普通高等教育“十一五”国家级规划教材

国家精品课程教学成果

电子电气基础课程系列教材

数字逻辑与数字系统

（第 7 版）

杨　丹　李景宏
王永军　李晶皎　李景华　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书在普通高等教育“十一五”国家级规划教材和国家精品课程教学成果《数字逻辑与数字系统》(第6版)基础上,依照2019年出版的《高等学校工科基础课程教学基本要求》,为适应数字电子技术的不断发展和应用水平的不断提高修订而成。全书共9章,内容包括数字逻辑基础、逻辑门电路、组合逻辑电路、锁存器和触发器、时序逻辑电路、半导体存储器、脉冲波形的产生与整形、数模转换和模数转换、数字系统分析与设计等。附录给出了GAL、CPLD和FPGA简介,电气简图用图形符号二进制逻辑元件简介,常用逻辑符号对照表等实用内容。本书提供多媒体课件,可登录华信教育资源网注册后免费下载。本书配套教材为《数字逻辑与数字系统学习指导及习题解答》(ISBN 978-7-121-46853-7)。

本书为电子信息类各专业平台课程教材,可作为高等学校计算机、通信、电子、电气及自动化等专业本科生教材,还可供自学考试、成人教育和电子工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字逻辑与数字系统 / 杨丹, 李景宏等编著. 7版. -- 北京 : 电子工业出版社, 2025. 9. -- ISBN 978-7-121-51119-6

Ⅰ. TP302.2

中国国家版本馆CIP数据核字第202568JF28号

责任编辑:冉 哲
印 刷:
装 订:
出版发行:电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036
开 本:787×1 092 1/16 印张:17.5 字数:448千字
版 次:1997年5月第1版
2025年9月第7版
印 次:2025年9月第1次印刷
定 价:59.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:ran@phei.com.cn。

第 7 版前言

本书在普通高等教育“十一五”国家级规划教材和国家精品课程教学成果《数字逻辑与数字系统》（第 6 版）基础上，依照 2019 年出版的《高等学校工科基础课程教学基本要求》，为适应数字电子技术的不断发展和应用水平的不断提高修订而成。本次修订将传统的基本知识、基本原理与现代分析和设计手段有机地融合，突出工程背景与应用，调整了重心，整合并压缩了个别章节，力求实现知识传授与能力提升的双重效果。

全书共 9 章，内容包括数字逻辑基础、逻辑门电路、组合逻辑电路、锁存器和触发器、时序逻辑电路、半导体存储器、脉冲波形的产生与整形、数模转换和模数转换、数字系统分析与设计等。附录给出了 GAL、CPLD 和 FPGA 简介，电气简图用图形符号二进制逻辑元件简介，常用逻辑符号对照表等实用内容。

本次修订主要做了以下的修改和调整：

（1）将原来组合逻辑电路和时序逻辑电路中的 GAL 内容调整至附录 A，凝练了章节内容。

（2）根据目前数字系统的发展趋势和应用情况，在第 5 章中增加了时序逻辑电路有限状态机的概念及设计应用。

（3）根据最新国家标准更新了附录 B 的内容。

（4）增加了重要知识点理论、部分例题的 Multisim 仿真及 Verilog 程序设计的讲解视频（二维码）。

本书提供多媒体课件，可登录华信教育资源网注册后免费下载。

本书配套教材为《数字逻辑与数字系统学习指导及习题解答》（ISBN 978-7-121-46853-7）。

本书为电子信息类各专业平台课程教材，可作为高等学校计算机、通信、电子、电气及自动化等专业本科生教材，还可供自学考试、成人教育和电子工程技术人员参考。

本书由杨丹、李景宏等编著。参与编写的还有王永军、李晶皎、李景华、张继良、刘纪红、田亚男、雷红玮、李贞妮、杜玉远、叶柠、孙宇舸、程同蕾、王爱侠、闫爱云、赵丽红。新版教材中一定还会存在不少错误和疏漏，殷切希望读者给予批评指正。

作　　者

于东北大学

目　录

第 1 章　数字逻辑基础

本章主要介绍计数体制、常用编码、二极管及三极管的开关特性和逻辑代数基础。这些内容是学习其他有关章节的基础，是研究逻辑电路的重要数学工具。

1.1　计数制

在日常生活中，人们习惯于使用十进制数，而在数字系统中常采用二进制数。本节首先从人们最熟悉的十进制数开始分析，进而引出各种不同的计数制。

1.1.1　十进制数

十进制数有两个特点：一是用 10 个不同的数字符号 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 来表示，通常把这 10 个数字符号称为数码；二是逢“十”进位。因此，同一个数码在一个数中所处的位置（或数位）不同，其代表的数值也是不同的。例如，6666.66 这个数中，小数点左边的第 1 位代表个位，它的权值为 10^0，就是它本身的数值 6（或 6×10^0）；小数点左边第 2 位代表十位，它的数值为 6×10^1；小数点左边第 3 位代表百位，它的数值为 6×10^2；小数点左边第 4 位代表千位，它的数值为 6×10^3；而小数点右边第 1 位的权为 10^{-1}，它的数值为 6×10^{-1}；而小数点右边第 2 位的权为 10^{-2}，它的数值为 6×10^{-2}。因此，这个数可以写成

$$6666.66=6\times10^3+6\times10^2+6\times10^1+6\times10^0+6\times10^{-1}+6\times10^{-2}$$

式中，6，6，6，6，6，6 这些数码均称为系数；10^3，10^2，10^1，10^0，10^{-1}，10^{-2} 是每位数对应的权，这里 10 称为十进制数的基数，权乘以系数称为加权系数，所以一个十进制数的数值就是以 10 为基数的加权系数之和。任意一个十进制数 M_{10} 都可以表示为

$$\begin{aligned}M_{10}&=a_{n-1}\times10^{n-1}+a_{n-2}\times10^{n-2}+\cdots+a_1\times10^1+a_0\times10^0+\\&\quad a_{-1}\times10^{-1}+a_{-2}\times10^{-2}+\cdots+a_{-m}\times10^{-m}\\&=\sum_{i=-m}^{n-1}a_i\times10^i\end{aligned}$$

式中，i 表示数中的第 i 位；a_i 表示第 i 位的数码（系数），它可以是 0～9 这 10 个数码中的任意一个；n 和 m 为正整数，n 为小数点左边的位数，m 为小数点右边的位数；10 为计数制的基数；M 的下标为 10，表示 M 是一个十进制数。基数和 M 的下标是一致的。如果 M 是 R 进制数，则写成 M_R。以 R 为基数的 n 位整数、m 位小数的 R 进制数，其按权展开式可写为

$$M_R=\sum_{i=-m}^{n-1}a_i\times R^i$$

1.1.2　二进制数

与十进制数类似，二进制数也有两个主要特点：一是用两个不同的数字符号 0 和 1 来表示；二是逢“二”进位，当 1＋1 时，本位为 0，向高位进 1（1＋1＝10）。因此，同一个数码在不同

的数位所代表的值也是不同的。例如：

$(1001)_2=1\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=(8+0+0+1)_{10}=(9)_{10}$

$(11011.101)_2=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+0\times2^{-2}+1\times2^{-3}$

$=(27.625)_{10}$

任意一个二进制数 M_2 都可表示为

$$M_2=a_{n-1}\times2^{n-1}+a_{n-2}\times2^{n-2}+\cdots+a_1\times2^1+a_0\times2^0+a_{-1}\times2^{-1}+a_{-2}\times2^{-2}+\cdots+a_{-m}\times2^{-m}=\sum_{i=-m}^{n-1}a_i\times2^i$$

式中，a_i 只能是 0 或 1；n 和 m 为正整数，n 为小数点左面的位数，m 为小数点右面的位数；2 是计数制的基数，故称二进制数。

在数字系统中采用二进制数是比较方便的，由于二进制数只有两个数码 0 和 1，因此，它的每一位都可以用某些器件所具有的两种不同的稳定状态来表示，如三极管的饱和导通与截止。某些器件输出电压有低与高两种稳定状态，只要用其中一种状态表示 1，而用另一种状态表示 0，就可以表示二进制数了。

1.1.3 八进制数和十六进制数

1. 八进制数

八进制数有两个特点：① 用 8 个数码符号 0，1，2，3，4，5，6，7 来表示数值；② 逢“八”进位，即 7+1=10。

任意一个八进制数 M_8 都可以表示为

$$M_8=\sum_{i=-m}^{n-1}a_i\times8^i$$

式中，a_i 可取 0～7 这 8 个数码符号之中的任意一个；n 和 m 为正整数，n 为小数点左边的位数，m 为小数点右边的位数；8 为基数，故称八进制数。

2. 十六进制数

十六进制数也有两个特点：一是用 16 个数码符号 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，A，B，C，D，E，F 来表示数值；二是逢“十六”进位，即 F+1=10。它的表达式为

$$M_{16}=\sum_{i=-m}^{n-1}a_i\times16^i$$

式中，a_i 可取 0～F 这 16 个数码符号之中的任意一个；n 和 m 为正整数，n 为小数点左边的位数，m 为小数点右边的位数；16 为基数，故称十六进制数。

