第 3 章　功　与　能

"长风破浪会有时，直挂云帆济沧海"，很久以前，人类就利用水和风持续作用，在帆船上实现自己的远航之梦和探索之旅。在理论上，牛顿第二定律只阐明了力和加速度的瞬时关系，用它来研究水和风对船的持续作用是比较复杂的。我们也可以从空间和时间两个角度去研究，即研究力的作用效果在空间和时间的积累。本章将从力的空间累积效应出发来阐述功与能的关系。"能"存在于物理学的一切运动形式中，是极为重要的基本概念，能量守恒定律是自然界的普遍规律。

本章只在机械运动范围内建立功与能的概念、关系及机械能守恒定律，我们将发现机械能守恒定律是解决动力学问题的有力工具。

3.1　功、功率

3.1.1　功

人们在生产实践和科学研究中，逐渐形成了"功"的概念。功与通常所说的"工作"有相似之处，但不完全相同。物体在力的作用下发生了位移，力对物体的作用效果在这段位移内会积累起来，力对物体就做了功。"路遥知马力"就是描述马在长距离负重前行中有多少动力克服阻力做功，即马或者车辆的续航能力。功既与力有关，又与位移有关。

如果物体在恒力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功 W 定义为：力在作用点位移方向的分量与位移大小的乘积，即

$$W = F\left|\Delta\boldsymbol{r}\right|\cos\theta \tag{3.1}$$

式中，θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的夹角，如图 3.1 所示。

由矢量分析可知，功等于力与位移的标积，即

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} \tag{3.2}$$

因此，功是标量，有正负之分，其值不仅与力 $\boldsymbol{F}$、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小有关，还依赖二者间的夹角。当 $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 时，$W > 0$，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做正功，即力推动物体做功；当 $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta < \pi$ 时，$W < 0$，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体做负功，即力阻碍物体做功，或称物体克服力 $\boldsymbol{F}$ 做功。

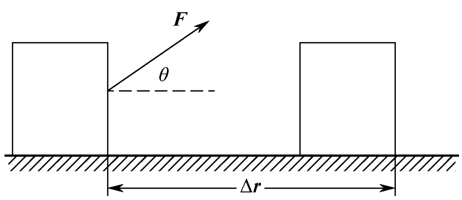

图 3.1　恒力的功

在国际单位制中，功的单位是牛顿·米，称为焦耳（J），$1\text{J} = 1\text{N}\cdot\text{m}$。

在许多情况下质点沿曲线运动，如图 3.2 所示，质点在从点 a 运动到点 b 的过程中，作用于质点上的力不仅大小在变化，而且方向也在变化。在这种情况下，可以将曲线分成许多小段。第 i 小段对应的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}_i$，力为 $\boldsymbol{F}_i$。当位移 $\Delta\boldsymbol{r}_i$ 足够小时，第 i 小段的运动可视

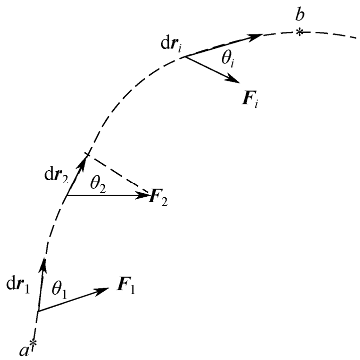

图 3.2 变力的功

为直线运动，力 $\boldsymbol{F}_i$ 也可视为恒力，于是根据式（3.2）计算出力 $\boldsymbol{F}_i$ 在第 i 小段所做的功

$$\Delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i$$

将各小段的功相加，即为物体从 a 点运动到 b 点过程中变力 $\boldsymbol{F}$ 做的总功，即

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i F_i |\Delta \boldsymbol{r}_i| \cos\theta_i$$

当各小段的位移趋于无限小时，上式变为积分式

$$W = \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b F\cos\theta |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \int_a^b F\cos\theta \mathrm{d}s \tag{3.3}$$

式中，$\mathrm{d}s$ 为元路程。

式（3.3）表示变力做的功等于力 F 沿 ab 曲线的线积分。变力做的功除用线积分计算外，也可用图解法来计算，如图 3.3 所示。当力随路程变化的关系已知时，以 r 为横坐标，以 $F_r = F\cos\theta$ 为纵坐标，所画的曲线表示一质点沿路径 r 运动时，力的分量 F_r 随 r 变化的情况。显然，曲线下每一小窄条矩形的面积就是外力 $\boldsymbol{F}_i$ 在该位移 $\Delta\boldsymbol{r}_i$ 上所做的功 $\Delta W_i = \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta\boldsymbol{r}_i$。$\Delta\boldsymbol{r}_i$ 的值越小，矩形越窄，则矩形面积之和越接近曲线下的面积。当 $\Delta\boldsymbol{r}_i$ 趋近于零时，曲线下的面积在数值上就等于变力在整个路程上所做的功，F_r-r 图像称为示功图。

