) $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c$ 。

3-43 星形连接的电动机的线电压为 6300 V, 试求每相电压。当电动机的绕组连接成三角形时, 问电动机的线电压是多少?

3-44 电动机是星形连接, 负载也是星形连接, 电动机的相电压 $U_p = 1000 \text{ V}$, 负载每相均为 $R = 50 \Omega$, $X_L = 25 \Omega$ 。试求: (1) 相电流; (2) 线电压; (3) 线电流; (4) 画出负载电压、电流相量图。

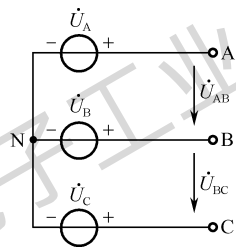
3-45 三相四线制电路中, 电源电压 $\dot{U}_{AB} = 380\angle 0^\circ \text{ V}$, 三相负载对称, 为 $Z = 10\angle 60^\circ \Omega$, 求各相电流。

3-46 连接成星形的对称负载, 接在一对称的三相电压上, 线电压为 380 V, 负载每相复阻抗 $Z = 8 + j6 \Omega$, 求每相负载的端电压端电流、功率。

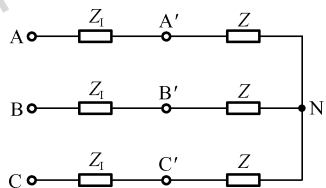
3-47 某建筑物有三层楼, 每一层的照明由三相电源中的一相供电。电源电压为 380/220 V, 每层楼装有 220 V、100 W 白炽灯 15 只。(1) 画出电灯接入电源的线路图; (2) 当三个楼层的电灯全部亮时, 求线电流和中线电流; (3) 如第一层楼电灯全亮, 第二层楼只有 5 只电灯亮, 第三层楼电灯全灭, 而电源中线又断开, 试求这时第一层、第二层楼电灯两端的电压为多少?

3-48 对称三相电路如题图 3-48 所示。若从 A 到 N 的电压为 $220\angle -30^\circ \text{ V}$, 求 \dot{U}_{BC} 。

3-49 对称三相电路如题图 3-49 所示。此时为星形连接的负载, 负载复阻抗 $Z = 16 + j12 \Omega$, 设线路的复阻抗 $Z_l = 1 + j0.8 \Omega$, 若负载端的线电压有效值为 380 V, 计算电源端的电压值。



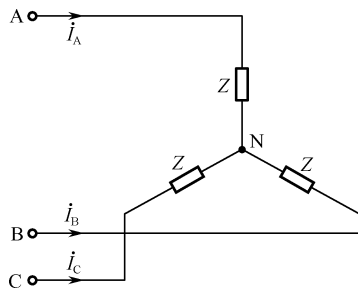
题图 3-48



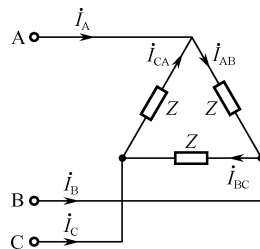
题图 3-49

3-50 如题图 3-50 的对称三相负载, 已知线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 负载复阻抗 $Z = 6 + j8 \Omega$, 求各相负载电流和负载总功率。

3-51 如题图 3-51 的对称三相负载, 已知线电压 $U_l = 380 \text{ V}$, 负载复阻抗 $Z = 26\angle 53.1^\circ \Omega$, 求各线电流和负载吸收的总功率。



题图 3-50



题图 3-51