综上所述，4 种计数制的特点类似，可以概括如下：

(1)每种计数制都有一个固定的基数 R，数的每位均可取 R 个数码符号中的任意一个数码。

(2)它们是逢 R 进位的。因此，它的每一个数位 i 均对应一个固定的值 R^i，R^i 就是该位的权，小数点左边各位的权依次是基数 R 的正次幂；而小数点右边各位的权依次是基数 R 的

负次幂。显然，若将一个数中的小数点向左移一位，则等于将该数减小为 $1/R$；若将小数点向右移一位，则等于将该数增大 R 倍。

1.1.4 数制之间的转换

1. 二进制数与十进制数之间的转换

(1)二进制数转换成十进制数

通常的方法是，用加权系数之和求得。例如：

$$\begin{aligned}M_2 &= (11011.101)_2\\ &= 1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0+1\times 2^{-1}+0\times 2^{-2}+1\times 2^{-3}\\ &= (27.625)_{10}\end{aligned}$$

(2)十进制数转换成二进制数

把十进制数 25.625 转换成二进制数，其方法是：把十进制数的整数部分连续除以 2(直至商为 0)取余数作为二进制整数；小数部分连续乘以 2(直至积为 1)取整数作为二进制小数。例如：

```
2 | 25
  2 | 12   余 1 = a0
    2 | 6   余 0 = a1
      2 | 3   余 0 = a2
        2 | 1   余 1 = a3
          0     余 1 = a4
```

```
  0.625
×     2
  1.250   a-1 = 1
  0.250
×     2
  0.500   a-2 = 0
  0.500
×     2
  1.000   a-3 = 1
```

则 $(25.625)_{10}=(11001.101)_2$。

2. 二进制数与八进制数之间的转换

(1)二进制数转换成八进制数

把二进制数 101011011.110101110 转换成八进制数要分别对整数和小数进行转换：整数的转换可从最低位(小数点左边第一位)开始，每 3 位分为一组，最后不足 3 位的前面补 0，每组用 1 位等价八进制数来替代；小数的转换可从小数点右边第一位开始，每 3 位分为一组，最后不足 3 位的后面补 0，然后顺序写出对应的八进制数即可。例如：

101	011	011	.	110	101	110
5	3	3	.	6	5	6

则 $(101011011.110101110)_2=(533.656)_8$。

(2)八进制数转换成二进制数

八进制数转换成二进制数，只要将每 1 位八进制数用等价的 3 位二进制数表示即可。例如，$(564.321)_8=(101110100.011010001)_2$。

3. 二进制数与十六进制数之间的转换

(1)二进制数转换成十六进制数

二进制数转换成十六进制数，其方法是：将二进制数的整数部分由小数点向左，每 4 位分

为一组，最后不足 4 位的前面补零；小数部分由小数点向右，每 4 位分为一组，最后不足 4 位的后面补零，然后把每 4 位二进制数用等价的十六进制数来代替，即可转换为十六进制数。例如，$(1101110.1101110)_2$ 转换成十六进制数：

0110　1110　.　1101　1100

6　　E　　.　　D　　C

则 $(1101110.1101110)_2=(6E.DC)_{16}$。

(2)十六进制数转换成二进制数

转换方法与上述过程相反，每 1 位十六进制数用 4 位二进制数替换即可。例如，$(1BE3.97)_{16}$ 转换成二进制数，其转换过程如下：

1　　B　　E　　3　　.　　9　　7

0001　1011　1110　0011　.　1001　0111

则 $(1BE3.97)_{16}=(1101111100011.10010111)_2$。

1.2　常用编码

什么是编码？一般来说，用文字、符号或者数码来表示某种信息(数值、语言、操作命令、状态)的过程称为编码。在数字系统或计算机中是用多位二进制码按照一定规律来表示某种信息的。这些多位二进制码称为代码，编码后的代码都具有一定的含义。因为二进制码只有 0 和 1 两个数字，所以电路上实现起来最容易。

1.2.1　二-十进制码(BCD 码)

十进制数是用 0～9 这 10 个数码组成的，为此可用 4 位二进制码的 16 种组合作为代码，取其中 10 种组合来表示 0～9 这 10 个数码。通常，把用 4 位二进制码来表示 1 位十进制数称为二-十进制码，也称为 BCD 码。取哪 10 种组合来表示十进制数的 10 个数码有很多种方案，这就形成了各种不同的 BCD 码，常用的几种 BCD 码列于表 1-1 中。

表 1-1　常用的几种 BCD 码

		编码种类					
		8421 码	余 3 码	2421 码(A)码	2421 码(B)码	5421 码	余 3 循环码
十进制数	0	0000	0011	0000	0000	0000	0010
	1	0001	0100	0001	0001	0001	0110
	2	0010	0101	0010	0010	0010	0111
	3	0011	0110	0011	0011	0011	0101
	4	0100	0111	0100	0100	0100	0100
	5	0101	1000	0101	1011	1000	1100
	6	0110	1001	0110	1100	1001	1101
	7	0111	1010	0111	1101	1010	1111
	8	1000	1011	1110	1110	1011	1110
	9	1001	1100	1111	1111	1100	1010
权		8421		2421	2421	5421	

1. 8421 码

8421 码是使用最多的一种 BCD 码，它是一个有权码，其各位的权分别是 8，4，2，1(从最高有效位开始至最低有效位)。如果把每一个代码都看成是一个 4 位二进制数，这个代码的数值恰好等于它所代表的十进制数的大小。

2. 余 3 码

因为每一个余 3 码所对应的 4 位二进制数要比它所表示的十进制数恰好大 3，所以这种编码称为余 3 码。从编码表中可以看到：0 和 9，1 和 8，2 和 7，3 和 6，4 和 5，这 5 对代码是互补的。例如，2 中的 0 变 1，1 变 0，就可得到 7；7 中的 0 变 1，1 变 0，就可得到 2。这种互补性有利于进行减法运算，在此不进行讨论。

1.2.2 循环码

4 位循环码见表 1-2。从表中可以看到，相邻两组代码间只有一位取值不同，而其他位均相同。再有，每一位代码从上到下的排列顺序都是以固定的周期进行循环的，右起第 1 位的循环周期是 0110、第 2 位的循环周期是 00111100、第 3 位的循环周期是 0000111111110000 等。从表中还可以看到，以 16 种组合的中间为轴，最高位由 0 变 1，其余 3 位均以轴为中心对称组合。这种编码是一种无权码，又称为反射码或格雷码。

表 1-2 4 位循环码

十进制数	循环码
0	0 0 0 0
1	0 0 0 1
2	0 0 1 1
3	0 0 1 0
4	0 1 1 0
5	0 1 1 1
6	0 1 0 1
7	0 1 0 0
8	1 1 0 0
9	1 1 0 1
10	1 1 1 1
11	1 1 1 0
12	1 0 1 0
13	1 0 1 1
14	1 0 0 1
15	1 0 0 0

1.2.3 ASCII 码

ASCII 码是美国信息交换标准代码(American Standard Code for Information Interchange)的简称。它的编码表见表 1-3，它是一组 7 位代码 $b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1$，用来表示十进制数、英文字母及专用符号。

表 1-3 ASCII 码表

		$b_7b_6b_5$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
$b_4b_3b_2b_1$	0 0 0 0	NUL	DLE	SP	0	@	P	\	p
	0 0 0 1	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
	0 0 1 0	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
	0 0 1 1	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
	0 1 0 0	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
	0 1 0 1	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
	0 1 1 0	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
	0 1 1 1	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
	1 0 0 0	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
	1 0 0 1	HT	EM	)	9	I	Y	i	y

续表

		$b_7b_6b_5$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
$b_4b_3b_2b_1$	1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
	1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
	1100	FF	FS	,	<	L	\	l	!
	1101	CR	GS	−	=	M	]	m	}
	1110	SO	RS	.	>	N	↑	n	~
	1111	SI	US	/	?	O	↓	o	DEL

1.3 逻辑代数基础

逻辑代数是1847年英国数学家乔治·布尔(George Boole)首先创立的,所以也把逻辑代数称为布尔代数。逻辑代数与普通代数有着不同的概念,逻辑代数表示的不是数量大小之间的关系,而是逻辑变量之间的逻辑关系。它是分析和设计数字电路的基本数学工具。