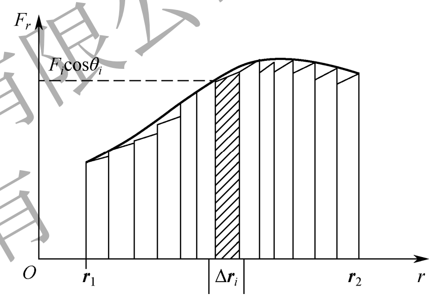

图 3.3 示功图

如果物体同时受几个作用力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 的作用，这些力的合力 $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$，则合力所做的功为

$$W = \int_{ab} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{ab} \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \int_{ab} \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i W_i$$

即合力对物体所做的功等于各分力分别做功的代数和。

3.1.2 功率

在处理实际问题时，不仅需要知道力所做功的多少，而且需要关心力做功的快慢。表示力做功快慢的物理量称为功率，将其定义为单位时间内力所做的功。设 Δt 时间内，力所做的功为 ΔW，则比值 $\dfrac{\Delta W}{\Delta t}$ 称为平均功率，用 $\overline{P}$ 表示

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，平均功率的极限值叫作瞬时功率，用 P 表示

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \tag{3.4}$$

或

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F\cos\theta |\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t} = F\cos\theta\upsilon = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\upsilon} \tag{3.5}$$

瞬时功率等于速度的大小与力沿速度方向分量的乘积。式（3.5）在分析机械牵引方面很重要，在机械功率一定时，当所需牵引力增大时，速度减小；当所需牵引力减小时，速度增大。如切削机床，当进给量增大、所需牵引力增大时，则转速减小；反之则转速增大。汽车爬坡时，需调低挡减速以增大牵引力。

功率的单位是瓦特，简称瓦（W），工程上常用马力作为单位

$$1\text{ 马力} = 0.735\text{kW} = 735\text{W}$$

【例 3.1】 一个质量为 m 的小球竖直落入水中，刚接触水面时其速率为 υ_0。设此球在水中所受的浮力与重力相等，水的阻力 $F_\mathrm{r} = -b\upsilon$，$b$ 为一常量，求阻力对球做的功与时间的函数关系。

解：建立图 3.4 所示的坐标系

$$W = \int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int b\upsilon \mathrm{d}x$$

$$= -\int b\upsilon \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = -\int b\upsilon^2 \mathrm{d}t$$

由

$$\upsilon = \upsilon_0 \mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}$$

得

$$W = -b\upsilon_0^2 \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2(\mathrm{e}^{-\frac{2b}{m}t} - 1)$$

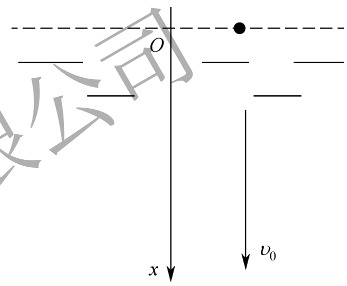

图 3.4　例 3.1 图

3.2　动能、动能定理

3.2.1　动能

一切运动着的物体都具有做功的本领。例如，水流能带动水轮机发电，高速飞行的子弹能够穿透木板。这表明物体具有与运动状态有关的能量，这种能量称为动能，用符号 E_k 表示。一个质量为 m，以速度 υ 运动的物体，它具有的动能为

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \tag{3.6}$$

式（3.6）表明，动能是标量，且为正值，其量纲和单位与功相同。因速度是描述物体运动状态的物理量，而一定质量的物体的动能只由速度决定，所以动能也是描述物体运动状态的物理量，只不过它是从能量的角度描述的。由于速度具有相对性，所以动能也具有相对性，在不同的参考系中，动能具有不同的量值。

3.2.2　动能定理

合外力的作用会使物体的运动状态发生变化，动能也随之变化，动能的变化与合外力所做的功之间有着确定的关系。

设一质量为 m 的质点在合外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿曲线从 a 点运动到 b 点，如图 3.5 所示，质点在 a、b 两点的速度分别为 $\boldsymbol{\upsilon}_1$ 和 $\boldsymbol{\upsilon}_2$。合外力的功表示为

$$W=\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b F_\tau\,|\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|$$

将 $F_\tau = m\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$、$|\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|=\upsilon\mathrm{d}t$ 代入上式，可得

$$\begin{aligned} W &=\int_a^b m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\,|\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,|=\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon\mathrm{d}\upsilon=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \\ &=E_{\mathrm{k}b}-E_{\mathrm{k}a} \end{aligned} \tag{3.7}$$

式（3.7）表明，合外力所做的功等于质点动能的增量，这一定量关系称为质点的动能定理。

由动能定理可知以下几点。

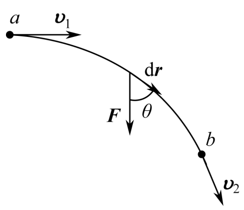

图 3.5　动能定理

（1）要使质点的动能增大，合外力必须对质点做正功；要使质点的动能减小，合外力必须对质点做负功，即合外力应阻止物体运动，此时质点消耗自身动能对外做功，这也表明物体因运动而具有做功的本领。

（2）不论质点所受合外力如何随位置变化，也不论运动轨迹如何，质点由初位置到末位置的动能增量总等于合外力对物体所做的功。因此，动能定理虽然由牛顿第二定律导出，但在解决动力学问题时，比用牛顿第二定律简便得多，它提供了一种求变力做功的方法，无须进行积分运算。

（3）功和能是既有联系又有区别的不同的物理量，动能由描述质点运动状态的速度的值决定，因此动能是状态量。而功是在力作用下经过一段位移的过程中完成的，因此功是过程量。可以说质点在 a、b 点各有一定的动能但不能说质点在 a、b 点各有一定的功，功用来量度 a、b 两点间动能的变化。应用动能定理时应注意，式（3.7）中的各量均是对同一质点，且相对同一参考系的。此外，动能定理只适用于惯性系。

3.2.3　质点系的动能定理

在实际问题中，往往涉及多个质点组成的系统，称为质点系。质点系内各质点之间的作用力称为质点系受到的内力；质点系外的其他物体对质点系内各质点的作用力称为质点系受到的外力。对质点系而言，其总动能增量与外力做的总功和内力做的总功之间也有确定的关系。在质点系中，无论是质点系受到的外力还是内力，对第 i 个质点都是该质点受到的外力。因此，外力对其做的功为 $W_{i外}$，内力对其做的功为 $W_{i内}$，其初动能为 $\dfrac{1}{2}m_i\upsilon_{i0}^2$，末动能为 $\dfrac{1}{2}m_i\upsilon_i^2$。由质点的动能定理可得

$$W_{i外}+W_{i内}=\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2-\frac{1}{2}m_i\upsilon_{i0}^2$$

对质点系中的所有质点求和，则有

$$\sum_i W_{i外}+\sum_i W_{i内}=\sum_i\frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2-\sum_i\frac{1}{2}m_i\upsilon_{i0}^2$$

令 $W_{外}=\sum\limits_i W_{i外}$ 为外力对质点系做的总功，$W_{内}=\sum\limits_i W_{i内}$ 为内力对质点系做的总功，$E_{\mathrm{k}0}=$

$\sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_{i0}^2$ 、 $E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \upsilon_i^2$ 为质点系的初、末总动能，则有

$$W_{外} + W_{内} = E_k - E_{k0} \tag{3.8}$$

式（3.8）表明，质点系总动能的增量等于外力对质点系做的总功与内力对各质点做的总功之和，这一关系称为质点系的动能定理。

质点系的动能定理比质点的动能定理具有更广泛的适用性，许多实际物体不能视为质点，但都可视为质点系。在大小相等、方向相反的两个内力的作用下，两个物体的位移不一定相同，质点系内力做的总功可以不为零。因此，对质点系而言，考虑总动能的变化时，不能忽略内力对各质点做的功。在实际中，有许多内力做功使质点系总动能发生变化的例子，如炮弹的爆炸、人体的运动等。

【例 3. 2】一个质量为 1kg 的小球系在长为 1m 的绳子下端，绳子的上端固定在天花板上，如图 3.6 所示。开始时，把绳子放在与竖直线呈 30° 角处，然后放手使小球沿圆弧下落，试求绳子与竖直线呈 10° 角时小球的速率。

解：小球在下落过程中受到重力 $\boldsymbol{P}$ 和绳子的拉力 $\boldsymbol{F}_T$ 的作用，两力做的功为

$$\begin{aligned} dW &= \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_T \cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{r} = -mgl\cos\varphi d\theta \\ &= -mgl\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{\theta_0}^{\theta} -mgl\sin\theta d\theta \\ &= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) \end{aligned}$$

由动能定理

$$W = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

有

$$\upsilon = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)} \approx 1.53\text{m/s}$$

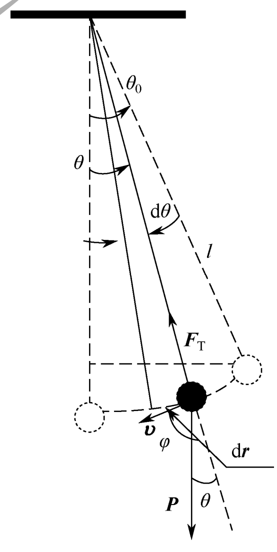

图 3.6　例 3.2 图

3.3　保守力、势能

3.3.1　保守力与非保守力

在实际中，各种力做功的性质并不完全相同，有的力做的功与路径有关，有的力做的功与路径无关。这里主要讨论重力、弹簧弹力、引力和摩擦力做功的特点，并引入保守力和非保守力的概念。