1.3.1 逻辑变量和逻辑函数

“逻辑”一词始于逻辑学。逻辑学研究的是逻辑思维与逻辑推理的规律。数字电路也是研究逻辑的,即研究数字电路的输入和输出间的因果关系,也就是研究输入和输出间的逻辑关系。为了对输入和输出间的逻辑关系进行数学表达和演算,提出了逻辑变量和逻辑函数两个术语。逻辑电路框图如图1-1所示,A和B为输入,F为输出,输出和输入之间的逻辑关系可表示为$F=f(A,B)$。这种具有逻辑属性的变量称为逻辑变量。A和B是逻辑自变量,F是逻辑因变量。当A和B的逻辑取值确定后,则F的逻辑值也就唯一地被确定下来,通常称F是A和B的逻辑函数。所以输出变量F又称为逻辑函数。$F=f(A,B)$称为逻辑函数表达式。逻辑自变量和逻辑因变量,只取0和1两个值,通常称为逻辑0和逻辑1,以区别于数字0和1。逻辑0或1表示两种对立的状态,表示信号的无或有,电平的低或高,电路的截止或导通,开关的断开或接通,一件事情的非或是(假或真)等。

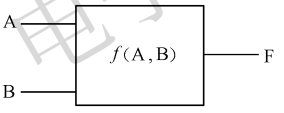


图1-1 逻辑电路框图

在逻辑电路中,逻辑0和逻辑1是用电平的低和高来表示的。如果用高电平表示逻辑1而用低电平表示逻辑0,则称为正逻辑体制(简称正逻辑)。如果用低电平表示逻辑1而用高电平表示逻辑0,则称为负逻辑体制(简称负逻辑)。本书中如无特殊说明,一律采用正逻辑体制。

在逻辑电路中,电位常用电平这一术语来描述。高、低电平表示的是两种不同的状态,它们表示的都是一定的电压范围,而不是一个固定不变的值。例如,在TTL门电路中,常规定高电平的额定值为3V,低电平的额定值为0.2V,因而从0V到0.8V都算作低电平,从2V到5V都算作高电平。

为了加深对逻辑关系的理解,下面通过图1-2所示开关控制电路的例子加以说明。图1-2中,A和B为单刀双掷开关,F为电灯,开关A和B的上合或下合与灯F的亮与灭有何因果关系呢?设A和B向上合为1,向下合为0;F亮为1,灭为0。F与A和B间的逻辑关系

如表 1-4所示。此表描述了灯 F 与开关 A 和 B 的状态之间真实的逻辑关系，这个表又称为真值表。从表中输入变量和输出函数的取值可以看出只有 0 和 1 两个逻辑值。当 A 和 B 的取值相同(全向上合或全向下合)时，F 才亮；当 A 和 B 的取值不相同(A 向上合，B 向下合；A 向下合，B 向上合)时，F 就灭。这种逻辑关系写成函数表达式为 $F=f(A,B)=A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}$。表 1-4 中，1 用原变量 A 和 B 及原函数 F 表示，0 用反变量 $\overline{A}$(A 的反)、$\overline{B}$(B 的反)表示。函数表达式中，$A\cdot B$ 表示 $1\cdot 1$(全向上合)，是 A 和 B 相与(·)关系；$\overline{A}\cdot\overline{B}$ 表示 $0\cdot 0$(全向下合)，是 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相与(·)关系；符号“+”表示 A 和 B“全向上合”或“全向下合”两种情况中有一种情况存在，F 就亮，“+”表示或的关系；$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别表示 A 的非和 B 的非，为非的关系。

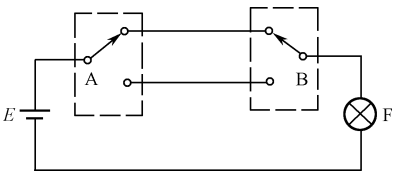


图 1-2　开关控制电路

表 1-4　F 与 A 和 B 间的逻辑关系

输入变量 A	输入变量 B	输出函数 F	说　明
0	0	1	A 与 B 全向下合，F 亮
0	1	0	A 向下合，B 向上合，F 灭
1	0	0	A 向上合，B 向下合，F 灭
1	1	1	A 与 B 全向上合，F 亮

此例的逻辑函数表达式 $F=A\cdot B+\overline{A}\cdot\overline{B}$ 说明了逻辑代数有与、或、非三种基本逻辑运算。式中的“·”为与运算符号，“+”为或运算符号，“−”为非运算符号。下面分别说明这三种基本逻辑运算的含义及如何实现。

1.3.2　基本逻辑运算和基本逻辑门

逻辑与、逻辑或、逻辑非是逻辑代数中的三种基本逻辑运算。实现这三种基本逻辑运算的电路，分别称为与门、或门、非门，这三种门是基本逻辑门。下面用三种指示灯的控制开关电路来说明这三种基本逻辑运算。开关的闭合或断开作为条件，灯的亮或灭作为事件，开关和灯之间的因果关系作为逻辑关系。设开关 A 和 B 为输入变量，开关闭合用逻辑值 1 表示，开关断开用逻辑值 0 表示；灯 F 为逻辑函数，灯亮用逻辑值 1 表示，灯灭用逻辑值 0 表示。

1. 与运算(逻辑与、逻辑乘)

灯的控制开关电路如图 1-3(a)所示。灯 F 亮作为事件发生，开关 A 和 B 的闭合作为事件发生的条件。从图 1-3(a)可以看出，只有开关 A 和 B 同时闭合，灯 F 才会亮。逻辑与的定义：只有当决定一个事件的条件全部具备之后，这个事件才会发生。

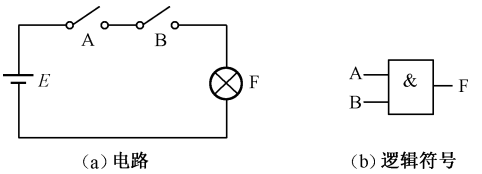
图 1-3 中，F 与 A 和 B 之间的逻辑关系也可以用真值表表示，见表 1-5。由于每一个变量只有两种取值(0 或 1)，因此 n 个变量有 2^n 种取值组合。图 1-3(a)有两个变量，则有 $2^2=4$ 种取值组合(00，01，10，11)。A 和 B 变量的 4 种取值组合与相应函数 F 的值列于表 1-5中，这个表称为真值表。由真值表可见，只有当输入变量 A 和 B 全为 1 时，输出函数 F 才为 1。这种关系和算术中乘法相似，所以逻辑与又称为逻辑乘，其表达式为

$$F=A\cdot B=AB$$

式中，与运算符号“·”在逻辑函数表达式中可以略去。与运算规则如下：

$$0\cdot 0=0,\quad 0\cdot 1=0,\quad 1\cdot 0=0,\quad 1\cdot 1=1$$

实现与运算的逻辑电路称为与门，与门的逻辑符号如图 1-3(b)所示。



(a)电路　　(b)逻辑符号

图 1-3　与门的电路及逻辑符号

表 1-5　与运算真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. 或运算(逻辑或、逻辑加)

灯的控制开关电路如图 1-4(a)所示。只要开关 A 或 B 任一闭合，灯 F 就会亮。逻辑或定义：对于决定一个事件(如灯亮)的几个条件(如开关 A 闭合、开关 B 闭合)，只要有一个条件得到满足，这个事件就会发生。

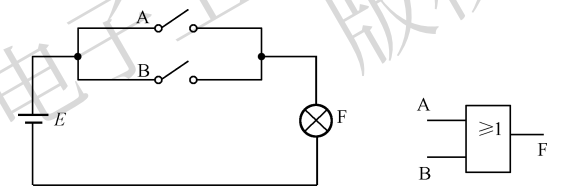
图 1-4(a)中，F 与 A 和 B 之间的逻辑关系也可以用真值表来表示，见表 1-6。由表可见，输入变量 A 和 B 之中，只要有一个为 1 时，输出函数 F 就为 1。这种关系和算术中加法相似，因此又把逻辑或称为逻辑加，其表达式为

$$F=A+B$$

式中，“+”表示逻辑相加而不是算术相加。这里的 0，1 表示两种不同的逻辑状态，只是逻辑变量取值，没有数量的意思。1+1=1 的含义是 A 和 B 两个开关都闭合，灯 F 亮。或运算规则如下：

$$0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1,\quad 1+1=1$$

实现或运算的逻辑电路称为或门，或门的逻辑符号如图1-4(b)所示。



(a)电路　　(b)逻辑符号

图 1-4　或门的电路及逻辑符号

表 1-6　或运算真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. 非运算(逻辑非)

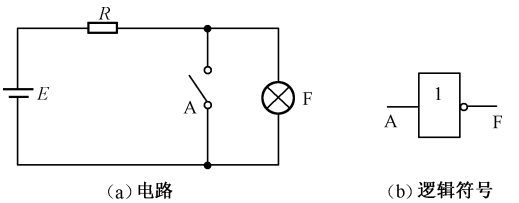
灯的控制开关电路如图 1-5(a)所示。只要开关 A 断开(条件不具备)，灯 F 就会亮，若开关 A 闭合(条件具备)，则灯 F 不亮。由此可见，条件不具备时，事件发生，这种逻辑关系称为逻辑非。

图 1-5(a)中，F 和 A 之间的逻辑关系也可以用真值表来表示，见表 1-7。由表可见，输入变量 A 为 0 时，输出函数 F 为 1，其表达式为

$$F=\overline{A}$$

非运算规则为　　$\overline{0}=1,\quad \overline{1}=0$

实现非运算的逻辑电路称为非门，非门的逻辑符号如图 1-5(b)所示。



(a) 电路　　(b) 逻辑符号

图 1-5　非门的电路及逻辑符号

表 1-7　非运算真值表

A	F
0	1
1	0

4. 复合逻辑运算

复合逻辑运算是由与、或、非三种基本逻辑运算组合而成的，经常用到的有与非、或非、与或非、异或、同或等复合逻辑运算，其逻辑符号如图 1-6 所示。其中(1)为国标符号，(2)为惯用符号，(3)为国外书刊中常用的符号。

① 与非运算。逻辑函数表达式为 $F=\overline{A \cdot B}$，其逻辑符号如图 1-6(a)所示，图上的小圆圈表示非运算。它由与运算和非运算组合而成，先与后非。

② 或非运算。逻辑函数表达式为 $F=\overline{A+B}$，其逻辑符号如图 1-6(b)所示。它由或运算和非运算组合而成，先或后非。

③ 与或非运算。逻辑函数表达式为 $F=\overline{A \cdot B+C \cdot D}$，其逻辑符号如图 1-6(c)所示。它由与、或、非三种运算组成，先与后或再非。

④ 异或运算。两个输入变量 A 和 B 的逻辑值相同时，输出函数 F 为 0；两个输入变量 A 和 B 的逻辑值相异时，输出函数 F 为 1，这种逻辑关系称为异或。其真值表见表 1-8。由真值表可写出其逻辑函数表达式为 $F=A \cdot \overline{B}+\overline{A} \cdot B=A \oplus B$，式中，$\oplus$ 为异或运算符号。异或运算的逻辑符号如图 1-6(d)所示。

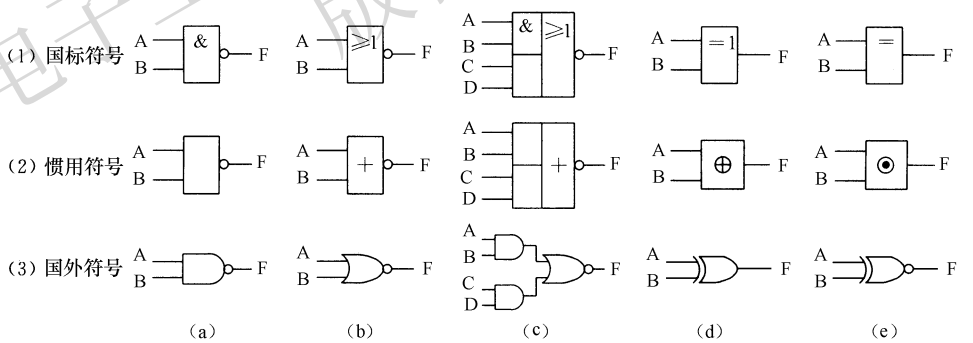


图 1-6　复合逻辑运算的逻辑符号

⑤ 同或运算。若两个输入变量 A 和 B 的逻辑值相同，则输出函数 F 为 1；若两个输入变量 A 和 B 的逻辑值相异，则输出函数 F 为 0，这种逻辑关系称为同或。其真值表见表 1-9。逻辑函数表达式为 $F=A \cdot B+\overline{A} \cdot \overline{B}=A \odot B$，式中，$\odot$ 为同或运算符号。同或运算的逻辑符号如图 1-6(e)所示。

表 1-8　异或运算真值表

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 1-9　同或运算真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.3.3 逻辑代数的基本公式和常用公式

1. 基本公式

0-1 律	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
自等律	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
重叠律	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
互补律	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
交换律	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
结合律	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
分配律	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$
吸收律	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
反演律	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
双重否定律	$\overline{\overline{A}} = A$	

表 1-10 反演律证明

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

上述基本公式可用真值表进行证明。例如，证明反演律 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$，可将变量 A 和 B 的各种取值组合分别代入等号两边的表达式中，其结果见表 1-10，可以看到，它们的逻辑值完全对应相等，说明该等式成立。

2. 逻辑代数的三条规则

(1)代入规则

在任何一个逻辑等式中，如果将等号两边所有出现的变量都代之以一个逻辑函数，此等式仍然成立，这一规则称为代入规则。例如，等式 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$，若用 $F = A \cdot C$ 去代替等式中的 A，则等式仍然成立：$\overline{A \cdot C \cdot B} = \overline{A \cdot C} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{C} + \overline{B}$。这样，两个变量的等式可以变成三个变量的等式。

(2)反演规则

求逻辑函数 F 的反函数 $\overline{F}$ 时，可用反演规则。它将逻辑函数 F 中的运算符号进行如下变换：

·　换成　+，　+　换成　·

0　换成　1，　1　换成　0

原变量换成反变量，　反变量换成原变量

则得到的新函数是原逻辑函数的反函数 $\overline{F}$。

在变换过程中应注意：两个以上变量的公用非号保持不变；运算的优先顺序是，先计算括号内的运算，然后进行与运算，最后进行或运算。

例如，求 $F = A + B + \overline{C} + \overline{D + \overline{E}} + (G \cdot H)$ 的反函数。

$$\overline{F} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{\overline{D} \cdot E} \cdot (\overline{G} + \overline{H})$$

(3)对偶规则

将逻辑函数 F 中的运算符号进行如下变换：

· 换成 +，+ 换成 ·

0 换成 1，1 换成 0

便得到逻辑函数 F 的对偶式 F′。若两个逻辑函数相等，则它们的对偶式也相等。若两个逻辑函数的对偶式相等，那么这两个逻辑函数也相等。

例如：求 $F=A\cdot B+\overline{A}\cdot C+B\cdot C$ 的对偶式。

$$F'=(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C)$$

3. 常用公式

公式 1 $AB+A\overline{B}=A$

证明：$AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$

公式 2 $A+\overline{A}B=A+B$

证明：$A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B$

公式 3 $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

证明：$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C+BC(A+\overline{A})=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC=AB+\overline{A}C$

推论 $AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$

公式 4 $\overline{AB+\overline{A}C}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}$

证明：$\overline{AB+\overline{A}C}=\overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}C}=(\overline{A}+\overline{B})(A+\overline{C})=\overline{A}A+\overline{A}\,\overline{C}+A\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}$

$=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}+\overline{B}\,\overline{C}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}$

公式 5 $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=AB+\overline{A}\,\overline{B}$ $(\overline{A\oplus B}=A\odot B)$

证明：$\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A\overline{B}}\cdot\overline{\overline{A}B}=(\overline{A}+B)(A+\overline{B})=AB+\overline{A}\,\overline{B}=A\odot B$

同理 $\overline{A\odot B}=A\oplus B$

公式 6 $xf(x,\overline{x},\cdots,z)=xf(1,0,\cdots,z)$

例如：$A[AB+\overline{A}C+(A+D)(\overline{A}+E)]=A[1\cdot B+0\cdot C+(1+D)(0+E)]$

$=A(B+0+1\cdot E)=A(B+E)$

公式 7 $f(x,\overline{x},\cdots,z)=xf(1,0\cdots,z)+\overline{x}f(0,1,\cdots,z)$

例如：$F=AB+\overline{A}C+(A+D)E+(\overline{A}+H)G$

$=A[1\cdot B+0\cdot C+(1+D)E+(0+H)G]+$

$\overline{A}[0\cdot B+1\cdot C+(0+D)E+(1+H)G]$

$=A(B+E+HG)+\overline{A}(C+DE+G)$

1.3.4 逻辑函数的表示方法

表示逻辑函数的方法有 4 种：真值表、表达式、逻辑图和卡诺图。

设一个逻辑电路有两个输入变量 A 和 B，一个输出函数 F。若 A 和 B 逻辑值相同，则输出 F 为 1；若 A 和 B 逻辑值不同，则输出 F 为 0。以此例说明逻辑函数的 4 种表示方法。