1．重力的功

如图 3.7 所示，设在地面附近，有一质量为 m 的物体，在重力的作用下，从 a 点沿任意路径 acb 运动到 b 点。现在计算在此过程中重力所做的功，取中间任意位移 $d\boldsymbol{r}$ ，则重力的元功为

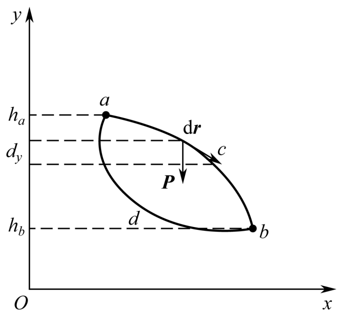

图 3.7　重力的功

$$\mathrm{d}W = m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = mgd_y$$

从 a 点到 b 点，重力做的总功为

$$W = \int_a^b m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{h_a}^{h_b} mgd_y = -mg(h_b - h_a) \tag{3.9}$$

显然，从 a 点沿其他任意路程 adb 运动到 b 点，重力做的功也为式（3.9）。由此可见，重力做功的特点是：功等于 mgh 在初、末位置的差值，与运动路径无关。不难证明，当物体从 a 点沿路径 acb 到达 b 点后，又沿任一路径 bda 运动一周返回 a 点时，重力做的功为零。

2．弹簧弹力的功

设在光滑平面上有一轻弹簧，左端固定，右端系一质量为 m 的物体，当物体从 a 点移到 b 点时，如图 3.8 所示，计算在此过程中弹簧弹力做的功。

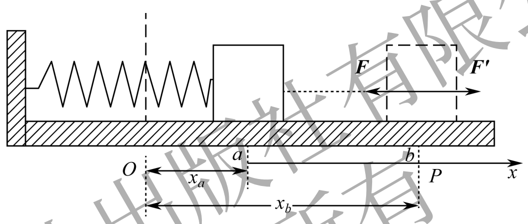

图 3.8　弹簧弹力的功

取弹簧原长时物体所在点 O 为坐标原点，向右为 x 轴正向。a 点坐标为 x_a，b 点坐标为 x_b，在 a、b 间任取一位移元 d$\boldsymbol{r}$。此时弹簧的伸长量为 x，根据胡克定律，弹簧弹力的大小 $F = -kx$。在该力的作用下，完成 d$\boldsymbol{r}$ 的元功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -kx\mathrm{d}x$$

物体从 a 点移动到 b 点弹力做的总功为

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathrm{d}W = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{x_a}^{x_b} kx\mathrm{d}x \\ &= -\left(\frac{1}{2}kx_b^2 - \frac{1}{2}kx_a^2\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

可见弹簧弹力做的功等于 $\frac{1}{2}kx^2$ 在初、末位置的差值，与运动路径无关。在弹簧弹力的作用下，当质点从某一位置经任意路径又回到原位置时，弹簧弹力做的功为零。

3．引力的功

设有质量分别为 M 和 m 的两质点，质量为 m 的质点受质量为 M 的质点的引力为

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r} \tag{3.11}$$

式中，G 为引力常量，r 为两质点之间的距离，$\boldsymbol{e}_\mathrm{r}$ 为由 m 指向 M 的单位方向矢量。若质量为 M 的质点在 O 点固定不动，质量为 m 的质点从 A 点沿任意路径运动到 B 点，计算引力做的功。

如图 3.9 所示，在 AB 路径上取一位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，M 与 m 之间的位置矢量从 $\boldsymbol{r}$ 变到 $\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，引力在位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 过程中做的元功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

在质量为 m 的质点从 A 点运动到 B 点的过程中，引力所做的总功为

$$W=\int_A^B \mathrm{d}W=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_A^B G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{e}_\mathrm{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_{r_A}^{r_B} G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$
$$=-\left(G\frac{Mm}{r_A}-G\frac{Mm}{r_B}\right) \tag{3.12}$$

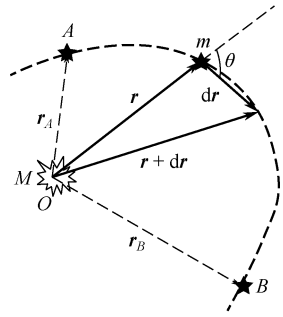

图 3.9　引力的功

可见引力做的功等于 $-G\dfrac{Mm}{r}$ 在初、末位置的差值，与运动路径无关。当质量为 m 的质点沿任意闭合路径运动一周时，引力做的功为零。

4．摩擦力的功

在水平面内，一质量为 m 的物体从 A 点运动到 B 点，路径有两条：一条为直线 $\overline{AB}$，另一条是以 AB 为直径的半圆弧 $\widehat{AB}$，如图 3.10 所示。在物体运动过程中，摩擦力大小均为 $f=\mu mg$，计算物体沿不同路径从 A 点运动到 B 点过程中摩擦力做的功。

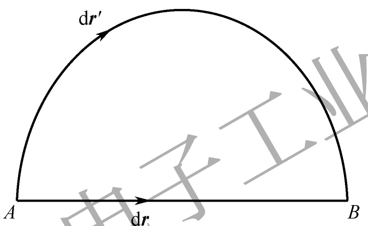

图 3.10　摩擦力的功

在直线 $\overline{AB}$ 或弧线 $\widehat{AB}$ 路径上分别取位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$，摩擦力在位移元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 过程中做的元功为

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mu mg\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right|$$

负号表示摩擦力与位移的方向相反。当物体从 A 点沿路径 $\overline{AB}$ 运动到 B 点时，摩擦力做的总功为

$$W=\int_A^B \mathrm{d}W=\int_A^B \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_A^B \mu mg\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right|=-\mu mg\overline{AB}$$

而沿路径 $\widehat{AB}$ 从 A 点运动到 B 点时，摩擦力做的总功为

$$W=\int_A^B \mathrm{d}W=\int_A^B \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_A^B \mu mg\left|\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right|=-\mu mg\widehat{AB}=-\frac{\pi}{2}\mu mg\overline{AB}$$

可见摩擦力做功，不仅与质点的初、末位置有关，还与所经的路径有关。

综上所述，存在两种性质不同的力，一种是力对物体做的功只与物体的初、末位置有关而与物体运动的路径无关，这种力称为保守力。在保守力的作用下，物体沿闭合路径运动一周时，力所做的功等于零。其表达式为

$$\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{3.13}$$

式（3.13）表示沿任意闭合路径 L 的线积分。常见的保守力有重力、弹簧弹力、引力、静电力等。另一种是做功与运动路径有关的力，称为非保守力，非保守力不满足式（3.13）。常见的非保守力有摩擦力、冲击力、安培力、非静电场力等。

3.3.2　势能

重力、弹簧弹力和引力所做的功分别为

$$W_{重}=-(mgh_B-mgh_A)$$

$$W_{弹}=-\left(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W_{引}=-\left[\left(-G\frac{Mm}{r_B}\right)-\left(-G\frac{Mm}{r_A}\right)\right]$$

可以看出，它们分别等于 mgh 、$\frac{1}{2}kx^2$ 、$-G\frac{Mm}{r}$ 增量的负值，这三个量分别称为重力势能、弹性势能和引力势能。上列三式表明，这三种保守力的功等于势能增量的负值。其实，凡是保守力都具有这种性质，即

$$W_{保}=-(E_{pB}-E_{pA}) \tag{3.14}$$

式中，E_{pA} 、E_{pB} 为质点在初、末位置的势能。

关于势能，需要说明以下三点。

（1）势能属于相互作用着的物体所组成的系统，不应把它看作属于某一物体，这是因为系统具有势能的条件是系统中各物体间相互作用力中存在着保守力。

（2）势能是系统位置的单值函数，它的大小随系统位置的变化而变化。

（3）系统在两种状态下的势能差有一定的量值，可用保守力的功来量度，所以势能差是有绝对意义的，但系统的势能只有相对的意义。通常选物体在地面（$h=0$）的势能为零，则质点在高度 h 处的重力势能 $E_p=mgh$；如果把两物体相距无限远（$r\to\infty$）时的引力势能规定为零，则 M 和 m 相距 r 时的引力势能 $E_p=-G\frac{Mm}{r}$；如果规定弹簧无形变时的弹性势能为零，则弹簧伸长或压缩 x 时的弹性势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$。

3.4 功能原理、机械能守恒定律

3.4.1 功能原理

由式（3.8）得

$$W_{外}+W_{内}=E_{k2}-E_{k1}$$

如果把内力的功看作保守内力和非保守内力做功的代数和，上式变成

$$W_{外}+W_{保内}+W_{非保内}=E_{k2}-E_{k1}$$

保守力做的功可用势能增量的负值代替，得

$$W_{外}+W_{非保内}-(E_{p2}-E_{p1})=E_{k2}-E_{k1}$$

移项，得

$$W_{外}+W_{非保内}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})=E_2-E_1 \tag{3.15}$$