由逻辑电路的输出函数 F 和输入变量 A 和 B 之间的因果关系可列出真值表，见表 1-11。

根据真值表写出该逻辑电路的逻辑函数表达式为 $F=\overline{A}\ \overline{B}+AB$。

根据逻辑函数表达式可画出逻辑电路图，如图 1-7 所示。

表 1-11　真值表

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

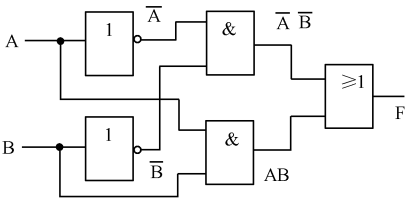


图 1-7　同或逻辑电路图

除上述三种表示方法外，逻辑函数还可用卡诺图表示。这将在逻辑函数的化简中专门讲述。

1.3.5　逻辑函数的化简

一般来说，如果逻辑函数表达式很简单，实现这个表达式的逻辑图就会比较简单，所用的器件也就比较少，因而既节约了器件又可以提高可靠性。通常，从逻辑命题抽象出来的逻辑函数不一定是最简的，所以要求对逻辑函数进行化简，找到其最简单的表达式。此外，有时逻辑函数表达式是最简的形式，但是它不一定适合给定的逻辑门，这种情况又要求对已有的最简形式进行适当的变换，才能用给定的逻辑门画出逻辑电路图。

一个逻辑函数可有多种不同的表达式，这些表达式可以互相转换，例如：

$F=AB+\overline{A}\ \overline{B}$　　与-或表达式

$=\overline{\overline{AB}\cdot\overline{\overline{A}\ \overline{B}}}$　　与非-与非表达式

$=\overline{(\overline{A}+\overline{B})(A+B)}$　　或-与非表达式

$=\overline{\overline{AB}+\overline{\overline{A}\ \overline{B}}}$　　与-或非表达式

$=\overline{(\overline{A}+\overline{B})}+\overline{(A+B)}$　　或非-或表达式

$=\overline{\overline{AB}}\cdot\overline{\overline{A}\ \overline{B}}$　　与非-与表达式

$=(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$　　或-与表达式

$=\overline{\overline{(A+\overline{B})}}+\overline{\overline{(\overline{A}+B)}}$　　或非-或非表达式

与或表达式是最常用的一种逻辑函数表达式，最简与或表达式的标准是：式中含有的与项最少；各与项中含有的变量数最少。有了最简与或表达式，就很容易得到其他形式的最简表达式。这里只介绍两种与或表达式的化简方法。一种是公式化简法，另一种是卡诺图化简法。

1. 逻辑函数的公式化简法

公式化简法就是利用基本公式和常用公式来化简逻辑函数，下面通过几个具体的例子来说明公式化简法。

(1)吸收法

利用 $A+AB=A$ 公式，消去多余的乘积项。

例如：$F_1=A\overline{B}+A\overline{B}CD(E+F)=A\overline{B}[1+CD(E+F)]=A\overline{B}$

$F_2=\overline{A}+\overline{A\cdot\overline{BC}}\cdot(B+\overline{AC+\overline{D}})+BC=\overline{A}+BC+(\overline{A}+BC)(B+\overline{AC+\overline{D}})$

$=(\overline{A}+BC)[1+(B+\overline{AC+\overline{D}})]=\overline{A}+BC$

(2)消去法

利用 $A+\overline{A}B=A+B$ 公式，消去多余因子。

例如：$F_1=\overline{A}+AB+\overline{B}E=\overline{A}+B+\overline{B}E=\overline{A}+B+E$

$F_2=A\overline{B}+\overline{A}B+ABCD+\overline{A}\,\overline{B}CD=A\overline{B}+\overline{A}B+(AB+\overline{A}\,\overline{B})CD$

$=A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}\,CD=A\overline{B}+\overline{A}B+CD$

(3)合并项法

利用 $A+\overline{A}=1$ 公式，两项合并为一项，消去一个变量。

例如：$F_1=ABC+\overline{A}BC+\overline{BC}=BC(A+\overline{A})+\overline{BC}=BC+\overline{BC}=1$

$F_2=A(BC+\overline{B}\,\overline{C})+A(B\overline{C}+\overline{B}C)=ABC+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{B}C$

$=AB(C+\overline{C})+A\overline{B}(\overline{C}+C)=AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$

(4)配项法

为了达到化简目的，有时给某个与项乘以$(A+\overline{A})$，把一项变为两项再与其他项合并进行化简；有时也可以添加 $A\overline{A}(=0)$项进行化简。

例如：$F_1=A\overline{B}+B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$

$=A\overline{B}(C+\overline{C})+B\overline{C}(A+\overline{A})+\overline{B}C+\overline{A}B$

$=A\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{B}C+\overline{A}B$

$=\overline{B}C(1+A)+A\overline{C}(\overline{B}+B)+\overline{A}B(1+\overline{C})$

$=\overline{A}B+A\overline{C}+\overline{B}C$

$F_2=AB\overline{C}+\overline{ABC}\cdot\overline{AB}=AB\overline{C}+\overline{ABC}\cdot\overline{AB}+AB\cdot\overline{AB}$

$=AB(\overline{C}+\overline{AB})+\overline{ABC}\;\overline{AB}=AB\,\overline{(\overline{C}+\overline{AB})}+\overline{AB}\;\overline{ABC}$

$=AB\,\overline{ABC}+\overline{AB}\;\overline{ABC}=\overline{ABC}$

从上面几个例子可以看到，利用公式法化简逻辑函数要求熟练掌握各种公式，而且需要一定的技巧，这对初学者来说比较困难。另外，还需说明一点，有的逻辑函数化简的结果不唯一。

2. 逻辑函数的卡诺图化简法

用卡诺图化简逻辑函数是一种简便直观、容易掌握、行之有效的方法。它在数字逻辑电路设计中已得到广泛应用。

一个逻辑函数的卡诺图就是将此函数最小项表达式中的各个最小项相应地填入一个特定的方格图内，此方格图称为卡诺图。

(1)最小项及最小项表达式

① 最小项及最小项的性质

最小项是逻辑代数中的一个重要概念，卡诺图中的每个小方格都表示了一个最小项。

在有 n 个逻辑变量的逻辑函数中，n 个变量（包含所有变量）的乘积项称为最小项。其特点是：n 个变量有 2^n 个最小项；每个最小项只有 n 个变量；每个变量只能出现一次，它不是以原变量形式出现，就是以反变量形式出现。例如，有两个变量 A 和 B，则有 $2^2=4$ 个最小项（$\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{A}B$，$A\overline{B}$，$AB$）。有三个变量 A、B 和 C，共有 $2^3=8$ 个最小项（$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，$\overline{A}B\overline{C}$，$\overline{A}BC$，$A\overline{B}\,\overline{C}$，$A\overline{B}C$，$AB\overline{C}$，$ABC$）。

为了读、写方便，通常将每个最小项编号，用 m_i 表示。编号是这样得到的：最小项中以原变量出现时用 1 表示，以反变量出现时用 0 表示，最小项的变量取值组合为二进制数值，将它转换为对应的十进制数值就是该最小项的编号。例如，最小项 $\overline{A}BC$ 的变量取值为 011，所对应的十进制数为 3，所以 $\overline{A}BC$ 的编号为 m_3。其余类推，$A\overline{B}\,\overline{C}$ 的编号为 m_4，$A\overline{B}C$ 的编号为 m_5 等。

要注意的是，提到最小项时，一定要说明变量的数目，否则最小项这一术语将失去意义。例如，乘积项 ABC 对三个变量是最小项，而对 4 个变量则不是最小项。

下面以三个变量的最小项为例说明最小项的性质，其真值表见表 1-12。由此表可以看出最小项的性质如下。

表 1-12　三个变量的最小项的真值表

变　量	最　小　项							
ABC	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	$AB\overline{C}$	ABC
0 0 0	1	0	0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0	0	0	0
0 1 1	0	0	0	1	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	1	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0	0	1	0	0
1 1 0	0	0	0	0	0	0	1	0
1 1 1	0	0	0	0	0	0	0	1
最小项编号	m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7

i）每个最小项相对应的一组变量取值使它为 1，而变量取其他值时，这个最小项都是 0。

ii）所有最小项的逻辑和为 1，即 $\sum(m_0,m_1,m_2,m_3,m_4,m_5,m_6,m_7)=1$。

iii）任意两个最小项的逻辑乘为 0，即 $m_i \cdot m_j=0(i\neq j)$。

iv）三个变量的最小项中，每个最小项都有三个相邻项。所谓相邻项，是指如果两个最小项中只有一个变量互为相反变量，其余变量均相同，则称这两个最小项在逻辑上是相邻的，又称逻辑上的相邻性。例如，ABC 和 $AB\overline{C}$ 两个最小项中除变量 C 互为相反变量外，A 和 B 两个变量均相同，所以 ABC 和 $AB\overline{C}$ 是相邻项。ABC 还有两个相邻项 $A\overline{B}C$ 和 $\overline{A}BC$。n 个变量的每个最小项都有 n 个相邻项。

v）n 个变量有 2^n 个最小项（$m_0,m_1,\cdots,m_{2^n-1}$）。

② 最小项表达式

任何一个逻辑函数表达式都可以转换成最小项之和的形式。用最小项之和表示的逻辑函数表达式称为最小项表达式。例如，$F(A,B,C)=AB+\overline{A}C$，F 的表达式中每项只含有两个变量，需要把每项缺少的变量补入，使之成为最小项形式，而又不改变原有逻辑关系，则