动能和势能之和称为机械能。式（3.15）表明，合外力对系统所做的功和系统非保守内力做功的代数和等于系统机械能的增量，这称为质点系的功能原理。

3.4.2　机械能守恒定律

由式（3.15）可知，合外力和非保守内力做功之和等于系统机械能的增量，即

$$W_{外}+W_{非保内}=(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})$$

若 $W_{外}+W_{非保内}=0$，则 $(E_{k2}+E_{p2})-(E_{k1}+E_{p1})=0$，即

$$E_{k2}+E_{p2}=E_{k1}+E_{p1} \tag{3.16}$$

这就是说，如果一个系统内只有保守力做功，其他内力和一切外力都不做功（或其他内力和一切外力做的总功为零），则系统内各物体的动能和势能可以相互转换，但是它们的总和保持不变，这称为机械能守恒定律。

【例 3. 3】如图 3.11（a）所示，一位滑雪爱好者从高 50m 的山顶 A 点沿雪道由静止下滑，坡道 AB 长为 500m，滑至 B 点后，又沿水平雪道继续滑行，滑行若干米后停止在 C 点处。若摩擦系数 $\mu=0.050$，求该滑雪爱好者沿水平雪道滑行的路程。

解：滑雪爱好者在坡道上滑行时，如图 3.11（b）所示。在整个过程中，摩擦力做的功为

$$W_f=-\mu mg\cos\theta s'-\mu mgs=-\mu mg(s'+s)$$

机械能的变化为

$$E_2-E_1=-mgh$$

由功能原理知

$$W_f=E_2-E_1$$

$$s=\frac{h}{\mu}-s'=500\text{m}$$

【例 3. 4】一轻弹簧的一端系在竖直放置的圆环的顶点 P，另一端系一质量为 m 的小球，小球穿过圆环并在环上运动（$\mu=0$），如图 3.12 所示。开始小球静止于点 A，弹簧处于自然状态，其长为圆环的半径 R；当小球运动到圆环的底端点 B 时，小球对圆环没有压力，求弹簧的劲度系数。

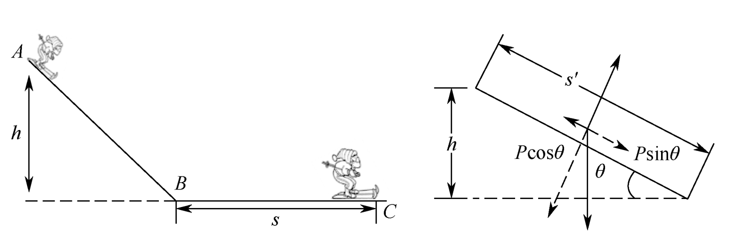

图 3.11　例 3.3 图

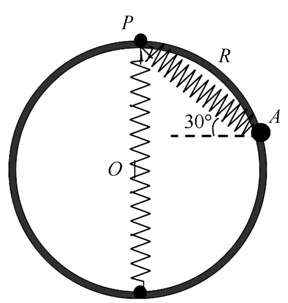

图 3.12　例 3.4 图

解：以弹簧、小球和地球为一系统，因为在 $A\to B$ 时，只有保守内力做功，所以系统的机械能守恒，即 $E_A=E_B$。取点 B 为重力势能零点，即

$$\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}kR^2=mgR(2-\sin 30^\circ)$$

又
$$kR - mg = m\frac{\upsilon^2}{R}$$
所以
$$k = \frac{2mg}{R}$$

【例 3. 5】如图 3.13 所示，在一弯曲管中，稳流着不可压缩的密度为 ρ 的流体。$P_a = P_1$、$S_a = A_1$、$\upsilon_a = \upsilon_1$、$P_b = P_2$、$S_b = A_2$、$\upsilon_b = \upsilon_2$，求流体的压强 P 和速率 υ 之间的关系。

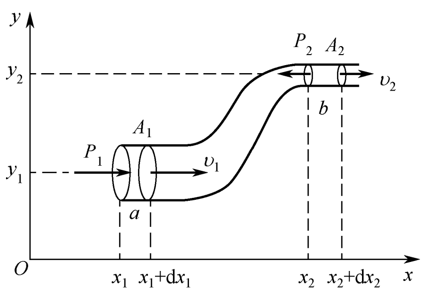

图 3.13 例 3.5 图

解：以 ab 段流体为研究对象，在 $\mathrm{d}t$ 时间内，a、b 处流体分别移动 $\mathrm{d}x_1$、$\mathrm{d}x_2$，ab 段流体左右两端的流体对它做的功为
$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} = P_1A_1\mathrm{d}x_1 - P_2A_2\mathrm{d}x_2$$
由于流体不可压缩，所以
$$A_1\mathrm{d}x_1 = A_2\mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}V$$
于是
$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} = (P_1 - P_2)\mathrm{d}V$$
ab 在 $x_1 \to x_2$ 处的机械能
$$E_1 = \rho\mathrm{d}Vgh_1 + \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\upsilon_1^2 + E_{x_1+\mathrm{d}x_1,x_2}$$
ab 在 $x_1 + \mathrm{d}x_1 \to x_2 + \mathrm{d}x_2$ 处的机械能
$$E_2 = E_{x_1+\mathrm{d}x_1,x_2} + \rho\mathrm{d}Vgh_2 + \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\upsilon_2^2$$
由功能原理知
$$\mathrm{d}W_\mathrm{p} = E_2 - E_1$$
即
$$(P_1 - P_2)\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}Vgh_2 + \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\upsilon_2^2 - \rho\mathrm{d}Vgh_1 - \frac{1}{2}\rho\mathrm{d}V\upsilon_1^2$$
化简得
$$P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$
此即为伯努利方程，也常写作 $P + \rho gh + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 =$ 常量。

若将弯曲管放在水平面上，即 $y_1 = y_2$，则有 $P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 =$ 常量。由此式可知，流体速度越快，压强越小。在站台等候地铁时，要站在黄色安全线以外，就是这个原因。

3.5 能量转换与守恒定律

如果系统内除重力和弹簧弹力外，还有摩擦力和其他非保守内力做功，那么系统的机械能会发生变化。事实证明，在系统的机械能减小或增大的同时，必然有等量的其他形式的能量增大或减小，而系统的机械能和其他形式能量的总和仍然是恒量。这就是说，能量

既不能消失，也不能创造，只能从一种形式转换为另一种形式，此即为能量转换与守恒定律。

从系统的角度来讲，对于一个与外界没有能量交换的系统（封闭系统），各种运动形式能量虽可以相互转换，但其总值保持不变。若系统不是封闭的，它要与系统外的物体交换能量，系统内各种形式的能量总和将发生变化，不再守恒。

能量转换与守恒定律是从无数事实中总结出来的，是物理学中最具有普遍性的规律之一，可以适用于任何变化过程，如机械、热、电磁、原子和原子核内以及化学、生物等变化过程。

3.6　总结

本章主要阐述了力的作用效果的空间积累及其对物体运动状态的影响。力的作用效果的空间积累被定义为功，不同的力做功的性质不同。保守力做功与运动路径无关，并由此定义与之相应的势能；非保守力做功则相反。合外力对质点做的功等于质点动能的增量；外力与内力对质点系做功之和等于质点系动能的增量；保守力做功等于相应势能增量的负值，势能增量定义为末态势能减去初态势能；合外力与非保守内力对质点系做功之和等于系统机械能的增量。

学习本章时需注意几点：首先，变力做功公式在处理有些问题时比较复杂，因而如能用动能定理或功能原理计算变力做功则更方便；其次，如前所述，不同的力做的功等于不同研究对象的不同能量的增量；最后，保守力做功与运动路径无关，非保守力做功与运动路径相关。

扩展阅读

功与能量之间的关系已经有非常广泛的应用，例如，水力发电将水的重力势能转换成电能；火力发电将煤炭的化学能转换成电能；风力发电则将风的机械能转换成电能等。

思　考　题

3.1　在质点运动过程中，作用于质点的某力一直没有做功，这是否表明该力在这一过程中对质点的运动没有产生任何影响？

3.2　“在甲、乙两物体相互作用过程中，若甲对乙做正功，则乙对甲做负功，作用力的功在数值上恒等于反作用力的功，因而这一对力的功之和恒为零。”你认为这种说法对吗？试举例说明。

3.3　重力、引力、弹簧弹力这三种力做功有什么共同的特点？

3.4　试判断在以下各过程中系统的机械能是否一定守恒：

（1）忽略空气阻力和其他星体的作用力，卫星绕地球沿椭圆轨道运动；

（2）一弹簧上端固定，下端悬一重物，重物在其平衡位置附近振动，空气阻力不计；

（3）一物体从空中自由落下，陷入沙坑。

3.5　质点的动能是否与参考系有关？功是否与参考系有关？质点的动能定理是否也与参考系有关？试举例说明。

3.6　内力做功可以改变质点系的动能吗？试举例说明。

3.7　内力做功可以改变质点系的机械能吗？试举例说明。

3.8　合外力对物体所做的功等于物体动能的增量，而其中某一个分力做的功能否大于物体动能的增量？

3.9 试用功能原理解释抽水蓄能发电原理。

3.10 保守力做的功总是负的吗？举例说明。保守力做功$W=-\Delta E_{\rm p}$，即保守力做功等于势能增量的负值；若假定为正值，又将如何呢？

课 程 论 文

3.1 试讨论功与能在专业中的应用。

3.2 试比较各种新能源的发电原理及其优势。

习 题

3.1 一质点在两恒力的共同作用下，位移$\Delta\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$；在此过程中，动能增量为 24J，已知其中一恒力$\boldsymbol{F}_1=12\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，则另一恒力所做的功为__________。