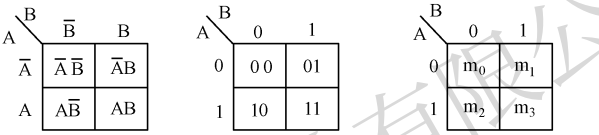
$$F(A,B,C)=AB\cdot(C+\overline{C})+\overline{A}C\cdot(B+\overline{B})=ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C=m_7+m_6+m_3+m_1$$

(2)卡诺图的画法

卡诺图是根据最小项之间相邻项的关系画出来的方格图。每个小方格代表逻辑函数的一个最小项,下面以 2～5 个变量为例来说明卡诺图的画法。

① 两个变量的卡诺图

两个变量 A 和 B 共有 4 个最小项$\overline{A}\,\overline{B}$、$\overline{A}B$、$A\overline{B}$、AB。用 4 个相邻的方格表示这 4 个最小项之间的相邻关系,如图 1-8 所示。画卡诺图时将变量分为两组,A 为一组,B 为一组。卡诺图的左边线用变量 A 的反变量$\overline{A}$和原变量 A 表示,即上边一行表示$\overline{A}$,下边一行表示 A。卡诺图的上边线用变量 B 的反变量$\overline{B}$和原变量 B 表示,即左边一列表示$\overline{B}$,右边一列表示 B。行和列相与就是最小项,记入行和列相交的小方格内,如图 1-8(a)所示。原变量用 1 表示,反变量用 0 表示,如图 1-8(b)所示。每个最小项用编号表示,结果如图 1-8(c)所示。从卡诺图 1-8(a)中可以看出,每对相邻小方格表示的最小项都是相邻项。

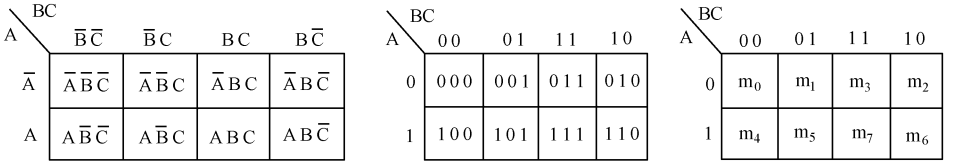


(a)每格标最小项　(b)每格标变量取值　(c)每格标最小项编号

图 1-8　两个变量的卡诺图

② 三个变量的卡诺图

三个变量 A、B 和 C 共有 8 个最小项,则用 8 个小方格分别表示各个最小项,图 1-9(a)是三个变量卡诺图的一种画法。A、B 和 C 三个变量分为两组,A 为一组,B 和 C 为一组,分别表示行和列。第 1 行表示$\overline{A}$,第 2 行表示 A,第 1 列表示$\overline{B}\,\overline{C}$,第 2 列表示$\overline{B}C$,第 3 列表示 BC,第 4 列表示$B\overline{C}$。$\overline{A}$和 A 标在卡诺图左边线外,$\overline{B}\,\overline{C}$、$\overline{B}C$、BC 和$B\overline{C}$标在卡诺图上边线外。任意相邻两列都具有相邻性,两个边列(两端的列)也具有相邻性,相邻的两行显然具有相邻性,与上同理可以画出图 1-9(b)和(c)。例如,m_0 的相邻项有 m_1、m_2 和 m_4。



(a)每格标最小项　(b)每格标变量取值　(c)每格标最小项编号

图 1-9　三个变量的卡诺图

三个变量的卡诺图是在两个变量的卡诺图基础上画出来的。以两个变量的卡诺图右边线为对称轴作一个对称图形。三个变量的卡诺图上边线变量 B,C 的标注:轴线左边的变量 C 和两个变量的卡诺图上边线变量的标注相同,而轴线右边的变量 C 则与左边的对称填写;轴线左边的 B 均填写 0($\overline{B}$),而右边的 B 填写 1(B)。三个变量的卡诺图左边线标注变量 $\overline{A}$ 和 A,和两个变量的卡诺图标注相同。这样便构成了三个变量的卡诺图,如图 1-9 所示。

③ 4 个变量的卡诺图

4 个变量 A、B、C、D 共有 16 个最小项,则用 16 个小方格分别表示各个最小项,图 1-10 是

4 个变量的卡诺图。A、B、C、D 这 4 个变量分为两组，A 和 B 为一组，C 和 D 为一组，分别表示行和列。4 个变量的卡诺图也是在三个变量卡诺图基础上画出来的。以三个变量的卡诺图下边线为对称轴，作一个对称图形。4 个变量的卡诺图左边线变量 A 和 B 的标注：轴线左边的变量 B 与三个变量的卡诺图左边线变量的标注相同，而轴线下边的变量 B 则与上边的对称填写；轴线上边的 A 均填写 0，而下边的 A 均填写 1。4 个变量的卡诺图上边线变量 C 和 D 的标注与三个变量卡诺图的标注相同。这样便构成了 4 个变量的卡诺图。

④ 5 个变量的卡诺图

5 个变量 A、B、C、D、E 共有 32 个最小项，则用 32 个小方格分别表示各个最小项，图 1-11 是 5 个变量的卡诺图，5 个变量分为两组，A 和 B 为一组，C、D 和 E 为一组，分别表示行和列。5 个变量的卡诺图是在 4 个变量的卡诺图基础上画出来的。以 4 个变量的卡诺图右边线为对称轴作一个对称图形，5 个变量的卡诺图上边线变量 C、D 和 E 的标注与上同理，轴线左边的 D 和 E 与 4 个变量的卡诺图 C 和 D 标注一样，轴线右边则与左边对称填写；轴线左边的 C 均填写 0，而右边的 C 均填写 1。5 个变量的卡诺图左边线变量 A 和 B 的标注与 4 个变量卡诺图的标注相同。这样便构成了 5 个变量的卡诺图，如图 1-11 所示。方格中标写的 0，1，2，…，31 是最小项编号的简写。

n 个变量的卡诺图是以 $n-1$ 个变量的卡诺图为基础画出来的。两个变量的卡诺图是最基础的卡诺图。

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

图 1-10　4 个变量的卡诺图

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

图 1-11　5 个变量的卡诺图

(3)用卡诺图表示逻辑函数

已知逻辑函数表达式就可画出相应的卡诺图。如果逻辑函数是最小项表达式，则在相同变量的卡诺图中，与每个最小项相对应的小方格内填 1，其余填 0；若逻辑函数是一般式，则先把一般式变为最小项表达式后，再填卡诺图，或直接按逻辑函数一般式填卡诺图亦可。

如果已知逻辑函数真值表，对应于变量逻辑取值的每种组合，函数值为 1 或 0，则在相同变量卡诺图的对应小方格内填 1 或填 0，就得到逻辑函数的卡诺图。

例如，用卡诺图表示逻辑函数 $F_1=AB+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\,\overline{C}$，此逻辑函数表达式为一般式。式中第 2 和 3 项是最小项，编号为 m_1 和 m_2，式中第 1 项只有两个变量 A 和 B，缺少变量 C，这一项不是最小项，将 AB 乘以 $(C+\overline{C})=1$，即 $AB(C+\overline{C})=ABC+AB\,\overline{C}$，于是逻辑函数 F_1 的最小项表达式为

$$F_1=ABC+AB\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\,\overline{C}=m_7+m_6+m_1+m_2=\sum(m_1,m_2,m_6,m_7)$$

将上式的最小项按其编号填入下面卡诺图中相对应的小方格内，标记为 1，其余的小方格填 0，如图 1-12(a)所示。此卡诺图表示了逻辑函数 F_1。也可直接将 AB 项填入卡诺图。先找出变量 A 为 1 的行，即第 2 行，用虚线表示出来，再找出 B 为 1 的列，即第 3、4 列，也用虚线表示出来，则行与列虚线相交处的小方格 m_6 和 m_7（$AB\,\overline{C}$ 和 ABC）就是包含 AB 项的两个最小