3.2 质量 m=1kg 的物体，在坐标原点处从静止出发在水平面内沿 x 轴运动，其所受合力方向与运动方向相同，合力大小 F=3+2x，那么，物体在开始运动的 3m 内，合力所做的功$W=$________________；且 x=3m 时，其速率$\upsilon=$__________________。

3.3 如图 3.14 所示，一质点在几个力的作用下，沿半径为 R 的圆周做运动，其中一个力是恒力$\boldsymbol{F}_0$，方向始终沿 x 轴正向，即$\boldsymbol{F}_0=F_0\boldsymbol{i}$，当质点从 A 点逆时针方向走过 3/4 圆周到达 B 点时，$\boldsymbol{F}_0$所做的功为___________。

3.4 如图 3.15 所示，质量为 m 的木块沿固定的光滑斜面下滑，当下降 h 高度时，重力做功的瞬时功率为（　　）。

A．$mg(2gh)^{1/2}$　　B．$mg\cos\theta(2gh)^{1/2}$

C．$mg\sin\theta(\frac{1}{2}gh)^{1/2}$　　D．$mg\sin\theta(2gh)^{1/2}$

3.5 如图 3.16 所示，一物体挂在一弹簧下面，平衡位置在 O 点，现用手向下拉物体，第一次把物体由 O 点拉到 M 点，第二次由 O 点拉到 N 点，再由 N 点送回 M 点，则在这两个过程中，（　　）。

A．弹力做的功相等，重力做的功不相等

B．弹力做的功相等，重力做的功也相等

C．弹力做的功不相等，重力做的功相等

D．弹力做的功不相等，重力做的功也不相等

3.6 一物体与斜面间的摩擦系数$\mu=0.20$，斜面固定，倾角$\alpha=45°$。现给予物体以初速率$\upsilon_0=10\text{m/s}$，使它沿斜面向上滑，如图 3.17 所示。求：

（1）物体能够上升的最大高度 h；

（2）该物体达到最高点后，沿斜面返回到原出发点时的速率υ。

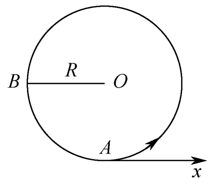

图 3.14　习题 3.3 题图

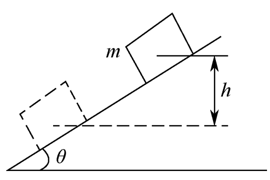

图 3.15　习题 3.4 题图

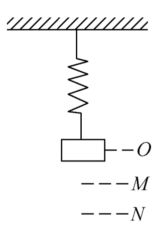

图 3.16　习题 3.5 题图

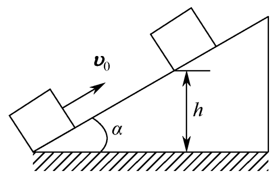

图 3.17　习题 3.6 题图

3.7　求一质量为 m 的陨石从距地面高 h 处由静止开始落向地面，设地球的质量为 M，半径为 R，忽略空气阻力。求：

（1）陨石下落过程中，万有引力做的功是多少？

（2）陨石落地的速度为多大？

3.8　质量为 m 的汽车沿 x 轴正向运动，初位置 $x_0 = 0$，从静止开始加速。在其发动机的功率 P 维持不变且不计阻力的条件下：

（1）证明其速度的表达式为 $\upsilon = \sqrt{2Pt/m}$；

（2）证明其位置的表达式为 $x = \sqrt{8P/(9m)}\,t^{3/2}$。

3.9　某弹簧不遵循胡克定律，若施力 F，则相应伸长量为 x，力与伸长量 x 的关系为

$$F = 52.8x + 38.4x^2$$

（1）将弹簧从 $x_1 = 0.5\text{m}$ 拉伸到 $x_2 = 1\text{m}$ 时，求外力所需做的功。

（2）将弹簧放在水平光滑的桌面上，一端固定，另一端系一个质量为 2.17kg 的物体，然后将弹簧拉伸到 $x_2 = 1\text{m}$，再将物体由静止释放，求当弹簧回到 $x_1 = 0.5\text{m}$ 时物体的速率。

（3）此弹簧的弹力是保守力吗？为什么？

3.10　劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定，另一端与桌面上的质量为 m 的小球 B 相连接，初始时位于 O 点，如图 3.18 所示，推动小球，将弹簧压缩一段距离 L 后放开。假定小球所受的滑动摩擦力的大小为 F 且恒定不变，滑动摩擦系数与静摩擦系数可视为相等。试求 L 必须满足什么条件时，才能使小球在放开后就开始运动，而且一旦停止下来就一直保持静止状态。

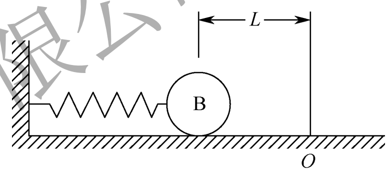

图 3.18　习题 3.10 题图