项，如图 1-12(b)所示。再把 m_1 和 m_2 两个最小项填入此卡诺图中，则此卡诺图表示逻辑函数 $F_1=AB+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\,\overline{C}$。

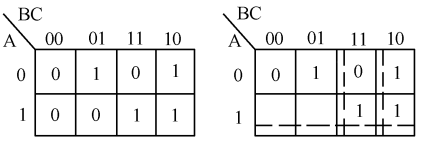


图 1-12　逻辑函数 F_1 的卡诺图

已知逻辑函数 F_2 的真值表，如表 1-13 所示。要用卡诺图表示此逻辑函数，可把真值表中变量 A、B 和 C 取值的每种组合(函数值为 1 或 0)直接填入三个变量的卡诺图对应小方格内，如图 1-13 所示。此卡诺图即为真值表所表示的逻辑函数 F_2。

表 1-13　真值表

A	B	C	F_2	A	B	C	F_2
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1

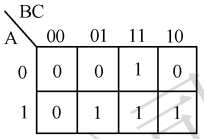


图 1-13　表 1-13 的卡诺图

(4)用卡诺图化简逻辑函数

卡诺图的最大特点是形象地表达了最小项之间的相邻性，而且边行(或边列)的小方格也具有相邻性。故可利用 $A+\overline{A}=1$ 和 $AB+A\,\overline{B}=A$ 进行化简。进行化简之前必须明确合并最小项的规则。

① 合并最小项的规则

i)两个相邻最小项的合并

图 1-14 表示了两个相邻最小项合并的各种情况。两个相邻的画有 1 的小方格可以画入同一圈里，即表示两个最小项相加使两个相邻的最小项合并成一项，消去互为反变量的变量。在图 1-14中把标记 1 的相邻小方格用虚线圈在一起，从中可以观察到，用虚线圈起的有 1 的相邻小方格中都存在着一个互为反变量的变量：图 1-14(a) 中是 B 和$\overline{B}$；图 1-14(b)中是 D 和$\overline{D}$；图 1-14(c)中是 A 和$\overline{A}$；图 1-14(d) 中是 C 和$\overline{C}$。它们均被消去。而每个圈里相邻小方格中相同变量作为合并后的与项：图 1-14(a) 为 ACD，图 1-14(b)为 ABC，图 1-14(c)为 $\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$，图 1-14(d)为$\overline{A}B\,\overline{D}$。

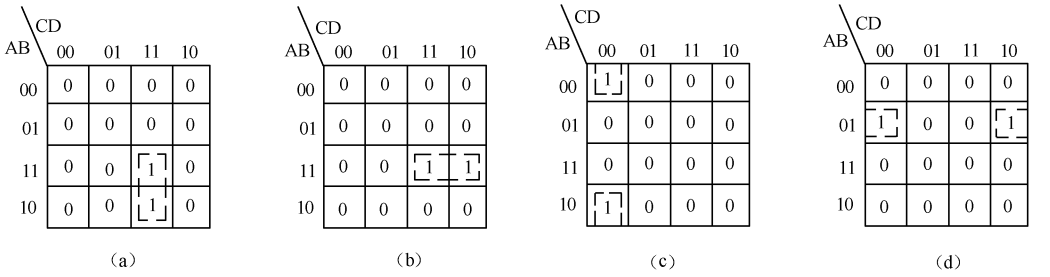


图 1-14　两个相邻最小项的合并

ii)4 个相邻最小项的合并

图 1-15 表示了 4 个相邻最小项合并的各种情况。在图 1-15(a)中，m_9、m_{11}、m_{13}、m_{15}这 4 个标有 1 的小方格组成一个田字格，该田字格中列对应的变量为 C 和 D，其中 D 的取值相同，C 的取值不同；而行对应的变量为 A 和 B，其中 A 的取值相同，B 的取值不同。所以 C 和 B 两个变量

被消去，而 AD 作为合并后的与项。在图 1-15(b)、(c)、(d)、(e)、(f)中，最后合并结果分别为$\overline{A}B$、$C\overline{D}$、$\overline{B}\,\overline{D}$、$B\overline{D}$、$\overline{B}\,\overline{C}$。

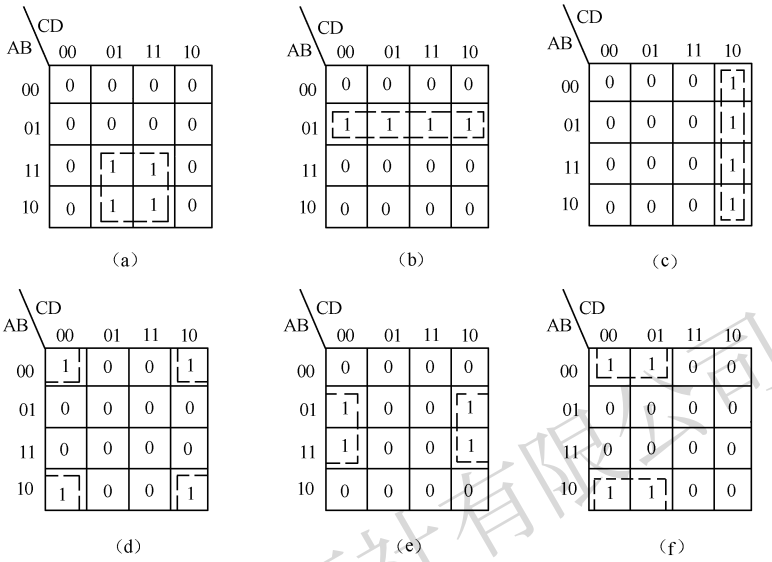


图 1-15　4 个相邻最小项的合并

iii)8 个相邻最小项的合并

图 1-16 表示了 8 个相邻最小项合并的各种情况：相邻的两行或相邻的两列；两个边行或两个边列。这样 8 个标有 1 的相邻小方格可以圈在一起合并成一项。合并时可以消去三个互为反变量的变量，最后只剩下一个变量构成一项。图 1-16(a)、(b)、(c)、(d)化简后分别为 B、D、$\overline{B}$、$\overline{D}$。

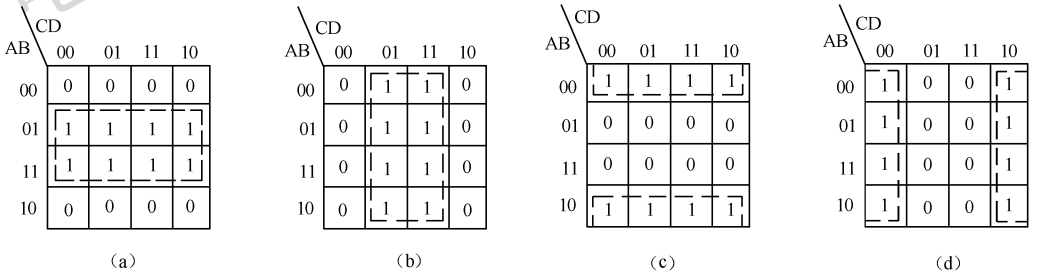


图 1-16　8 个相邻最小项的合并

由上面分析可见，只有 2^i($i=1,2,3,\cdots$)个相邻最小项才能合并，并消去 i 个变量，因为 2^i 个相邻最小项中正好包含了 i 个变量的全部 2^i 个最小项。根据最小项的性质，i 个变量的全部最小项之和为 1，即全部最小项合并后为 1，因此 2^i 个相邻最小项合并后可消去 i 个变量。

② 用卡诺图化简逻辑函数

用卡诺图化简逻辑函数的优点是直观、形象、简单，便于掌握。下面举例说明化简过程。化简逻辑函数 $F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B\,\overline{C}+AB\,\overline{D}+\overline{A}BC+BCD$。

第一步，把逻辑函数 F 用卡诺图表示，如图 1-17 所示。

第二步，合并最小项，即把标有 1 的小方格按合并最小项的规则分组画圈。画圈的原则是：每个圈内相邻最小项为 1 的个数必须是 $2^i(i=0,1,2,3,\cdots)$ 个；每个圈内为 1 的最小项可以多次被圈，但每个圈内至少有一个未曾被圈过的为 1 的最小项；为保证与项的个数最少，圈的个数应最少，每个圈应尽可能大，这样消除的变量多；所有为 1 的最小项必须全部圈完。

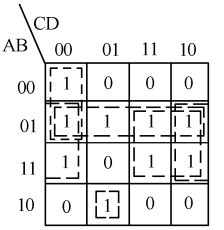


图 1-17　逻辑函数 F 的卡诺图

该卡诺图中共画 5 个圈：m_9；m_0,m_4；m_4,m_5,m_6,m_7；m_4,m_{12},m_6,m_{14}；m_6,m_7,m_{14},m_{15}。每个圈合并后分别为 $A\overline{B}\,\overline{C}D$、$\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}$、$\overline{A}B$、$BC$、$B\,\overline{D}$。

第三步，将合并后的最简项进行逻辑加，即

$$F=A\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}B+BC+B\,\overline{D}$$

3. 具有无关项的逻辑函数化简

在一些逻辑函数中，变量取值的某些组合所对应的最小项不会出现或不允许出现，这些最小项称为约束项。例如，8421 BCD 码中 1010～1111 这 6 个最小项就是约束项。而在另一些逻辑函数中，变量取值的某些组合既可以是 1，也可以是 0，这些最小项称为任意项。约束项和任意项统称为无关项。在逻辑函数化简时，无关项取值可以为 1，也可以为 0。

在逻辑函数表达式中，无关项通常用 $\sum_d(\cdots)$ 表示。在真值表和卡诺图中，无关项对应的函数值用“×”表示。例如，某逻辑函数 $F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$，其无关项为 $A\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}C$，则其逻辑函数表达式可以写为 $F(A,B,C)=\sum(m_0,m_1)+\sum_d(m_4,m_5)$。其真值表如表 1-14 所示，其卡诺图如图 1-18 所示。

表 1-14　真值表

A	B	C	F	A	B	C	F
0	0	0	1	1	0	0	×
0	0	1	1	1	0	1	×
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0

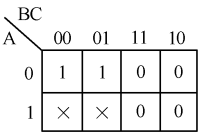


图 1-18　表 1-14 的卡诺图

这里借助无关项对应的函数值可以为 0 或为 1 的特点进行逻辑函数化简，它可以使逻辑函数化为最简。不考虑无关项时，逻辑函数化简后 $F=\overline{A}\,\overline{B}$；考虑无关项时，逻辑函数化简后 $F=\overline{B}$。

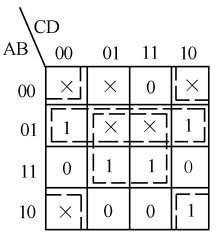


图 1-19　[例 1-1]的卡诺图

【例 1-1】　用卡诺图化简逻辑函数 $F(A,B,C,D)=\sum(m_{15},m_{13},m_{10},m_6,m_4)+\sum_d(m_8,m_7,m_5,m_2,m_1,m_0)$。

解：用卡诺图表示逻辑函数 F，如图 1-19 所示，如果不考虑无关项，则 F 化简后表达式为

$$F=\overline{A}B\,\overline{D}+ABD+A\,\overline{B}C\,\overline{D}$$

如果考虑无关项，利用无关项进行化简，则 F 化简后表达式为

$$F=\overline{A}B+BD+\overline{B}\,\overline{D}$$

由上述两个化简后的表达式可以看出，利用无关项进行逻辑

函数化简，可使函数表达式中的每项进一步简化。但是，该表达式是受约束的，即 m_8，m_7，m_5，m_2，m_1，m_0 不准出现。

习题 1

1-1　将二进制数转换为十进制数：$(1011)_2$，$(11011)_2$，$(110110)_2$，$(1101100)_2$。

1-2　将二进制数转换为十六进制数：$(11101011)_2$，$(1010110101)_2$，$(11100101110)_2$。

1-3　将二进制数转换为八进制数：$(10111)_2$，$(101110)_2$，$(1011100)_2$，$(101110001)_2$。

1-4　将十六进制数转换为二进制数：$(4AC)_{16}$，$(ACB9)_{16}$，$(78ADF)_{16}$，$(98EBC)_{16}$。

1-5　将八进制数和十六进制数转换为十进制数：$(675)_8$，$(A675)_{16}$，$(111)_8$，$(111A)_{16}$。

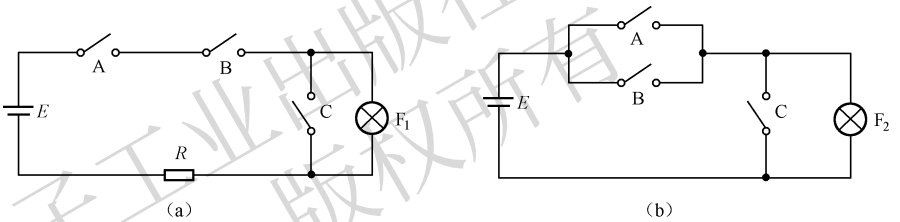
1-6　将十进制数转换为八进制数：$(105)_{10}$，$(99)_{10}$，$(9)_{10}$，$(900)_{10}$。

1-7　将十进制数转换为十六进制数：$(100)_{10}$，$(10)_{10}$，$(110)_{10}$，$(88)_{10}$。

1-8　将十进制数写成 8421 BCD 码：$(987)_{10}$，$(3456)_{10}$，$(7531)_{10}$。

1-9　将 8421 BCD 码写成十进制数：$(010110001001)_{8421}$，$(1000100100111000)_{8421}$。

1-10　电路如题图 1-1 所示，设开关闭合为 1，断开为 0；灯亮为 1，灭为 0。试写出灯 F_1 和 F_2 对开关 A，B，C 的逻辑关系真值表，并写出 F_1 和 F_2 对 A，B，C 的逻辑函数表达式。



题图 1-1　习题 1-10 的图

1-11　判断下列逻辑运算是否正确？并给出说明。

(1)若 $A+B=A$，则 $B=0$　　(2) 若 $1+B=A\cdot B$，则 $A=B=1$

(3)若 $A\cdot B=A\cdot C$，则 $B=C$

1-12　在函数 $F=AB+C$ 的真值表中，$F=1$ 的状态有多少个？

1-13　用真值表法证明：

(1)$AB+C=(A+C)(B+C)$　　(2) $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

1-14　用逻辑代数的基本公式和常用公式化简下列逻辑函数：

(1)$F_1=A\overline{B}+\overline{A}B+A$　　(2)$F_2=A\overline{B}\,\overline{C}+ABC+A\overline{B}C+AB\overline{C}+\overline{A}B$

(3)$F_3=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}+ABCD$　　(4)$F_4=AB+\overline{A}C+BC+A+\overline{C}$

1-15　证明下列异或运算公式：

$A\oplus 0=A$，$A\oplus 1=\overline{A}$，$A\oplus A=0$，$A\oplus\overline{A}=1$，$AB\oplus A\overline{B}=A$，$A\oplus\overline{B}=\overline{A\oplus B}$

1-16　用公式法证明下列等式：

(1) $A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}=\overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A$　　(2) $\overline{A}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}+BC+\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}=\overline{A}+BC$

1-17　求下列逻辑函数的反函数：

(1)$F_1=A\overline{B}+\overline{A}B$　　(2)$F_2=ABC+\overline{\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}}$

(3)$F_3=\overline{A+B+\overline{C}+\overline{D+E}}$　　(4)$F_4=(A+B+C)\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$

1-18　求下列逻辑函数的对偶式：

(1)$F_1=AB+CD$　　(2)$F_2=(A+B)\cdot(C+D)$

(3)$F_3=\overline{A+B}+\overline{A}\cdot\overline{B}$　　(4)$F_4=\overline{A+B+\overline{C}+\overline{DF}}$

1-19　用卡诺图化简下列函数：

(1)$F(A,B,C)=\sum(m_0,m_1,m_2,m_4,m_5,m_7)$

(2)$F(A,B,C,D)=\sum(m_2,m_3,m_6,m_7,m_8,m_{10},m_{12},m_{14})$

(3)$F(A,B,C,D)=\sum(m_0,m_1,m_2,m_3,m_4,m_6,m_8,m_9,m_{10},m_{11},m_{12},m_{14})$

1-20　用卡诺图化简下列函数：

(1)$F=\overline{A}B\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}BC\,\overline{D}+AB\,\overline{C}D+ABCD+A\,\overline{B}C\,\overline{D}$

无关项：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\,\overline{D}+\overline{A}B\,\overline{C}D+\overline{A}BCD+A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

(2)$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}BCD+A\,\overline{B}CD$

无关项：$\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}B\,\overline{C}D+ABCD$

1-21　用卡诺图判断逻辑函数 Z 与 Y 有何关系。

(1) $Z=AB+BC+CA$

$Y=\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}$

(2) $Z=D+B\,\overline{A}+\overline{C}B+\overline{C}\,\overline{A}+C\,\overline{B}A$

$Y=A\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+ABC\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}C\,\overline{D}$